УДК 517.957, 517.988, 517.977.56

© *А. В. Чернов*

МАЖОРАНТНЫЙ ПРИЗНАК ПЕРВОГО ПОРЯДКА ТОТАЛЬНО ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается нелинейное функционально-операторное уравнение типа Гаммерштейна, представляющее собой удобную форму описания широкого класса управляемых распределенных систем. Для указанного уравнения доказываются теорема единственности решения, а также мажорантный признак тотально (по всему множеству допустимых управлений) глобальной разрешимости, использующий предположения о вольтерровости операторной составляющей и о дифференцируемости по переменной состояния функциональной составляющей правой части. Кроме того, используются предположения о глобальной разрешимости исходного уравнения для фиксированного допустимого управления $u=v$, а также о глобальной разрешимости некоторого мажорантного уравнения с правой частью, зависящей от максимального отклонения допустимых управлений от управления v. В качестве примера рассматривается первая краевая задача для параболического уравнения второго порядка с правой частью $f\big(t,x(t),u(t)\big)$, $t=\{t_0,\overline{t}\}\in\Pi=(0,T)\times Q$, $Q\subset\mathbb{R}^n$, x — фазовая переменная, u — управляющая переменная. Здесь решение мажорантного уравнения можно представить как решение начально-краевой задачи аналогичного вида с правой частью $bx^{q/2}+a_0x+Z$, при нулевых начально-краевых условиях, $Z(t)=\max\limits_{u\in\mathcal{V}(t)}|f(t,x[v](t),u)-f(t,x[v](t),v(t))|$, $\mathcal{V}(t)\subset\mathbb{R}^s$ — множество допустимых значений управления при $t\in\Pi$, $q>2$, $s\in\mathbb{N}$; $a_0(.)$ и $b\geqslant 0$ — параметры, определяемые по f'_x.

Ключевые слова: функционально-операторное уравнение типа Гаммерштейна, тотально глобальная разрешимость, мажорантное уравнение, вольтерровость.

DOI: 10.20537/vm180407

Введение

Тотально глобальная разрешимость (ТГР) — это свойство управляемой системы сохранять глобальную разрешимость для всех допустимых управлений. В работах автора в том же смысле использовался также термин *тотальное сохранение глобальной разрешимости*.

Нарушение разрешимости распределенной системы весьма вероятно в случае, когда порядок роста правой части соответствующего дифференциального уравнения по фазовой переменной превышает линейный. В [1, пример к теореме 2.2, с. 87–88; § 4, с. 95–100], [2, §1], [3, введение, п. 2], [4] приводятся показательные примеры на этот счет. Об актуальности проблемы ТГР и истории вопроса см. детальный обзор в [5]. Говоря совсем коротко (подробнее, включая соответствующую библиографию, см. в [5]), свойство ТГР при наличии еще и свойства единственности решения управляемой системы оказывается полезным по следующим причинам: 1) исходная бесконечномерная задача оптимального управления за счет конечномерной аппроксимации управляющей функции сводится к задаче минимизации функции многих переменных (параметров аппроксимации) на известном множестве простой структуры — *аппроксимирующей задаче* математического программирования, для решения которой можно использовать стандартные методы (и готовые программные комплексы), причем проблему существования решения в ней можно снимать с помощью классической теоремы Вейерштрасса или ее следствий; 2) существенно упрощается проблема выбора начального приближения к оптимуму; 3) можно обоснованно ставить различные игровые задачи, связанные с управляемыми распределенными системами; 4) за счет упомянутой выше дискретизации можно применять известные классические и топологические теоремы о разрешимости системы нелинейных уравнений относительно конечного числа неизвестных для решения проблемы поточечной управляемости. Отметим также следующий момент.

При исследовании различных задач управления (помимо простого постулирования глобальной разрешимости управляемой системы для всех управлений из заданного множества) различными исследователями используются, как правило, некоторые общие (основанные на теоремах Минти–Браудера, Лакса–Мильграма, Шаудера и т. д., см. [6]) или специфические результаты о достаточных условиях однозначной глобальной разрешимости, уже известные из теории дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений конкретного вида с неуправляемой правой частью, нелинейно зависящей от переменной состояния. Условиям глобальной разрешимости для уравнений с неуправляемой правой частью посвящена достаточно обширная литература (см., например, [7–25]). Между тем, при исследовании глобальной разрешимости начально-краевых задач с правой частью, зависящей от управления, имеет смысл использовать информацию о факте и характере этой зависимости. В частности, может оказаться так, что наличие глобальной разрешимости или ее отсутствие существенным образом зависит от того, насколько широко варьируются управляемые параметры, входящие в правую часть уравнения. Во многих ситуациях удается доказать, что если, например, система глобально разрешима для некоторого фиксированного управления, то она сохраняет это свойство для всех малых (в том или ином смысле) вариациях этого управления (при том что для каких-то допустимых управлений глобальной разрешимости может и не быть). Соответствующее свойство называется устойчивостью существования глобальных решений (или, в более общем виде, сохранением глобальной разрешимости); см., например, обзоры в [26–28]. В нашем случае тотально глобальная разрешимость доказывается при условии, что управляемая система разрешима для некоторого фиксированного управления v и что разрешимо некоторое мажорантное уравнение, правая часть которого зависит от максимального отклонения допустимых управлений от управления v, причем разрешимость при нулевом отклонении очевидна. Кроме того, доказывается также единственность глобального решения при каждом фиксированном управлении. Таким образом, разрешимость *одного лишь* мажорантного уравнения гарантирует однозначную глобальную разрешимость сразу *для всех* управлений из заданного множества. Понятие «тотальное сохранение глобальной разрешимости» было введено в работе [29]. Позже в работе [28] впервые был использован более короткий синоним этого понятия — ТГР. В [29, 30] уже доказывались мажорантный и мажорантно-минорантный признаки ТГР. Эти признаки были своего рода обобщением и развитием классической теоремы Уинтнера, касающейся глобальной разрешимости задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (см., например, [31, § III.5, теорема 5.1, с. 43]). Признак, который мы доказываем здесь, принципиально иной, хотя он тоже использует идею мажоризации, а также вольтерровость операторной составляющей правой части (и, кроме того, дифференцируемость по переменной состояния ее функциональной составляющей). Здесь мы предполагаем глобальную разрешимость не только некоторого мажорантного уравнения, но и для фиксированного допустимого управления $u = v$ глобальную разрешимость исходного уравнения. При этом в отличие от [29, 30], где мажорантное уравнение получалось оценкой правой части для всех допустимых управлений, на этот раз оно получается оценкой приращения правой части при отклонении управления от $u = v$ (с использованием теоремы Лагранжа о конечных приращениях) и строится не по функции правой части как таковой, а по ее производной относительно фазовой переменной. В этом смысле мы говорим, что получаемый здесь признак ТГР является признаком первого порядка. Разрешимость мажорантного уравнения означает, что величина отклонения допустимых управлений от $u = v$ не настолько критична, чтобы нарушить свойство глобальной разрешимости управляемой системы.

Пусть $n, m, \ell, s \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < q < +\infty$, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$ — заданные числа, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{1}{p}$; $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое (здесь и далее в смысле Лебега) ограниченное множество, $A\colon L_p^m(\Pi) \to L_q^\ell(\Pi)$ — заданный *линейный ограниченный оператор* (ЛОО); $\mathcal{D} \subset L_r^s(\Pi)$ — ограниченное множество.

МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 4

Рассмотрим управляемое функционально-операторное уравнение типа Гаммерштейна:

$$y(t) = w(t) + A\left[g\Big(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)\Big)\right](t), \quad t \in \Pi, \quad y(\cdot) \in L_q^l(\Pi), \tag{0.1}$$

где $u \in \mathcal{D}$ — управляющая функция (управление), $w \in L_q^l(\Pi)$; $g(\cdot,\cdot,\cdot)\colon \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ — заданная функция, удовлетворяющая следующим условиям типа Каратеодори.
Условия **F**.

(а) $g(t, x, w)$ непрерывно дифференцируема по $x \in \mathbb{R}^l$ для почти всех (п. в.) $t \in \Pi$, при каждом $w \in \mathbb{R}^s$ и вместе с производной $g'_x(t, x, w)\colon \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^{m\times l}$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $\{x, w\} \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s$ для п. в. $t \in \Pi$;

(б) $\forall\, u \in L_r^s(\Pi)$ формула $\mathbf{G}_u[y] = g\Big(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)\Big)$ определяет оператор $\mathbf{G}_u\colon L_q^l(\Pi) \to L_p^m(\Pi)$;

(в) $\forall\, u \in L_r^s(\Pi)$ формула $\mathcal{G}_u[y] = g'_x\Big(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)\Big)$ определяет оператор $\mathcal{G}_u\colon L_q^l(\Pi) \to L_\sigma^{m\times l}(\Pi)$.

Уравнение (0.1) является удобной формой описания широкого класса управляемых распределенных систем, связанных с полулинейными уравнениями в частных производных, а также интегро-дифференциальными уравнениями; см. на этот счет многочисленные примеры в работах автора, в частности в [5, 29, 30], а также пример в § 4.

В данной статье для уравнения (0.1) исследуются фактически три проблемы: 1) тотально глобальная разрешимость; 2) равномерная поточечная оценка семейства решений; 3) единственность решения. Проблема под № 3 решается здесь достаточно универсально (в том плане, что мы не требуем для ее решения каких-то специальных свойств функции g (типа монотонности, выпуклости и т. п.) или самого уравнения). Проблемы под №№ 1 и 2 в общей постановке гораздо более нетривиальны и требуют более дифференцированного подхода. Исследование этих двух проблем мы проводим при дополнительном предположении существования глобального решения у некоторого мажорантного уравнения по отношению к семейству уравнений[1] $\Big\{(0.1)\colon u \in \mathcal{D}\Big\}$. При этом доказывается также и поточечная оценка решений: $\Big|y_u(t) - y_v(t)\Big| \leqslant \overline{x}(t)$, $t \in \Pi$, $u \in \mathcal{D}$, где $\overline{x}(t)$ — решение мажорантного уравнения, $y_v(t)$ — решение исходного уравнения, отвечающее фиксированному управлению v. Важной особенностью наших результатов является также то, что оценка решения строится на заранее заданном множестве $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, одном и том же для всех $u \in \mathcal{D}$. Основной результат статьи был кратко анонсирован в [32].

§ 1. Формулировка основного результата

Рассмотрим уравнение (0.1). Относительно ЛОО A будем предполагать, что он обладает для любого $\delta > 0$ вольтерровой δ-малой по мере цепочкой множеств, а кроме того, имеет положительную мажоранту $B\colon L_p(\Pi) \to L_q(\Pi)$. Напомним [33–35] понятия вольтеррова множества и вольтерровой δ-малой по мере цепочки множеств.

Определение 1. Пусть $\Sigma = \Sigma(\Pi)$ — σ-алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств множества Π, P_H — оператор умножения на характеристическую функцию[2] χ_H множества $H \in \Sigma$. Систему $\mathcal{B}(F) = \Big\{H \in \Sigma\colon P_H F P_H = P_H F\Big\}$ будем называть *системой вольтерровых множеств* оператора $F\colon L_p^m(\Pi) \to L_q^\ell(\Pi)$. При этом для числа $\delta > 0$ подсистему вида $\mathcal{T} = \Big\{\emptyset = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = \Pi\Big\}$ системы $\mathcal{B}(F)$ будем называть

---

[1] Формально говоря, здесь просматривается аналогия с известным признаком Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Там при наличии сходимости мажорирующего числового ряда гарантируется сходимость функционального ряда в каждой точке из заданного множества. Здесь при наличии глобальной разрешимости мажорантного уравнения гарантируется глобальная разрешимость управляемого уравнения для всех управлений из заданного множества.

[2] Такой оператор определен в любом лебеговом пространстве. Мы обозначаем его одинаково, независимо от того, в каком именно лебеговом пространстве он действует.

(1) *вольтерровой δ-цепочкой* ЛОО F, если $\Big\|P_hFP_h\Big\| < \delta$ для всех $h = H_i \setminus H_{i-1}$, $i = \overline{1,k}$;

(2) *вольтерровой δ-малой по мере цепочкой* оператора F, если $\operatorname{mes}(H_i \setminus H_{i-1}) < \delta$, $i = \overline{1,k}$.

Так, например, если $F[z](t) = \int_0^{t_1} d\xi_1 \int_0^{t^2} z(\xi)\,d\xi_2$, $t = \{t_1, t_2\} \in \Pi = [0, T_1] \times [0, T_2] \subset \mathbb{R}^2$, $z \in L_p(\Pi)$, то в качестве вольтерровой δ-малой по мере цепочки оператора[3] F годится, в частности, система $\big\{H\big(\tau[i]\big) \colon 0 = \tau[0] < \ldots < \tau[k] = T_1 + T_2\big\}$ множеств вида $H(\tau) = \Big\{t = \{t_1, t_2\} \in \Pi \colon t_1 + t_2 \leqslant \tau\Big\}$, при условии, что мелкость разбиения $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,k}}\Big|\tau[i] - \tau[i-1]\Big|$ достаточно мала.

Теорема 1. *Для любого $u \in L^s_r(\Pi)$ уравнение* (0.1) *не может иметь более одного решения.*

Далее нам понадобится ввести понятие мажорантного уравнения для семейства управляемых уравнений (0.1), $u \in \mathcal{V}$, где $\mathcal{V} = \{u(\cdot) \in L^s_r(\Pi) \colon |u(t)| \leqslant V(t)$ для п. в. $t \in \Pi\}$, а $V \in L_r(\Pi)$ — некоторая фиксированная функция. Следующее утверждение доказано в § 2.

Лемма 1. *Пусть функция $f(t,x,v) \colon \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $\{x, v\} \in \mathbb{R}^{l+s}$, причем для всех $y(\cdot) \in L^l_q(\Pi)$, $u(\cdot) \in L^s_r(\Pi)$ имеем $f\Big(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)\Big) \in L_\sigma(\Pi)$, где $1 \leqslant q, r, \sigma < \infty$. Тогда существуют функция $a(\cdot) \in L^+_\sigma(\Pi)$ и число $b \geqslant 0$ такие, что*

$$\Big|f(t,x,v)\Big| \leqslant a(t) + b \cdot |x|^{q/\sigma} + b \cdot |v|^{r/\sigma} \quad \textit{для п. в. } t \in \Pi, \quad x \in \mathbb{R}^l, \quad v \in \mathbb{R}^s.$$

Далее мы будем предполагать, что для управления $u = v \in L^s_r(\Pi)$ существует решение $y = y_v$ уравнения (0.1). Применяя лемму 1 к функции $f(t,x,z) = |g'_x(t, y_v(t) + x, z)|$, получаем, что найдутся $a(\cdot) \in L^+_\sigma(\Pi)$ и $b \geqslant 0$ такие, что для всех $\theta \in [0;1]$ имеем

$$|g'_x(\cdot, y_v + \theta\Delta y, u)| \leqslant a(\cdot) + b\left(|\Delta y|^{q/\sigma} + |u|^{r/\sigma}\right) \leqslant a_0(\cdot) + b \cdot |\Delta y|^{q/\sigma}, \quad a_0 = a + b|V|^{r/\sigma} \in L_\sigma(\Pi).$$

Для указанных выше параметров[4] $a_0(\cdot)$ и b, а также для функции

$$\overline{\varphi}(t) = B\Big[\max_{u \in \mathbb{R}^s \colon |u| \leqslant V(\cdot)} |\Delta_u g(y_v)|\Big](t), \quad \Delta_u g(y_v) \equiv g(\cdot, y_v, u) - g(\cdot, y_v, v),$$

определим упомянутое выше *мажорантное* уравнение следующим образом:

$$x = bB\Big[x^{q/p}\Big] + B\Big[a_0(\cdot)x\Big] + \overline{\varphi}, \quad x \in L^+_q. \tag{1.1}$$

Следующее утверждение дает достаточные условия *тотально* (по всем управлениям из заданного множества) *глобальной разрешимости* уравнения (0.1).

Теорема 2. *Пусть $V(\cdot) \in L_r(\Pi)$, $v(\cdot) \in L^s_r(\Pi)$ — некоторые фиксированные функции, причем для $u = v$ существует решение $y = y_v$ уравнения* (0.1)*; $\mathcal{V} = \{u(.) \in L^s_r(\Pi) \colon |u(t)| \leqslant V(t)$ для п. в. $t \in \Pi\}$. Пусть, кроме того, мажорантное уравнение* (1.1) *имеет решение $\overline{x}$. Тогда каждому управлению $u \in \mathcal{V}$ отвечает единственное решение $y = y_u$ уравнения* (0.1)*. Указанное решение удовлетворяет оценке $\Big|y_u(t) - y_v(t)\Big| \leqslant \overline{x}(t)$ для п. в. $t \in \Pi$.*

[3] Это так называемый оператор обращения главной части известной задачи Гурса–Дарбу.

[4] Собственно говоря, можно было бы, не ссылаясь на лемму 1, просто постулировать существование таких параметров, как условие на функцию g, тем более что зачастую их можно указать в явном виде. Однако указанная лемма позволяет утверждать, что эти параметры существуют всегда.

Доказательства теорем 1, 2 см. в § 3.

Пользуясь методами теории устойчивости существования глобальных решений (УСГР), можно показать, что уравнение (1.1) разрешимо во всяком случае при достаточной малости нормы $\|\overline{\varphi}\|_{L_q}$ (см. теорему 2.1 из [36], которая, в частности, гарантирует обратимость оператора $S\colon L_q \to L_q$, определяемого формулой $S[x] = x - bB[x^{q/p}] - B[a_0x]$, на достаточно малой окрестности нуля, при условии, что оператор B обладает для любого $\delta > 0$ вольтерровой δ-цепочкой). Наличие при каждом $\delta > 0$ вольтерровой δ-цепочки у оператора B (при наших предположениях) гарантировано, если он обладает для любого $\delta > 0$ вольтерровой δ-малой по мере цепочкой, откуда, кроме того, следует также равенство нулю спектрального радиуса оператора $B_0[y] = B[a_0y]$ (см., например, [29, теорема 2.1]). А тогда при $b = 0$ мажорантное уравнение разрешимо при произвольно заданном $\overline{\varphi} \in L_q$, и, рассматривая параметр b в роли управления, теми же методами теории УСГР можно показать, что мажорантное уравнение разрешимо для всех достаточно малых $b > 0$. Формально говоря, уравнение (1.1) является частным случаем мажорантного уравнения [30, (3)]. Однако достаточные условия его разрешимости [30, теорема 4.1] здесь неприменимы, поскольку предполагают подлинейную асимптотику функциональной составляющей правой части на бесконечности по фазовой переменной, чего в нашем случае нет, так как $q > p$. Можно, вероятно, использовать предположение о достаточной (в том или ином смысле) малости множества Π, определяемой, например, величинами $\|B\|$, $|B[1]|$ и т. п. Но есть другой путь — дальнейшее использование теорем сравнения. В качестве теоремы сравнения можно было бы использовать признак ТГР из [30], но, чтобы не вводить дополнительных предположений относительно оператора B, с учетом изотонности правой части уравнения (1.1) проще использовать признак ТГР из [37], основанный на теореме А. Тарского. А именно, непосредственно из [37, теорема 1.1] получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть для некоторых* $\widetilde{w} \in L_q^+(\Pi)$, $\widetilde{Z} \in L_p^+(\Pi)$, $\widetilde{Z} \geqslant Z \equiv \max\limits_{u\in\mathbb{R}^s\colon |u|\leqslant V(\cdot)} |\Delta_u g(y_v)|$, $\widetilde{a}_0 \in L_\sigma^+(\Pi)$, $\widetilde{a}_0 \geqslant a_0$, *оказалось, что оценочное уравнение*

$$x = \widetilde{w} + B\Big[b\,x^{q/p} + \widetilde{a}_0(\cdot)x + \widetilde{Z}\Big]$$

имеет решение $x = \widetilde{x} \in L_q^+(\Pi)$. *Тогда мажорантное уравнение* (1.1) *также имеет решение* $x = \overline{x} \in L_q^+(\Pi)$ *такое, что* $\overline{x} \leqslant \widetilde{x}$.

Параметры $\widetilde{w}$, $\widetilde{Z}$, $\widetilde{a}_0$ следует подбирать так, чтобы разрешимость оценочного уравнения либо была очевидна, либо допускала сравнительно простое обоснование. Как это делается, поясняется на конкретном примере в § 4.

Наконец, с практической точки зрения, если удалось найти численное решение (одного лишь) мажорантного или оценочного уравнения, это (при выполнении остальных условий теоремы 2) позволяет с достаточно большой вероятностью ожидать тотально глобальной разрешимости всего семейства управляемых уравнений.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Доказательство леммы 1 основано на следующих нетривиальных утверждениях.

Лемма 3. *Пусть* $S(\Pi)$ *— пространство измеримых п. в. конечных функций на* Π, $l \in \mathbb{N}$, $a(\cdot)$, $b(\cdot) \in S^l(\Pi)$ *— измеримые на* Π l*-вектор-функции,* $a(t) \leqslant b(t)$ *для п. в.* $t \in \Pi$ ($\forall a, b \in \mathbb{R}^l$: $a \leqslant b \Leftrightarrow a_j \leqslant b_j$, $j = \overline{1,l}$; $[a;b] = [a_1;b_1] \times \ldots \times [a_l;b_l]$), *а функция* $\Phi(t,y)\colon \Pi \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ *измерима по* $t \in \Pi$ *и непрерывна по* $y \in \mathbb{R}^l$. *Тогда функция* $\varphi(t) \equiv \max\limits_{y\in[a(t);b(t)]} \Phi(t,y)$ *измерима на* Π, *и найдется функция* $\theta \in M[a;b] \equiv \Big\{y \in S^l(\Pi)\colon y(t) \in [a(t);b(t)]\Big\}$ *такая, что* $\Phi(t,\theta(t)) = \varphi(t)$ *для п. в.* $t \in \Pi$.

Доказательство леммы 3 следует, например, непосредственно из [38, предложение Д1.2, с. 326, теорема Д1.4, с. 327]. Заменяя в доказательстве леммы [39, лемма 5.17.6, с. 349] ссылку на [39, лемма 5.17.2] ссылкой на лемму 3, получаем доказательство следующего утверждения.

Лемма 4. *Пусть функция $f(t,x)\colon \Pi\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}$ измерима по $t\in\Pi$ и непрерывна по $x\in\mathbb{R}^l$, причем для каждого $y(\cdot)\in L_q^l(\Pi)$ соответствующая суперпозиция $f\Big(\cdot,y(\cdot)\Big)\in L_\sigma(\Pi)$, где $1\leqslant q,\sigma<\infty$. Тогда найдутся функция $a(\cdot)\in L_\sigma^+(\Pi)$ и число $b\geqslant 0$ такие, что*

$$\Big|f(t,x)\Big|\leqslant a(t)+b\cdot|x|^{q/\sigma}\quad \text{для п. в. } t\in\Pi,\quad x\in\mathbb{R}^l.$$

Доказательство леммы 1. Заметим, во-первых, что функция $\psi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, определяемая формулой $\psi(z)=\operatorname{sign}(z)|z|^{q/r}$, непрерывна. В таком случае функция

$$h(t,x,z)=f\Big(t,x,\operatorname{sign}(z_1)|z_1|^{q/r},\ldots,\operatorname{sign}(z_s)|z_s|^{q/r}\Big)\colon \Pi\times\mathbb{R}^{l+s}\to\mathbb{R}$$

измерима по $t\in\Pi$ и непрерывна по $\{x,z\}\in\mathbb{R}^{l+s}$. Заметим, во-вторых, что если $z(\cdot)\in L_q(\Pi)$, то $\operatorname{sign}(z)|z|^{q/r}\in L_r(\Pi)$. Таким образом, $h\Big(\cdot,x(\cdot),z(\cdot)\Big)\in L_\sigma(\Pi)$ для всех $\{x,z\}\in L_q^{l+s}(\Pi)$. Поэтому согласно лемме 4 найдутся $a(\cdot)\in L_\sigma^+(\Pi)$, $\gamma\geqslant 0$ и $c\geqslant 0$:

$$\Big|h(t,x,z)\Big|\leqslant a(t)+\gamma\cdot|\{x,z\}|^{q/\sigma}\leqslant a(t)+c\cdot|x|^{q/\sigma}+c\sum_{i=1}^{s}|z_i|^{q/\sigma}$$

для п. в. $t\in\Pi$, $\forall\{x,z\}\in\mathbb{R}^{l+s}$. Остается взять в качестве $z_i=\operatorname{sign}(v_i)|v_i|^{r/q}$ и положить $b=sc$. $\square$

Лемма 5. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и для произвольных $H\in\mathcal{B}(A)$ и управления $u\in\mathcal{V}$ заданы соответственно множество и оператор:*

$$Y_H=\Big\{y\in P_HL_q^\ell(\Pi)\colon \Big|y(t)-y_v(t)\Big|\leqslant\overline{x}(t),\ t\in H\Big\},\quad F_u[y]=w+A\Big[g\Big(\cdot,y(\cdot),u(\cdot)\Big)\Big],$$

$F_u\colon L_q^\ell(\Pi)\to L_q^\ell(\Pi)$. Тогда $P_HF_u\colon Y_H\to Y_H$.

Доказательство. Выберем произвольно $y\in Y_H$ и оценим

$$P_H\Big|F_u[y]-y_v\Big|=P_H\Big|F_u[y]-F_v[y_v]\Big|=P_H\Big|AP_H\Big[g(\cdot,y,u)-g(\cdot,y_v,v)\Big]\Big|\leqslant$$

$$\leqslant P_HBP_H\Big[\Big|g(\cdot,y,u)-g(\cdot,y_v,u)\Big|\Big]+P_HBP_H\Big[\Big|\Delta_ug(y_v)\Big|\Big]\leqslant$$

$$\leqslant P_H\left(BP_H\left[\int_0^1\Big|g'_x\Big(\cdot,y_v+\theta P_H\Delta y,u\Big)\Big|d\theta\cdot\Big|P_H\Delta y\Big|\right]+\overline{\varphi}\right),\ \Big|P_H\Delta y\Big|=P_H|y-y_v|\leqslant P_H\overline{x}\leqslant\overline{x}.$$

Применяя далее лемму 1 к функции $f(t,x,z)=|g'_x(\cdot,y_v+x,z)|$, получаем, что $\exists\, a\in L_\sigma^+(\Pi)$ и $b\geqslant 0$:

$$|g'_x(\cdot,y_v+\theta\Delta y,u)|\leqslant a(t)+b\left(|\Delta y|^{q/\sigma}+|u|^{r/\sigma}\right)\leqslant a_0(t)+b\cdot|\Delta y|^{q/\sigma},$$

где $a_0=a+b|V|^{r/\sigma}\in L_\sigma(\Pi)$. Поскольку $(q/\sigma)+1=q/p$, то, таким образом,

$$P_H\Big|F_u[y]-y_v\Big|\leqslant P_H\Big(bB\Big[\Big|P_H\Delta y\Big|^{q/p}\Big]+B\Big[a_0(\cdot)\Big|P_H\Delta y\Big|\Big]+\overline{\varphi}\Big)\leqslant P_H\Big(bB\Big[\overline{x}^{q/p}\Big]+B\Big[a_0(\cdot)\overline{x}\Big]+\overline{\varphi}\Big),$$

и поскольку $\overline{x}$ — решение уравнения (1.1), то $P_H\Big|F_u[y]-y_v\Big|\leqslant P_H\overline{x}$, то есть $F_u[y]\in Y_H$. $\square$

§ 3. Доказательство основных утверждений

Доказательство теоремы 1. Пусть данному управлению $u \in L_r^s(\Pi)$ отвечает два решения — $y = y_1$ и $y = y_2$ — уравнения (0.1). Обозначим для краткости $\Delta y = y_2 - y_1$. Определим на множестве Π функцию $\gamma(t) = \max\Big\{\Big|g'_x\Big(t, y_1(t) + \theta\Delta y(t), u(t)\Big)\Big| : \theta \in [0;1]\Big\}$.

Согласно лемме 3 и условиям на функцию g получаем, что функция γ измерима на Π и, более того, $\gamma \in L_\sigma(\Pi)$. Определим далее число $\delta > 0$ такое, что для всякого $h \in \Sigma(\Pi)$, $\mathrm{mes}(h) < \delta$, выполняется неравенство $\|A\| \cdot \|P_h\gamma\|_{L_\sigma} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Это возможно в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега. В соответствии с условиями на оператор A указанный оператор имеет вольтеррову δ-малую по мере цепочку множеств $\mathcal{T} = \{H_0, H_1, \ldots, H_k\}$, и за счет выбора δ

$$\|A\| \cdot \|P_{H_i \setminus H_{i-1}}\gamma\|_{L_\sigma} \leqslant \frac{1}{2}, \quad i = \overline{1,k}. \tag{3.1}$$

Для доказательства равенства $y_1 = y_2$ достаточно последовательно обосновать неравенства

$$\Big\|P_{H_i \setminus H_{i-1}}\Delta y\Big\|_{L_q^\ell} \leqslant 0, \qquad i = \overline{1,k}. \tag{$\mathcal{N}_i$}$$

Положим для краткости $F_u[y] = w + A\Big[g\Big(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)\Big)\Big] : L_q^\ell(\Pi) \to L_q^\ell(\Pi)$.

1. Пользуясь вольтерровостью множеств цепочки $\mathcal{T}$ по отношению к оператору A, а также условиями на функцию g и леммой Адамара, оценим:

$$\Big\|P_{H_1}\Delta y\Big\|_{L_q^\ell} = \Big\|P_{H_1}\Big(F_u[y_2] - F_u[y_1]\Big)\Big\|_{L_q^\ell} = \Big\|P_{H_1}AP_{H_1}\Big(g(\cdot, y_2, u) - g(\cdot, y_1, u)\Big)\Big\|_{L_q^\ell} \leqslant$$

$$\leqslant \|A\| \cdot \Big\|P_{H_1}\int_0^1 g'_x(\cdot, y_1 + \theta\Delta y, u)\Delta y\, d\theta\Big\|_{L_p^m} \leqslant \|A\| \cdot \Big\|P_{H_1}\int_0^1 \Big|g'_x(\cdot, y_1 + \theta\Delta y, u)\Big| d\theta \cdot \Big|P_{H_1}\Delta y\Big|\Big\|_{L_p},$$

откуда $\Big\|P_{H_1}\Delta y\Big\|_{L_q^\ell} \leqslant \|A\| \cdot \Big\|P_{H_1}\gamma\Big\|_{L_\sigma}\Big\|P_{H_1}\Delta y\Big\|_{L_q^\ell}$ и, в силу (3.1), $\Big\|P_{H_1}\Delta y\Big\|_{L_q^\ell} \leqslant \dfrac{1}{2}\Big\|P_{H_1}\Delta y\Big\|_{L_q^\ell}$, то есть $\Big\|P_{H_1}\Delta y\Big\|_{L_q^\ell} \leqslant 0$, и, поскольку $H_0 = \emptyset$, выполняется неравенство $(\mathcal{N}_1)$.

2. Действуя по индукции, предположим, что для $i = \overline{1,j}$ неравенства $(\mathcal{N}_i)$ доказаны. Тогда

$$\Big\|P_{H_j}\Delta y\Big\|_{L_q^\ell} = \Big\|\sum_{i=1}^{j} P_{H_i}\Delta y\Big\|_{L_q^\ell} \leqslant \sum_{i=1}^{j}\Big\|P_{H_i}\Delta y\Big\|_{L_q^\ell} \leqslant 0.$$

Проверим, что неравенство $(\mathcal{N}_i)$ выполняется и при $i = j+1$. Аналогично п. 1 получаем

$$\Big\|P_{H_{j+1}}\Delta y\Big\|_{L_q^\ell} \leqslant \|A\| \cdot \Big\|P_{H_{j+1}}\int_0^1 \Big|g'_x(\cdot, y_1 + \theta\Delta y, u)\Big| d\theta \cdot \Big|P_{H_{j+1}}\Delta y\Big|\Big\|_{L_p}$$

и по предположению индукции, $P_{H_j}\Delta y = 0$, откуда полагая $h = H_{j+1} \setminus H_j$, получаем

$$\Big\|P_h\Delta y\Big\|_{L_q^\ell} \leqslant \|A\| \cdot \Big\|P_h\int_0^1 \Big|g'_x(\cdot, y_1 + \theta\Delta y, u)\Big| d\theta \cdot \Big|P_h\Delta y\Big|\Big\|_{L_p} \leqslant \|A\| \cdot \Big\|P_h\gamma\Big\|_{L_\sigma}\Big\|P_h\Delta y\Big\|_{L_q^\ell},$$

и в силу (3.1) $\Big\|P_h\Delta y\Big\|_{L_q^\ell} \leqslant \dfrac{1}{2}\Big\|P_h\Delta y\Big\|_{L_q^\ell}$, то есть $\Big\|P_h\Delta y\Big\|_{L_q^\ell} \leqslant 0$.

3. По индукции делаем вывод, что имеет место $(\mathcal{N}_i)$ для всех $i = \overline{1,k}$. Стало быть,

$$\Big\|\Delta y\Big\|_{L_q^\ell} = \Big\|P_{H_k}\Delta y\Big\|_{L_q^\ell} = \Big\|\sum_{i=1}^{k} P_{H_i}\Delta y\Big\|_{L_q^\ell} \leqslant \sum_{i=1}^{k}\Big\|P_{H_i}\Delta y\Big\|_{L_q^\ell} \leqslant 0,$$

то есть $\Delta y = 0$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Определим на множестве Π функцию

$$\gamma(t) = \max\Big\{\Big|g'_x(t,x,u)\Big| \colon x \in \mathbb{R}^\ell, |x| \leqslant |y_v(t)| + \overline{x}(t), u \in \mathbb{R}^s, |u| \leqslant V(t)\Big\}.$$

Согласно лемме 3 и условиям на функцию g получаем, что функция $\gamma(\cdot)$ измерима на Π и, более того, $\gamma \in L_\sigma(\Pi)$. Определим далее число $\delta > 0$ такое, что для всякого $h \in \Sigma(\Pi)$, $\mathrm{mes}(h) < \delta$, выполняется неравенство: $\|A\| \cdot \|P_h\gamma\|_{L_\sigma} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Это возможно в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега. В соответствии с условиями на оператор A указанный оператор имеет вольтеррову δ-малую по мере цепочку множеств $\mathcal{T} = \{H_0, H_1, \ldots, H_k\}$. Поэтому в силу выбора δ справедливы неравенства (3.1). Зафиксируем произвольно $u \in \mathcal{V}$ и положим для краткости

$$F_u[y] = w + A\Big[g\Big(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)\Big)\Big] \colon L_q^\ell(\Pi) \to L_q^\ell(\Pi).$$

В соответствии с определением вольтерровости множеств H_i по отношению к оператору A имеем $P_{H_i}F_u = P_{H_i}F_uP_{H_i}$, $i = \overline{0,k}$, то есть указанные множества обладают свойством вольтерровости и по отношению к оператору F_u. Этот факт мы далее будем неоднократно использовать.

1. Рассмотрим локальный аналог уравнения (0.1):

$$y = P_{H_1}F_u[y], \quad y \in P_{H_1}L_q^\ell(\Pi). \tag{E_1}$$

Пользуясь принципом сжимающих отображений, докажем, что уравнение (E_1) имеет решение $y = z_1$ такое, что $\Big|z_1(t) - y_v(t)\Big| \leqslant \overline{x}(t)$ для п. в. $t \in H_1$.

Определим множество $Y_1 = \Big\{y \in P_{H_1}L_q^\ell(\Pi) \colon \Big|y(t) - y_v(t)\Big| \leqslant \overline{x}(t)$ для п. в. $t \in H_1\Big\}$. Непосредственно из леммы 5 получаем $P_{H_1}F_u \colon Y_1 \to Y_1$. При этом очевидно, что множество $Y_1 \neq \emptyset$, так как $P_{H_1}y_v \in Y_1$, и замкнуто. Проверим, что оператор $P_{H_1}F$ является сжимающим на множестве Y_1. Для этого выберем произвольно $y_1, y_2 \in Y_1$ и оценим:

$$\big\|P_{H_1}F_u[y_1] - P_{H_1}F_u[y_2]\big\|_{L_q^\ell} = \Big\|P_{H_1}A\big[g(\cdot,y_1,u) - g(\cdot,y_2,u)\big]\Big\|_{L_q^\ell} =$$

$$= \Big\|P_{H_1}AP_{H_1}\big[g(\cdot,y_1,u) - g(\cdot,y_2,u)\big]\Big\|_{L_q^\ell} \leqslant \|A\| \cdot \Big\|P_{H_1}\big|g(\cdot,y_1,u) - g(\cdot,y_2,u)\big|\Big\|_{L_p}.$$

Пользуясь условиями на функцию g, леммой Адамара и определением функции γ, получаем

$$\Big\|P_{H_1}F_u[y_1] - P_{H_1}F_u[y_2]\Big\|_{L_q^\ell} \leqslant \|A\| \cdot \Big\|P_{H_1}\gamma \cdot |\Delta y|\Big\|_{L_p} \leqslant \|A\| \cdot \|P_{H_1}\gamma\|_{L_\sigma}\|\Delta y\|_{L_q^\ell},$$

где $\Delta y = y_1 - y_2$, и в силу выбора δ имеем $\Big\|P_{H_1}F_u[y_1] - P_{H_1}F_u[y_2]\Big\|_{L_q^\ell} \leqslant \dfrac{1}{2}\|\Delta y\|_{L_q^\ell}$. Поэтому в соответствии с принципом сжимающих отображений уравнение (E_1) имеет решение $y = z_1 \in Y_1$.

2. Действуя по индукции, предположим, что для $i = \overline{1,j}$ уже доказано, что уравнение

$$y = P_{H_i}F_u[y], \quad y \in P_{H_i}L_q^\ell(\Pi), \tag{E_i}$$

имеет решение $y = z_i$ такое, что $\Big|z_i(t) - y_v(t)\Big| \leqslant \overline{x}(t)$ для п. в. $t \in H_i$. Докажем, что аналогичное утверждение справедливо и для $i = j + 1$. Определим оператор

$$\widehat{F}_{u,h}[y] = P_hF_u\Big[P_{H_j}z_j + P_hy\Big] \colon P_hL_q^\ell(\Pi) \to P_hL_q^\ell(\Pi),$$

где $h = H_{j+1} \setminus H_j$, и рассмотрим вспомогательное уравнение вида

$$y = \widehat{F}_{u,h}[y], \quad y \in P_hL_q^\ell(\Pi). \tag{$\widehat{E}_{j+1}$}$$

Воспользуемся принципом сжимающих отображений. Определим множество

$$Y_{j+1} = \Big\{ y \in P_h L_q^\ell(\Pi) \colon \Big| y(t) - y_v(t) \Big| \leqslant \overline{x}(t) \quad \text{для п. в.} \quad t \in h \Big\}.$$

Выберем произвольно $y \in Y_{j+1}$ и заметим, что $\widehat{F}_{u,h}[y] = P_h P_{H_{j+1}} F_u[z]$, где $z = P_{H_j} z_j + P_h y$, причем, согласно предположениям индукции и выбору $y \in Y_{j+1}$

$$P_{H_{j+1}} \Big| z - y_v \Big| = P_{H_j} \Big| z_j - y_v \Big| + P_h \Big| y - y_v \Big| \leqslant P_{H_j} \overline{x} + P_h \overline{x} = P_{H_{j+1}} \overline{x}.$$

Поэтому непосредственно из леммы 5 получаем

$$P_{H_{j+1}} \Big| \widehat{F}_{u,h}[y] - y_v \Big| \leqslant P_{H_{j+1}} \overline{x},$$

а следовательно, $P_h \Big| \widehat{F}_{u,h}[y] - y_v \Big| \leqslant P_h \overline{x}$, то есть $\widehat{F}_{u,h}[y] \in Y_{j+1}$. Стало быть, $\widehat{F}_{u,h} \colon Y_{j+1} \to Y_{j+1}$. При этом очевидно, что множество $Y_{j+1} \neq \emptyset$, так как $P_h y_v \in Y_{j+1}$, и замкнуто. Проверим, что оператор $\widehat{F}_{u,h}$ является сжимающим на Y_{j+1}. Для произвольно выбранных $y_1, y_2 \in Y_{j+1}$ оценим:

$$\Big\| \widehat{F}_{u,h}[y_1] - \widehat{F}_{u,h}[y_2] \Big\|_{L_q^\ell} = \Big\| P_h A \Big[g(\cdot, P_{H_j} z_j + P_h y_1, u) - g(\cdot, P_{H_j} z_j + P_h y_2, u) \Big] \Big\|_{L_q^\ell} =$$

$$= \Big\| P_h A (P_{H_j} + P_h) \Big[g(\cdot, P_{H_j} z_j + P_h y_1, u) - g(\cdot, P_{H_j} z_j + P_h y_2, u) \Big] \Big\|_{L_q^\ell} =$$

$$= \Big\| P_h A P_h \Big[g(\cdot, P_h y_1, u) - g(\cdot, P_h y_2, u) \Big] \Big\|_{L_q^\ell} \leqslant \|A\| \cdot \Big\| P_h [\ldots] \Big\|_{L_p^m}.$$

Пользуясь условиями на функцию g, леммой Адамара и определением функции γ, получаем

$$\Big\| \widehat{F}_{u,h}[y_1] - \widehat{F}_{u,h}[y_2] \Big\|_{L_q^\ell} \leqslant \|A\| \cdot \Big\| P_h \gamma \cdot |\Delta y| \Big\|_{L_p} \leqslant \|A\| \cdot \|P_h \gamma\|_{L_\sigma} \|\Delta y\|_{L_q^\ell},$$

где $\Delta y = y_1 - y_2$, и в силу выбора δ имеем $\Big\| \widehat{F}_{u,h}[y_1] - \widehat{F}_{u,h}[y_2] \Big\|_{L_q^\ell} \leqslant \dfrac{1}{2} \|\Delta y\|_{L_q^\ell}$. Таким образом, согласно принципу сжимающих отображений уравнение $(\widehat{E}_{j+1})$ имеет решение $y = \widehat{z}_{j+1} \in Y_{j+1}$. Непосредственной проверкой устанавливается, что $y = z_{j+1} \equiv z_j + \widehat{z}_{j+1}$ является решением уравнения (E_{j+1}). При этом, учитывая, что $P_{H_j} \Big| z_j - y_v \Big| \leqslant P_{H_j} \overline{x}$, $P_h \Big| \widehat{z}_{j+1} - y_v \Big| \leqslant P_h \overline{x}$, получаем

$$P_{H_{j+1}} \Big| z_{j+1} - y_v \Big| = P_{H_j} \Big| z_j - y_v \Big| + P_h \Big| \widehat{z}_{j+1} - y_v \Big| \leqslant P_{H_j} \overline{x} + P_h \overline{x} = P_{H_{j+1}} \overline{x}.$$

Поэтому все предположения индукции выполнены также и для $i = j + 1$.

3. По индукции делаем вывод, что уравнение (E_k), то есть само уравнение (0.1), имеет решение $y = z_k$, и для этого решения справедлива оценка $\Big| z_k - y_v \Big| \leqslant \overline{x}$. Согласно теореме 1 (единственности) $y = z_k$ — единственное решение уравнения (0.1). □

§ 4. Пример. Первая краевая задача для параболического уравнения

Пусть $T > 0$ — некоторое число, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область переменных $\overline{t} = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ с границей ∂Q, принадлежащей классу $\mathbf{C}^2$; $\Pi_T = (0, T) \times Q$ — заданный цилиндр в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $t = \{t_0, \overline{t}\}$; $S_T = (0; T) \times \partial Q$ — боковая поверхность цилиндра Π_T. Далее мы используем следующие функциональные пространства (см. [40, § 1.1]):

$L_{q,r}(\Pi_T)$, $q, r \geqslant 1$, — банахово пространство, состоящее из всех измеримых на Π_T функций с конечной нормой: $\|x\|_{L_{q,r}(\Pi_T)} = \Big\| \, \|x(t, \cdot)\|_{L_q(Q)} \Big\|_{L_r(0,T)}$;

$W_2^{1,0}(\Pi_T)$ — гильбертово пространство, состоящее из всех элементов $x \in L_2(\Pi_T)$, имеющих все обобщенные производные x'_{t_i}, $i \in \overline{1,n}$, суммируемые с квадратом на Π_T; норма $\|x\|_{W_2^{1,0}(\Pi_T)} \equiv \equiv \Big(\|x\|^2_{L_2(\Pi)} + \|\nabla_{\overline{t}} x\|^2_{L_2^n(\Pi)}\Big)^{\frac{1}{2}}$, где $\nabla_{\overline{t}} x = \{x'_{t_1}, \ldots, x'_{t_n}\}$;

$V_2(\Pi_T)$ — банахово пространство, состоящее из всех $x \in W_2^{1,0}(\Pi_T)$, имеющих конечную норму $\|x\|_{V_2(\Pi_T)} \equiv \operatorname*{vraisup}_{0\leqslant t_0\leqslant T} \|x(t_0,\cdot)\|_{L_2(Q)} + \|\nabla_{\overline{t}} x\|_{L_2^n(\Pi)}$;

$V_2^{1,0}(\Pi_T)$ — подпространство пространства $V_2(\Pi_T)$, состоящее из всех $x \in V_2(\Pi_T)$, имеющих на всех сечениях $Q_\tau \equiv \{t \in \Pi_T \colon t_0 = \tau\}$ цилиндра Π_T, $0 \leqslant \tau \leqslant T$, следы из $L_2(Q_\tau)$, непрерывно меняющиеся при изменении τ в норме $L_2(Q)$: $\Big\|x(\tau+\Delta\tau,\cdot) - x(\tau,\cdot)\Big\|_{L_2(Q)} \to 0$ при $\Delta\tau \to +0$; норма $\|x\|_{V_2^{1,0}(\Pi_T)} \equiv \max\limits_{0\leqslant t_0\leqslant T} \|x(t_0,\cdot)\|_{L_2(Q)} + \|\nabla_{\overline{t}} x\|_{L_2^n(\Pi_T)}$;

$\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(\Pi_T)$ — подпространство пространства $W_2^{1,0}(\Pi_T)$, плотное множество в котором образуют гладкие функции, равные нулю вблизи S_T;

$\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi_T) = V_2^{1,0}(\Pi_T) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(\Pi_T)$ — подпространство $V_2^{1,0}(\Pi_T)$, в котором плотное множество образуют гладкие функции, равные нулю вблизи S_T.

Рассмотрим управляемую распределенную систему, поведение которой описывается первой краевой задачей для параболического уравнения вида

$$\begin{cases} x'_{t_0} - L[x] = f\Big(t, x(t), u(t)\Big), & t = \{t_0, \overline{t}\} \in \Pi = \Pi_T, \\ x\Big|_{t_0=0} = x_0(\overline{t}), \quad \overline{t} \in Q; & x\Big|_{S_T} = 0, \end{cases}$$
$$L[x] = \sum_{i,j=1}^n \Big(a_{ij}(\overline{t}) x'_{t_i}\Big)'_{t_j} + \sum_{j=1}^n b_j(\overline{t}) x'_{t_j}, \tag{4.1}$$

где $x = x(t) = x(t_0, \overline{t})$ — неизвестная функция. Мы предполагаем здесь, что коэффициенты a_{ij} вместе с производными $(a_{ij})'_{t_j}$ и коэффициентами b_j для $1 \leqslant i,j \leqslant n$ принадлежат некоторому классу $\mathcal{H}^\alpha(\overline{Q})$ (см. [40]) и удовлетворяют условию равномерной эллиптичности: $\gamma_1|\xi|^2 \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(\overline{t})\xi_i\xi_j \leqslant \gamma_2|\xi|^2$, $\overline{t} \in \overline{Q}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Положим $q_n = \dfrac{2n}{n-2}$ в случае $n > 2$ и $q_n = +\infty$ при $n = 1, 2$. Выберем некоторое число $q_0 \in (2, q_n)$ и, соответственно, число $r_0 > 2$ такое, что

$$r_0^{-1} + n(2q_0)^{-1} = n/4.$$

При таком выборе справедливо [40, § 2.3, с. 89] непрерывное (то есть ограниченное) вложение $V_2(\Pi) \subset L_{q_0,r_0}(\Pi)$. Обозначим $q = \min\{q_0, r_0\}$. Тогда очевидно, что $q > 2$ и справедливо непрерывное вложение $L_{q_0,r_0}(\Pi) \subset L_{q,q}(\Pi) = L_q(\Pi)$. Таким образом,

$$V_2(\Pi) \subset L_q(\Pi) \subset L_2(\Pi). \tag{4.2}$$

Выбрав число $q > 2$, как указано, будем предполагать относительно функции $f(\cdot,\cdot,\cdot)$, что она удовлетворяет условиям $\mathbf{F}$ при $m = \ell = 1$, $p = 2$.

Чтобы определить понятие решения и установить свойства оператора обращения главной части задачи (4.1), рассмотрим далее вспомогательную задачу:

$$x'_{t_0} - L[x] = z(t),\ t = \{t_0, \overline{t}\} \in \Pi; \quad x\Big|_{t_0=0} = x_0(\overline{t}),\ \overline{t} \in Q;\ x\Big|_{S_T} = 0, \tag{4.3}$$

предполагая, что $z \in L_2(\Pi)$. Следуя [40, § 3.1, с. 161], решение задачи (4.3) будем понимать в указанном там обобщенном смысле и искать его, соответственно, в пространстве $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi)$. Очевидно, что всякое решение на цилиндре Π является решением и на его подмножестве Π_τ $\forall \tau \in [0;T]$, причем решение на Π_τ не зависит от значений функции $z(\cdot)$ вне множества Π_τ.

В соответствии с условиями, наложенными на функцию $f(\cdot,\cdot,\cdot)$, и установленным вложением (4.2) под обобщенным решением задачи (4.1) естественно понимать функцию $x(\cdot)$ из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi)$, которая является обобщенным решением задачи (4.3) при $z(\cdot) = f\Big(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)\Big)$.

Лемма 6 (см. [40, глава 3, теоремы 2.1, 4.2, 8.1]). *Каково бы ни было $n \geqslant 1$, задача (4.3) имеет при любых $x_0 \in L_2(Q)$ и $z \in L_2(\Pi)$ единственное в пространстве $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi)$ решение x. Более того, справедливо энергетическое неравенство $\|x\|_{V_2^{1,0}(\Pi)} \leqslant C \cdot \big(\|z\|_{L_2(\Pi)} + \|x_0\|_{L_2(Q)}\big)$, где постоянная C не зависит от z и x_0.*

Пусть $A[z]$ — решение задачи (4.3) при $x_0 = 0$, $\Theta[x_0]$ — решение задачи (4.3) при $z = 0$. Непосредственно из определения решения видно, что оба этих оператора линейны. Согласно лемме 6 A можно рассматривать как ЛОО $A\colon L_2(\Pi) \to V_2^{1,0}(\Pi) \subset V_2(\Pi) \subset L_q(\Pi)$ и, аналогично, Θ можно рассматривать как ЛОО $\Theta\colon L_2(Q) \to V_2^{1,0}(\Pi) \subset L_q(\Pi)$. Как уже было сказано выше, всякое решение (4.3) на цилиндре Π является решением и на его подмножестве Π_τ для всех $\tau \in [0;T]$, причем решение на Π_τ не зависит от значений функции $z(\cdot)$ вне множества Π_τ. Это означает, что по отношению к оператору A множества Π_τ являются вольтерровыми множествами при всех $\tau \in [0;T]$. Решение задачи (4.3) представляется в виде $x = \Theta[x_0] + A[z]$. Поэтому очевидно, что $x \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi)$ будет являться обобщенным решением задачи (4.1) в том, и только в том случае, когда x является решением функционально-операторного уравнения:

$$x = \Theta[x_0] + A\Big[f\big(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)\big)\Big], \quad x \in V_2^{1,0}(\Pi). \tag{4.4}$$

В силу условий, наложенных на функцию $f(\cdot,\cdot,\cdot)$, а также установленных свойств операторов Θ и A и вложения $V_2^{1,0}(\Pi) \subset L_q(\Pi)$ уравнение (4.4) эквивалентно уравнению

$$x = \Theta[x_0] + A\Big[f\big(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)\big)\Big], \quad x \in L_q(\Pi), \tag{4.5}$$

причем можем считать, что $\theta = \Theta[x_0] \in L_q(\Pi)$, а A рассматривается как ЛОО $A\colon L_2(\Pi) \to L_q(\Pi)$. Как уже было показано ранее, множества $\Pi_\tau \in \mathcal{B}(A)$ для всех $\tau \in [0;T]$. Исходя из этого, ясно, что для любого $\delta > 0$ существует вольтеррова δ-малая по мере цепочка множеств оператора A. В [41] уже было показано, что операторы $\Theta\colon L_2(Q) \to V_2^{1,0}(\Pi)$ и $A\colon L_2(\Pi) \to V_2^{1,0}(\Pi)$ являются положительными, а потому оператор A сам для себя является мажорантой: $B = A$. Таким образом, для уравнения (4.5) справедливы утверждения § 1. Пусть управлению $u = v$ отвечает решение $x = x_v$ задачи (4.1). Мажорантное уравнение можно записать в виде

$$x = A\big[bx^{q/p} + a_0 x + Z\big], \quad x \in L_q^+(\Pi); \quad Z(t) = \max_{u \in \mathbb{R}^s\colon |u| \leqslant V(t)} |\Delta_u f(x_v)|,$$

а его решение можно представить как решение начально-краевой задачи

$$x'_{t_0} - L[x] = bx^{q/p} + a_0 x + Z,\ t = \{t_0, \overline{t}\} \in \Pi; \quad x\Big|_{t_0 = 0} = 0,\ \overline{t} \in Q; \quad x\Big|_{S_T} = 0, \tag{4.6}$$

при условии его неотрицательности. При сделанных предположениях непосредственно из теоремы 2 получаем справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть управлению $u = v$ отвечает решение $x = x_v$ задачи (4.1) и параметры $a_0 \in L_\sigma(\Pi)$, $b \geqslant 0$ обеспечивают оценку*

$$\big|f'_x(\cdot, x_v + \theta\Delta x, u)\big| \leqslant a_0(\cdot) + b \cdot |\Delta x|^{q/\sigma} \quad \forall \theta \in [0;1],\ u \in \mathcal{V},\ \Delta x \in L_q(\Pi).$$

Предположим, что мажорантная задача (4.6) имеет неотрицательное решение $\overline{x}$. Тогда каждому управлению $u \in \mathcal{V}$ отвечает единственное решение $x = x_u$ задачи (4.1). Указанное решение удовлетворяет оценке $\Big|x_u(t) - x_v(t)\Big| \leqslant \overline{x}(t)$ для п. в. $t \in \Pi$.

Установление достаточных условий разрешимости мажорантной задачи (4.6) в такой общей ситуации — проблема многоплановая, поскольку предполагает рассмотрение отдельных подслучаев и требует объема отдельной статьи (а возможно, и не одной). Поэтому здесь мы примем далее более конкретные предположения. Чтобы пояснить основную идею применения леммы 2, рассмотрим наиболее простой случай: $n = 1$ или $n = 2$. Тогда можно считать, что $q = 4$ и, соответственно, $q/p = 2$. Кроме того, предположим, что дифференциальный оператор L допускает представление в дивергентной форме: $L[x] = \operatorname{div}\big(\mathcal{A}(\bar{t})\nabla_{\bar{t}}x\big)$, где $\mathcal{A}$ — матричная функция $\mathcal{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n} \in L_{\infty}^{n\times n}(Q)$, $\mathcal{A}(t)\xi\cdot\xi \geqslant \gamma_1|\xi|^2$ $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$, для п. в. $\bar{t}\in Q$. И наконец, будем предполагать, что a_0 и Z — существенно ограниченные функции. Для простоты будем считать, что $b = 1$, $a_0 \leqslant 2$, $Z \leqslant 1$ (на самом деле выбор констант не принципиален — нам достаточно неотрицательности правой части и возможности ее оценки через сумму квадрата фазовой переменной, взятого с положительным коэффициентом, и положительной константы).

При сделанных предположениях справедливо следующее утверждение. Смысл его в том, что для разрешимости мажорантной задачи достаточно, чтобы константа γ_1 была достаточно велика или $\operatorname{mes} Q$ была достаточно мала.

Теорема 4. *Пусть выполнено неравенство* $\gamma_3 - 6\gamma_5\sqrt{\gamma_4} \geqslant 0$ *при* $\gamma_3 = \sigma_P\gamma_1$, $\gamma_4 = \sqrt{\operatorname{mes} Q}$ *и (заведомо существующих) константах* σ_P, γ_5, *обеспечивающих оценки* $\|\nabla\omega\|_{L_2^n} \geqslant \sqrt{\sigma_P}\|\omega\|_{H^1}$ $\forall\omega\in H_0^1(Q)$, $\|\cdot\|_{L_4} \leqslant \gamma_5\|\cdot\|_{H^1}$. *Тогда задача* (4.6) *имеет неотрицательное решение.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 2. В качестве оценочной задачи (эквивалентной оценочному уравнению) можно взять следующую:

$$x'_{t_0} - L[x] = (x+1)^2,\ t = \{t_0,\bar{t}\}\in\Pi;\quad x\Big|_{t_0=0} = \psi(\bar{t}),\quad \bar{t}\in Q;\ x\Big|_{S_T} = 0, \tag{4.7}$$

где $\psi \in H_0^1(Q)$, $\psi \geqslant 0$, — пока произвольная функция. Соответствующее оценочное уравнение:

$$x = \widetilde{w} + A\big[(x+1)^2\big],$$

где $\widetilde{w} = \Theta[\psi] \geqslant 0$ (см. [41]). Поскольку правая часть уравнения (4.7) не зависит явно от переменной времени, можем искать стационарное (не зависящее от времени) решение. Таким образом, весь вопрос сводится к разрешимости следующей задачи Дирихле:

$$-L[y] = (y+1)^2,\quad \bar{t}\in Q;\quad y\Big|_{\partial Q} = 0. \tag{4.8}$$

Если окажется, что задача (4.8) имеет неотрицательное решение $y \in H_0^1(Q)$, то есть

$$G[y,\omega] - \int_Q (y+1)^2\omega(\bar{t})\,d\bar{t} = 0\quad \forall\omega\in H_0^1(Q);\quad G[y,\omega] = \int_Q \mathcal{A}\nabla y\cdot\nabla\omega\,d\bar{t},$$

то $x(\cdot,\bar{t}) = y(\bar{t})$ будет неотрицательным решением задачи (4.7) при $\psi = y$:

$$-\int_0^{\xi} dt_0 \int_Q x\varphi'_{t_0}\,d\bar{t} + \int_0^{\xi} dt_0 \left\{G[x(t_0,\cdot),\varphi(t_0,\cdot)] - \int_Q (x+1)^2\varphi(t_0,\bar{t})\,d\bar{t}\right\} + \int_Q x(\xi,\bar{t})\varphi(\xi,\bar{t})\,d\bar{t} -$$
$$-\int_Q \psi(\bar{t})\varphi(0,\bar{t})\,d\bar{t} = \int_Q d\bar{t}\int_0^{\xi} x'_{t_0}\varphi\,dt_0 + \int_0^{\xi} dt_0\left\{G[y,\varphi(t_0,\cdot)] - \int_Q (y+1)^2\varphi(t_0,\bar{t})\,d\bar{t}\right\} = 0$$

для всех $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\Pi)$ (см. [40, § 3.1, с. 161]). И тогда по лемме 2 можно сделать вывод о разрешимости мажорантной задачи. Собственно, неотрицательность решения (4.8) следует непосредственно из принципа максимума для такого уравнения.

Рассмотрим уравнение более общего вида:

$$-L[y] = \pi(\bar{t},y),\quad \bar{t}\in Q;\quad y\Big|_{\partial Q} = 0. \tag{4.9}$$

Здесь предполагается, что функция $\pi(\bar{t},\xi)$ измерима по $\bar{t}\in Q$, непрерывна по $\xi\in\mathbb{R}$ и с непрерывной, положительной, неубывающей функцией $g_1(\cdot)$ или константой g_1, а также с функцией $h_0 \in L_{\kappa}(Q)$ удовлетворяет оценке:

(1) $|\pi(\bar{t},\xi)| \leqslant g_1(|\xi|)h_0(\bar{t})$, если $n=1$, при $\kappa=1$;

(2) $|\pi(\bar{t},\xi)| \leqslant g_1 \cdot \big(h_0(\bar{t})+|\xi|^{\rho}\big)$, если $n>1$, при $\kappa = \dfrac{p_0}{p_0-1}$; для $n=2$: $\rho < p_0\left(1-\dfrac{1}{p_0}\right)$, $p_0 \in (1;+\infty)$; для $n>2$: $\rho < \dfrac{n+2}{n-2}$, $p_0 = \dfrac{2n}{n-2}$.

Определим оператор $F\colon \mathcal{H}\to\mathcal{H}^*$, $\mathcal{H}=H_0^1(Q)$, формулой

$$F(y)[\omega] = G[y,\omega] - \int_Q \pi(\bar{t},y)\omega(\bar{t})\,d\bar{t}, \quad y,\omega\in H_0^1(Q).$$

Решение задачи (4.9) понимается в смысле $F(y)[\omega]=0\ \forall\,\omega\in H_0^1(Q)$. Непосредственно из [42, с. 131, следствие 1.1] получаем, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть выполнены сделанные выше предположения, и, кроме того, при некотором $R>0$ имеем $F(\omega)[\omega]\geqslant 0$ для всех $\omega\in H_0^1(Q)$, $\|\omega\|_{H^1}=R$. Тогда существует по крайней мере одно решение $y\in H_0^1(Q)$ задачи (4.9) такое, что $\|y\|_{H^1}\leqslant R$.*

Очевидно, что функция $\pi(\bar{t},y)=(y+1)^2\leqslant 3(y^2+1)$ удовлетворяет сделанным выше предположениям. Остается проверить, что выполнено условие на оператор F из леммы 7. В силу известного неравенства Пуанкаре–Фридрихса $\|\omega\|_{L_2}\leqslant \sqrt[n]{\dfrac{\operatorname{mes} Q}{\beta_n}}\|\nabla\omega\|_{L_2^n}$ для всех $\omega\in H_0^1(Q)$, где $\beta_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$ — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует константа $\sigma_P>0$ такая, что $\|\nabla\omega\|_{L_2^n}\geqslant\sqrt{\sigma_P}\,\|\omega\|_{H^1}$ для всех $\omega\in H_0^1(Q)$. Как известно, с точностью до эквивалентной нормы $\|\omega\|_{H^1}=\|\omega\|_{L_2}+\|\nabla\omega\|_{L_2^n}$. В этом случае можно взять $\sqrt{\sigma_P}=\dfrac{\alpha_n}{1+\alpha_n}$, $\alpha_n=\sqrt[n]{\dfrac{\beta_n}{\operatorname{mes} Q}}$. Имеем $G[\omega,\omega]\geqslant\gamma_1\,\|\nabla\omega\|^2_{L_2^n}\geqslant\gamma_3\,\|\omega\|^2_{H^1}$ для всех $\omega\in H_0^1(Q)$, $\gamma_3=\sigma_P\gamma_1$. Пусть $\sqrt{\operatorname{mes} Q}=\gamma_4$. Для произвольного $\omega\in H_0^1(Q)$, $\|\omega\|_{H^1}=R$, оценим

$$F(\omega)[\omega]=G[\omega,\omega]-\int_Q(\omega+1)^2\omega\,d\bar{t}\geqslant\gamma_3R^2-3\int_Q(\omega^2+1)\omega\,d\bar{t}\geqslant\gamma_3R^2-3\|\omega\|_{L_2}\left\{\|\omega\|^2_{L_4}+\gamma_4\right\}.$$

По теореме вложения С. Л. Соболева, имеет место непрерывное вложение $H^1(Q)\subset L_4(Q)$. Следовательно, существует константа $\gamma_5>0$ такая, что $\|\cdot\|_{L_4}\leqslant\gamma_5\|\cdot\|_{H^1}$. И, очевидно, $\|\cdot\|_{L_2}\leqslant\|\cdot\|_{H^1}$. Таким образом, $F(\omega)[\omega]\geqslant R\big\{\gamma_3R-3\gamma_5^2R^2-3\gamma_4\big\}$, и для выполнения условия $F(\omega)[\omega]\geqslant 0$ достаточно, чтобы $3\gamma_5^2R^2-\gamma_3R+3\gamma_4\leqslant 0$. Это неравенство имеет положительное решение, если $\gamma_3^2-36\gamma_5^2\gamma_4\geqslant 0$, то есть $\gamma_3-6\gamma_5\sqrt{\gamma_4}\geqslant 0$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калантаров В.К., Ладыженская О.А. О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1977. Т. 69. С. 77–102.
2. Сумин В.И. Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21.
3. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Ч. 1. Вольтерровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 1992. 110 с.
4. Ikehata R. On solutions to some quasilinear hyperbolic equations with nonlinear inhomogeneous terms // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1991. Vol. 17. No. 2. P. 181–203. DOI: 10.1016/0362-546X(91)90221-L
5. Чернов А.В. О тотальном сохранении разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с неизотонным и немажорируемым оператором // Известия вузов. Математика. 2017. № 6. С. 83–94.
6. Tröltzsch F. Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2010. xv+399 p. DOI: 10.1090/gsm/112

7. Turo J. Global solvability of the mixed problem for first order functional partial differential equations // Ann. Polon. Math. 1991. Vol. 52. No. 3. P. 231–238. DOI: 10.4064/ap-52-3-231-238
8. Carasso C., Hassnaoui E.H. Mathematical analysis of the model arising in study of chemical reactions in a catalytic cracking reactor // Mathematical and Computer Modelling. 1993. Vol. 18. No. 2. P. 93–109. DOI: 10.1016/0895-7177(93)90010-V
9. Kobayashi T., Pecher H., Shibata Y. On a global in time existence theorem of smooth solutions to a nonlinear wave equation with viscosity // Mathematische Annalen. 1993. Vol. 296. Issue 1. P. 215–234. DOI: 10.1007/BF01445103
10. Biler P., Hilhorst D., Nadzieja T. Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles. II // Colloq. Math. 1994. Vol. 67. No. 2. P. 297–308. DOI: 10.4064/cm-67-2-297-308
11. Hu B., Yin H.-M. Global solutions and quenching to a class of quasilinear parabolic equations // Forum Math. 1994. Vol. 6. No. 6. P. 371–383. DOI: 10.1515/form.1994.6.371
12. Lu G. Global existence and blow-up for a class of semilinear parabolic systems: a Cauchy problem // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1995. Vol. 24. No. 8. P. 1193–1206. DOI: 10.1016/0362-546X(94)00190-S
13. Doppel K., Herfort W., Pflüger K. A nonlinear beam equation arising in the theory of elastic bodies // Z. Anal. Anwend. 1997. Vol. 16. No. 4. P. 945–960. DOI: 10.4171/ZAA/798
14. Yamazaki T. Scattering for a quasilinear hyperbolic equation of Kirchhoff type // J. Differential Equations. 1998. Vol. 143. No. 1. P. 1–59. DOI: 10.1006/jdeq.1997.3372
15. Nakamura M., Ozawa T. The Cauchy problem for nonlinear wave equations in the homogeneous Sobolev space // Annales de l'Institut Henri Poincaré. Physique Théorique. 1999. Vol. 71. No. 2. P. 199–215. http://www.numdam.org/item/AIHPA_1999__71_2_199_0/
16. Catalano F. The nonlinear Klein–Gordon equation with mass decreasing to zero // Advances in Differential Equations. 2002. Vol. 7. No. 9. P. 1025–1044. https://projecteuclid.org/euclid.ade/1367241458
17. Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Soriano J.A. On existence and asymptotic stability of solutions of the degenerate wave equation with nonlinear boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. 2003. Vol. 281. No. 1. P. 108–124. DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00558-9
18. Rozanova-Pierrat A. Qualitative analysis of the Khokhlov–Zabolotskaya–Kuznetsov (KZK) equation // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2008. Vol. 18. No. 5. P. 781–812. DOI: 10.1142/S0218202508002863
19. Zhao X. Self-similar solutions to a generalized Davey–Stewartson system // Mathematical and Computer Modelling. 2009. Vol. 50. Issues 9–10. P. 1394–1399. DOI: 10.1016/j.mcm.2009.04.023
20. Tersenov A. The Dirichlet problem for second order semilinear elliptic and parabolic equations // Differ. Equ. Appl. 2009. Vol. 1. No. 3. P. 393–411. DOI: 10.7153/dea-01-22
21. Guo C., Zhao X., Wei X. Cauchy problem for higher-order Schrödinger equations in anisotropic Sobolev space // Appl. Anal. 2009. Vol. 88. No. 9. P. 1329–1338. DOI: 10.1080/00036810903277127
22. Korpusov M.O., Ovchinnikov A.V., Sveshnikov A.G. On blow up of generalized Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2009. Vol. 71. No. 11. P. 5724–5732. DOI: 10.1016/j.na.2009.05.002
23. Blokhin A.M., Tkachev D.L. Asymptotic stability of the stationary solution for a new mathematical model of charge transport in semiconductors // Quarterly of Applied Mathematics. 2012. Vol. 70. No. 2. P. 357–382. DOI: 10.1090/S0033-569X-2012-01251-7
24. Kharibegashvili S., Jokhadze O. The Cauchy–Darboux problem for wave equations with a nonlinear dissipative term // Mem. Differ. Equ. Math. Phys. 2016. Vol. 69. P. 53–75.
25. Saito H. Global solvability of the Navier–Stokes equations with a free surface in the maximal L_p-L_q regularity class // Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 264. No. 3. P. 1475–1520. DOI: 10.1016/j.jde.2017.09.045
26. Сумин В.И. Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестник ННГУ. Математика. 2003. Вып. 1. С. 91–107.
27. Сумин В.И., Чернов А.В. Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем // Динамика систем и процессы управления: Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015. С. 293–300. https://elibrary.ru/item.asp?id=23795754

28. Чернов А.В. О тотально глобальной разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с варьируемым линейным оператором // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 230–243. DOI: 10.20537/vm150207
29. Чернов А.В. Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Известия вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.
30. Чернов А.В. О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Известия вузов. Математика. 2012. № 3. С. 62–73.
31. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
32. Чернов А.В. Мажорантный признак первого порядка тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна // Вестник Тамбовского государственного университета. Сер. Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1526–1529.
33. Сумин В.И. О функциональных вольтерровых уравнениях // Известия вузов. Математика. 1995. № 9. С. 67–77.
34. Сумин В.И. Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестник Нижегородского университета. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. Вып. 2 (19). С. 138–151.
35. Сумин В.И., Чернов А.В. О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. Вып. 1 (26). С. 39–49.
36. Чернов А.В. О поточечной оценке разности решений управляемого функционально-операторного уравнения в лебеговых пространствах // Матем. заметки. 2010. Т. 88. № 2. С. 288–302.
37. Чернов А.В. О тотальном сохранении глобальной разрешимости функционально-операторных уравнений // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2009. № 3. С. 130–137.
38. Мордухович Б.Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988. 360 с.
39. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 500 с.
40. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
41. Чернов А.В. О неотрицательности решения первой краевой задачи для параболического уравнения // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2012. № 5 (1). С. 167–170.
42. Скрыпник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990. 448 с.

Поступила в редакцию 23.05.2018

Чернов Андрей Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, Нижегородский государственный университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23;
Нижегородский государственный технический университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.
E-mail: chavnn@mail.ru

A. V. Chernov

Majorant sign of the first order for totally global solvability of a controlled functional operator equation

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 4, pp. 531–548 (in Russian).

Keywords: functional operator equation of the Hammerstein type, totally global solvability, majorant equation, Volterra property.

MSC2010: 47J05, 47J35, 47N10

DOI: 10.20537/vm180407

We consider a nonlinear functional operator equation of the Hammerstein type which is a convenient form of representation for a wide class of controlled distributed parameter systems. For the equation under study we prove a solution uniqueness theorem and a majorant sign for the totally (with respect to a whole set of admissible controls) global solvability subject to Volterra property of the operator component and differentiability with respect to a state variable of the functional component in the right hand side. Moreover, we use hypotheses on the global solvability of the original equation for a fixed admissible control $u = v$ and on the global solvability for some majorant equation with the right hand side depending on maximal deviation of admissible controls from the control v. For example we consider the first boundary value problem associated with a parabolic equation of the second order with right hand side $f\big(t, x(t), u(t)\big)$, $t = \{t_0, \bar{t}\} \in \Pi = (0, T) \times Q$, $Q \subset \mathbb{R}^n$, where x is a phase variable, u is a control variable. Here, a solution to majorant equation can be represented as a solution to the zero initial–boundary value problem of the same type for analogous equation with the right hand side $bx^{q/2} + a_0 x + Z$, where $Z(t) = \max\limits_{u \in \mathcal{V}(t)} |f(t, x[v](t), u) - f(t, x[v](t), v(t))|$, $\mathcal{V}(t) \subset \mathbb{R}^s$ is a set of admissible values for control at $t \in \Pi$, $q > 2$, $s \in \mathbb{N}$; $a_0(.)$ and $b \geqslant 0$ are parameters defined from f'_x.

REFERENCES

1. Kalantarov V.K., Ladyzhenskaya O.A. The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types, *Journal of Soviet Mathematics*, 1978, vol. 10, issue 1, pp. 53–70. DOI: 10.1007/BF01109723
2. Sumin V.I. The features of gradient methods for distributed optimal control problems, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1990, vol. 30, no. 1, pp. 1–15. DOI: 10.1016/0041-5553(90)90002-A
3. Sumin V.I. *Funktsional'nye vol'terrovy uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami. Chast' 1. Vol'terrovy uravneniya i upravlyaemye nachal'no-kraevye zadachi* (Functional Volterra equations in the theory of optimal control of distributed systems. Part 1. Volterra equations and controlled initial boundary value problems), Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University, 1992, 110 p.
4. Ikehata R. On solutions to some quasilinear hyperbolic equations with nonlinear inhomogeneous terms, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1991, vol. 17, no. 2, pp. 181–203. DOI: 10.1016/0362-546X(91)90221-L
5. Chernov A.V. On total preservation of solvability of controlled Hammerstein-type equation with non-isotone and non-majorizable operator, *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, no. 6, pp. 72–81. DOI: 10.3103/S1066369X1706010X
6. Tröltzsch F. *Optimal control of partial differential equations: theory, methods and applications*, Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2010, xv+399 p. DOI: 10.1090/gsm/112
7. Turo J. Global solvability of the mixed problem for first order functional partial differential equations, *Ann. Polon. Math.*, 1991, vol. 52, no. 3, pp. 231–238. DOI: 10.4064/ap-52-3-231-238
8. Carasso C., Hassnaoui E.H. Mathematical analysis of the model arising in study of chemical reactions in a catalytic cracking reactor, *Mathematical and Computer Modelling*, 1993, vol. 18, no. 2, pp. 93–109. DOI: 10.1016/0895-7177(93)90010-V
9. Kobayashi T., Pecher H., Shibata Y. On a global in time existence theorem of smooth solutions to a nonlinear wave equation with viscosity, *Mathematische Annalen*, 1993, vol. 296, issue 1, pp. 215–234. DOI: 10.1007/BF01445103
10. Biler P., Hilhorst D., Nadzieja T. Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles. II, *Colloq. Math.*, 1994, vol. 67, no. 2, pp. 297–308. DOI: 10.4064/cm-67-2-297-308
11. Hu B., Yin H.-M. Global solutions and quenching to a class of quasilinear parabolic equations, *Forum Math.*, 1994, vol. 6, no. 6, pp. 371–383. DOI: 10.1515/form.1994.6.371
12. Lu G. Global existence and blow-up for a class of semilinear parabolic systems: a Cauchy problem, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1995, vol. 24, no. 8, pp. 1193–1206. DOI: 10.1016/0362-546X(94)00190-S
13. Doppel K., Herfort W., Pflüger K. A nonlinear beam equation arising in the theory of elastic bodies, *Z. Anal. Anwend.*, 1997, vol. 16, no. 4, pp. 945–960. DOI: 10.4171/ZAA/798
14. Yamazaki T. Scattering for a quasilinear hyperbolic equation of Kirchhoff type, *J. Differential Equations*, 1998, vol. 143, no. 1, pp. 1–59. DOI: 10.1006/jdeq.1997.3372
15. Nakamura M., Ozawa T. The Cauchy problem for nonlinear wave equations in the homogeneous Sobolev space, *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Physique Théorique*, 1999, vol. 71, no. 2, pp. 199–215. http://www.numdam.org/item/AIHPA_1999__71_2_199_0/

16. Catalano F. The nonlinear Klein–Gordon equation with mass decreasing to zero, *Advances in Differential Equations*, 2002, vol. 7, no. 9, pp. 1025–1044. https://projecteuclid.org/euclid.ade/1367241458
17. Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Soriano J.A. On existence and asymptotic stability of solutions of the degenerate wave equation with nonlinear boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, vol. 281, no. 1, pp. 108–124. DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00558-9
18. Rozanova-Pierrat A. Qualitative analysis of the Khokhlov–Zabolotskaya–Kuznetsov (KZK) equation, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2008, vol. 18, no. 5, pp. 781–812. DOI: 10.1142/S0218202508002863
19. Zhao X. Self-similar solutions to a generalized Davey–Stewartson system, *Mathematical and Computer Modelling*, 2009, vol. 50, issues 9–10, pp. 1394–1399. DOI: 10.1016/j.mcm.2009.04.023
20. Tersenov A. The Dirichlet problem for second order semilinear elliptic and parabolic equations, *Differ. Equ. Appl.*, 2009, vol. 1, no. 3, pp. 393–411. DOI: 10.7153/dea-01-22
21. Guo C., Zhao X., Wei X. Cauchy problem for higher-order Schrödinger equations in anisotropic Sobolev space, *Appl. Anal.*, 2009, vol. 88, no. 9, pp. 1329–1338. DOI: 10.1080/00036810903277127
22. Korpusov M.O., Ovchinnikov A.V., Sveshnikov A.G. On blow up of generalized Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2009, vol. 71, no. 11, pp. 5724–5732. DOI: 10.1016/j.na.2009.05.002
23. Blokhin A.M., Tkachev D.L. Asymptotic stability of the stationary solution for a new mathematical model of charge transport in semiconductors, *Quarterly of Applied Mathematics*, 2012, vol. 70, no. 2, pp. 357–382. DOI: 10.1090/S0033-569X-2012-01251-7
24. Kharibegashvili S., Jokhadze O. The Cauchy–Darboux problem for wave equations with a nonlinear dissipative term, *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.*, 2016, vol. 69, pp. 53–75.
25. Saito H. Global solvability of the Navier–Stokes equations with a free surface in the maximal L_p-L_q regularity class, *Journal of Differential Equations*, 2018, vol. 264, no. 3, pp. 1475–1520. DOI: 10.1016/j.jde.2017.09.045
26. Sumin V.I. Stability problem for the existence of global solutions to boundary value control problems and Volterra functional equations, *Vestn. Nizhegorod. Univ. N.I. Lobachevskogo. Mat.*, 2003, no. 1, pp. 91–107 (in Russian).
27. Sumin V.I., Chernov A.V. Volterra functional operator equations in the theory of distributed systems optimization, *Dinamika sistem i protsessy upravleniya: Trudy Mezhdunarodnoi konferentsii* (System dynamic and control processes: Proceedings of International Conference Dedicated to the 90th Anniversary of Academician N. N. Krasovskii), Ekaterinburg: Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2015, pp. 293–300 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=23795754
28. Chernov A.V. On the totally global solvability of a controlled Hammerstein type equation with a varied linear operator, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2015, vol. 25, issue 2, pp. 230–243 (in Russian). DOI: 10.20537/vm150207
29. Chernov A.V. A majorant criterion for the total preservation of global solvability of controlled functional operator equation, *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, no. 3, pp. 85–95. DOI: 10.3103/S1066369X11030108
30. Chernov A.V. A majorant-minorant criterion for the total preservation of global solvability of a functional operator equation, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 3, pp. 55–65. DOI: 10.3103/S1066369X12030085
31. Hartman Ph. *Ordinary differential equations*, New York: John Wiley & Sons, 1964, xiv+612 p.
32. Chernov A.V. A majorant criterion of the first order for the total preservation of global solvability of a controlled Hammerstein type equation, *Vestn. Tambov. Univ. Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2015, vol. 20, issue 5, pp. 1526–1529 (in Russian).
33. Sumin V.I. On functional Volterra equations, *Russian Mathematics*, 1995, vol. 39, no. 9, pp. 65–75.
34. Sumin V.I. Controlled functional Volterra equations in Lebesgue spaces, *Vestn. Nizhegorod. Univ. N. I. Lobachevskogo. Mat. Model. Optim. Upr.*, 1998, no. 2 (19), pp. 138–151 (in Russian).
35. Sumin V.I., Chernov A.V. On sufficient conditions of existence stability of global solutions of Volterra operator equations, *Vestn. Nizhegorod. Univ. N. I. Lobachevskogo. Mat. Model. Optim. Upr.*, 2003, no. 1 (26), pp. 39–49 (in Russian).
36. Chernov A.V. Pointwise estimation of the difference of the solutions of a controlled functional operator equation in Lebesgue spaces, *Mathematical Notes*, 2010, vol. 88, no. 2, pp. 262–274. DOI: 10.1134/S0001434610070242
37. Chernov A.V. On total preservation of global solvability of functional operator equations, *Vestn. Nizhegorod. Univ. N. I. Lobachevskogo*, 2009, no. 3, pp. 130–137 (in Russian).
38. Mordukhovich B.Sh. *Metody approksimatsii v zadachakh optimizatsii i upravleniya* (Approximation meth-

ods in problems of optimization and control), Moscow: Nauka, 1988, 360 p.
39. Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskii P.E. *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsii* (Integral operators in spaces of summable functions), Moscow: Nauka, 1966, 500 p.
40. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa* (Linear and quasilinear equations of parabolic type), Moscow: Nauka, 1967, 736 p.
41. Chernov A.V. On nonnegativity of the solution to the first boundary value problem for a parabolic equation, *Vestn. Nizhegorod. Univ. N. I. Lobachevskogo*, 2012, no. 5 (1), pp. 167–170 (in Russian).
42. Skrypnik I.V. *Metody issledovaniya nelineinykh ellipticheskikh granichnykh zadach* (Methods for the investigation of nonlinear elliptic boundary value problems), Moscow: Nauka, 1990, 448 p.

Received 23.05.2018

Chernov Andrei Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia;
Nizhni Novgorod State Technical University, ul. Minina, 24, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: chavnn@mail.ru