УДК 517.977.58

© *В. Н. Ушаков, А. А. Ершов, Г. В. Паршиков*

О ПРИВЕДЕНИИ ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ НА МНОЖЕСТВО ЛЕБЕГА ЛИПШИЦЕВОЙ ФУНКЦИИ

Рассматривается нелинейная управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве, заданная на конечном промежутке времени. Изучается одна из основных задач математической теории управления — задача о сближении фазового вектора управляемой системы с компактным целевым множеством в фазовом пространстве в фиксированный момент времени. В этой работе в качестве целевого множества выбрано множество Лебега скалярной липшицевой функции, определенной на фазовом пространстве. Упомянутая задача о сближении тесно связана с многими важными и ключевыми задачами теории управления, в частности с задачей об оптимальном по быстродействию приведении управляемой системы на целевое множество. Из-за сложности задачи о сближении для нетривиальных управляемых систем аналитическое представление решений невозможно даже для относительно простых управляемых систем. Поэтому в настоящей работе мы изучаем прежде всего вопросы, связанные с конструированием приближенного решения задачи о сближении. Конструирование приближенного решения тем методом, который изложен в работе, связано прежде всего с конструированием интегральной воронки управляемой системы, представленной в так называемом «обратном» времени. К настоящему времени известно несколько алгоритмов конструирования разрешающего программного управления в задаче о сближении. Здесь представлен алгоритм построения управления, основанный на максимальном притяжении движения системы к множеству разрешимости задачи о сближении. В работе приведены примеры.

Ключевые слова: управляемая система, множество Лебега, множество разрешимости, оптимальное управление.

DOI: 10.20537/vm180405

Рассматривается нелинейная управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве и на конечном промежутке времени. Изучается задача о сближении управляемой системы [1, 2] с множеством Лебега некоторой скалярной функции. Обсуждаются вопросы, относящиеся к приближенному приведению фазового вектора системы на множество Лебега, получены оценки точности сеточной аппроксимации множества Лебега липшицевой функции в хаусдорфовой метрике. В основе представленного в работе подхода, обеспечивающего приближенное решение с достаточной степенью точности, лежит принцип максимального притяжения движения системы к множеству разрешимости W [3, 4], согласно которому выбор управления должен приводить движение системы с достаточной степенью близости к W. Множество разрешимости W вычисляется как интегральная воронка Z исходной управляемой системы, записанной в обратном времени. Множество W удобнее всего конструировать приближенно как некоторую аппроксимацию интегральной воронки Z, начинающейся в выбранном нами множестве Лебега.

В настоящей работе приведено подробное описание процедуры построения разрешающего программного управления. Приведены примеры, иллюстрирующие работу алгоритмов. В первом примере рассматривается механическая система, состоящая из движущейся платформы и закрепленного на ней эксцентрика, вращение которого создает управляющую силу. Во втором примере рассмотрено твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки. Три момента, приложенные вокруг главных осей, рассматриваются как компоненты вектора управления. Работа примыкает к исследованиям [5–10].

§ 1. Задача о сближении управляемой системы с множеством Лебега скалярной функции

На промежутке $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$, задана управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u); \tag{1.1}$$

здесь t — время, $x \in \mathbb{R}^m$ — фазовый вектор системы, u — вектор управляющих воздействий, $u \in P \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^p)$ — метрическое пространство с хаусдорфовой метрикой, элементы которого — компакты в $\mathbb{R}^p$ — p-мерном евклидовом пространстве.

Предполагается, что выполнены условия.

A. Вектор-функция $f(t, x, u)$ определена и непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P$, и для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ найдется такая постоянная $L = L(D) \in (0, \infty)$, что

$$||f(t, x^{(1)}, u) - f(t, x^{(2)}, u)|| \leqslant L||x^{(1)} - x^{(2)}||,$$

$$(t, x^{(i)}, u) \in D \times P, \quad i = 1, 2;$$

здесь $||f||$ — норма вектора f в евклидовом пространстве.

B. Существует такая постоянная $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$||f(t, x, u)|| \leqslant \gamma(1 + ||x||), \quad (t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P. \tag{1.2}$$

Принимая во внимание условие **A**, получаем, что для любой области D из этого условия функция

$$\omega^*(\rho) = \max\{||f(t_*, x, u) - f(t^*, x, u)||\colon |t_* - t^*| \leqslant \rho,$$
$$(t_*, x, u) \text{ и } (t^*, x, u) \text{ из } D \times P\}, \quad \rho > 0,$$

удовлетворяет соотношению $\omega^*(\rho) \downarrow 0$, $\rho \downarrow 0$ и неравенству

$$d(F(t_*, x_*), F(t^*, x^*)) \leqslant \omega^*(\rho) + L||x_* - x^*||, \quad (t_*, x_*) \text{ и } (t^*, x^*) \text{ из } D, \quad |t_* - t^*| \leqslant \rho;$$

здесь $F(t, x) = \mathrm{co}\, \mathscr{F}(t, x)$, $\mathscr{F}(t, x) = \{f(t, x, u)\colon u \in P\}$, $(t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P$; $d(F_*, F^*)$ — хаусдорфово расстояние между F_* и F^* из $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$.

Введем некоторые определения и обозначения.

Под допустимым управлением $u(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ в системе (1.1) понимаем измеримую по Лебегу на $[t_0\vartheta]$ вектор-функцию $u(t) \in P$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Полагаем

$X(t^*, t_*, x_*)$ ($x_* \in \mathbb{R}^m$, $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$) — множество достижимости (м. д.) в $\mathbb{R}^m$ системы (1.1), отвечающее моменту t^* и начальному условию $x(t_*) = x_*$;

$X(t^*, t_*, X_*) = \bigcup\limits_{x_* \in X_*} X(t^*, t_*, x_*)$, где $X_* \subset \mathbb{R}^m$;

$X(t_*, x_*) = \bigcup\limits_{t^* \in [t_*, \vartheta]} (t^*, X(t^*, t_*, x_*))$ — интегральная воронка системы (1.1) с исходной позицией $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$;

$X(t_*, X_*) = \bigcup\limits_{x^* \in X^*} X(t_*, x_*)$ ($X_* \subset \mathbb{R}^m$) — интегральная воронка системы (1.1) с исходным множеством (t_*, X_*); здесь $(t_*, X_*) = \{(t_*, x_*) : x_* \in X_*\}$.

При условиях **A** и **B** множество $\mathrm{cl}\, X(t^*, t_*, x_*)$ совпадает с множеством $Y(t^*, t_*, x_*)$ дифференциального включения (д. в.)

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x), \quad x(t_*) = x_*, \tag{1.3}$$

являющимся элементом $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, а множество $\mathrm{cl}\, X(t^*, t_*, X_*)$ совпадает с множеством достижимости $Y(t^*, t_*, X_*)$ ($X_* \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$) д.в. (1.2); здесь $\mathrm{cl}\, X$ — замыкание множества X.

Также справедливо соотношение

$$Y(t_*, X_*) = \mathrm{cl}\, X(t_*, X_*), \quad X_* \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m);$$

здесь $Y(t_*, X_*) = \bigcup\limits_{t^* \in [t_*, \vartheta]} (t^*, Y(t^*, t_*, X_*))$.

Полагаем, что наряду с системой (1.1) задана скалярная функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющая условию локальной липшицевости по x: для любой ограниченной и замкнутой области $D_* \subset \mathbb{R}^m$ найдется постоянная $L_* = L_*(D_*) \in (0, \infty)$ такая, что

$$|\varphi(x_*) - \varphi(x^*)| \leqslant L_* ||x_* - x^*||, \quad x_* \text{ и } x^* \text{ из } D_*.$$

Пусть выбрано такое $\gamma \in \mathbb{R}^1$, что

$$M(\gamma) = L_\varphi(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^m : \varphi(x) \leqslant \gamma\} \neq \varnothing$$

и удовлетворяет включению $M(\gamma) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$.

Будем трактовать $M(\gamma)$ как целевое множество для системы (1.1) в следующей задаче о сближении.

Задача 1. Требуется выделить в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ множество W всех тех исходных позиций (t_*, x_*) системы (1.1), для каждой из которых существует допустимое управление $u(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, переводящее систему (1.1) в момент ϑ в множество $M(\gamma)$ (то есть $x(\vartheta) \in M(\gamma)$).

Множество W, следуя [1], называем множеством разрешимости задачи 1.

Задача 2. Пусть $(t_0, x^{(0)}) \in W$. Требуется выделить допустимое управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, которому отвечает движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x^{(0)}$ системы (1.1), удовлетворяющее включению $x^*(\vartheta) \in M(\gamma)$.

Не имея возможности выделить, как правило, точно W, будем обсуждать вопрос о том, как конструировать W приближенно. При этом будем конструировать управление $u^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, как управление, приводящее движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x^{(0)}$ системы (1.1) в некоторую достаточно малую окрестность множества $M(\gamma)$.

В связи с решением задач 1 и 2 введем «обратное» время $\tau = t_0 + \vartheta - t$, $t \in [t_0, \vartheta]$, и сопоставим системе (1.1) управляемую систему, отвечающую времени τ:

$$\frac{dz}{d\tau} = h(\tau, z, v), \quad \tau \in [t_0, \vartheta], \tag{1.4}$$

и дифференциальному включению (1.3) — дифференциальное включение

$$\frac{dz}{d\tau} \in H(\tau, z) = \mathrm{co}\, \mathscr{H}(\tau, z), \quad z(\tau_*) = z_*, \quad (\tau_*, z_*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m; \tag{1.5}$$

здесь обозначено $h(\tau, z, v) = -f(t_0 + \vartheta - \tau, z, v)$, $\mathscr{H}(\tau, z) = \{h(\tau, z, v) \colon v \in P\}$, $(\tau, z, v) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P$.

Символами $Z(\tau_*, z_*)$ и $\widehat{Z}(\tau_*, z_*)$ обозначим множества в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ — соответственно интегральные воронки системы (1.4) и д. в. (1.5) с исходной позицией (τ_*, z_*) и символами $Z(\tau_*, Z_*)$ и $\widehat{Z}(\tau_*, Z_*)$ — интегральные воронки системы (1.4) и д. в. (1.5) с исходным множеством (τ_*, Z_*) в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$.

Справедливы равенства $\widehat{Z}(\tau_*, z_*) = \mathrm{cl}\, Z(\tau_*, z_*)$ и $\widehat{Z}(\tau_*, Z_*) = \mathrm{cl}\, Z(\tau_*, Z_*)$ при любых (τ_*, z_*) и (τ_*, Z_*) из $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, $Z_* \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$.

При введенных выше определениях получаем, что множества $Z = Z(t_0, M(\gamma))$ и $\widehat{Z} = \widehat{Z}(t_0, M(\gamma))$ есть интегральные воронки соответственно системы (1.4) и д. в. (1.5) с исходным множеством $(t_0, M(\gamma))$.

Введем также в рассмотрение множества W и $\widehat{W}$ в $[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$, определив их через Z и $\widehat{Z}$. А именно, зададим сечения $W(t)=\{w\in\mathbb{R}^m\colon (t,w)\in W\}$ и $\widehat{W}(t)=\{w\in\mathbb{R}^m\colon (t,w)\in\widehat{W}\}$ множеств W и $\widehat{W}$ равенствами

$$W(t)=Z(\tau) \text{ и } \widehat{W}(t)=\widehat{Z}(\tau),\quad t+\tau=t_0+\vartheta,\quad \tau\in[t_0,\vartheta],$$

здесь $Z(\tau)=\{z\in\mathbb{R}^m\colon (\tau,z)\in Z\}$ и $\widehat{Z}(\tau)=\{z\in\mathbb{R}^m\colon (\tau,z)\in\widehat{Z}\}$.

Из определения множества W вытекает, что W есть множество разрешимости в задаче 1, то есть совокупность всех тех исходных позиций $(t_*,x_*)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$, из которых разрешима эта задача.

Условия **A** и **B**, наложенные на систему (1.1), и предположение о компактности множества $M(\gamma)$ влекут за собой тот факт, что множества Z и W, $\widehat{Z}$ и $\widehat{W}$ содержатся в некоторой достаточно большой ограниченной и замкнутой цилиндрической области

$$D=\{(\tau,z)\colon (\tau,z)\in[t_0,\vartheta]\times D_*\}=\{(t,x)\colon (t,x)\in[t_0,\vartheta]\times D_*\},$$

где $D_*\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$.

Не нарушая общности рассуждений, считаем, что все наши конструкции, предназначенные для решения задачи и возникающие в процессе конструирования решения, содержатся в этой области $D=[t_0,\vartheta]\times D_*$. Именно эту область D и связанные с ней величины мы имеем в виду в последующих рассуждениях. В частности, ниже в выкладках будем употреблять постоянную $K=\max\{||f(t,x,u)||\colon (t,x,u)\in D\times P\}=\max\{||h(\tau,z,v)||\colon (\tau,z,v)\in D\times P\}<+\infty$.

При решении задачи 1 будем ориентироваться на приближенное конструирование множества $\widehat{W}=\mathrm{cl}\,W$, близкого к W. Приближенное конструирование множества $\widehat{W}$ мы сведем к приближенному конструированию интегральной воронки $\widehat{Z}$ д. в. (1.5).

Будем конструировать некоторую аппроксимацию $\widehat{\mathscr{Z}}^a\subset D$ интегральной воронки (1.5) как *конечное* множество в D. Конструирование множества $\widehat{\mathscr{Z}}^a$ будем осуществлять последовательно по шагам $[\tau_i,\tau_{i+1}]$ некоторого разбиения Γ промежутка $[t_0,\vartheta]$, начиная с начального (по времени) сечения $\widehat{\mathscr{Z}}^a(t_0)$ — некоторого конечного множества, входящего в $\widehat{Z}(t_0)=M(\gamma)$.

Последующие временные сечения $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)$, $\tau_i\in\Gamma$, множества $\widehat{\mathscr{Z}}^a$ будут формироваться исходя из начального сечения $\widehat{\mathscr{Z}}^a(t_0)$, и в этом смысле зависят от $\widehat{\mathscr{Z}}^a(t_0)$.

$\widehat{\mathscr{Z}}^a(t_0)$ будем формировать как конечное точечное множество в $\mathbb{R}^m$ — множество, состоящее из конечного числа точек, лежащих в узлах сетки. Очевидно, что множество $\widehat{\mathscr{Z}}^a(t_0)$, входящее в $\widehat{Z}(t_0)$, не будет удовлетворять равенству $\widehat{\mathscr{Z}}^a(t_0)=\widehat{Z}(t_0)=M(\gamma)$, и поэтому сеточное множество $\widehat{\mathscr{Z}}^a$ будет отличаться от $\widehat{Z}$ и, возможно, весьма существенно. Возникает вопрос о том, сколь значительным будет при этом рассогласование между $\widehat{\mathscr{Z}}^a$ и $\widehat{Z}$. Для ответа на этот вопрос необходимо выяснить, насколько сеточное множество $\widehat{\mathscr{Z}}^a(t_0)$ $(\widehat{\mathscr{Z}}^a(t_0)\subset\widehat{Z}(t_0))$, отвечающее заданному параметру сетки в $\mathbb{R}^m$, отличается от множества Лебега $L_\varphi(\gamma)=M(\gamma)$ функции $\varphi(x)$. Ответу на этот вопрос посвящен следующий параграф.

§ 2. Об оценке рассогласования множества Лебега $L_\varphi(\gamma)=M(\gamma)$ и его сеточной аппроксимации $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)$

В предыдущем параграфе была введена скалярная локально липшицева функция $\varphi\colon\mathbb{R}^m\mapsto\mathbb{R}^1$, с постоянной $L_*=L_*(D_*)\in(0,\infty)$, отвечающей этой области D_*.

Предполагаем также, что выбрано некоторое $\gamma\in\mathbb{R}^1$, множество Лебега $L_\varphi(\gamma)\neq\varnothing$ и удовлетворяет включению $L_\varphi(\gamma)\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$.

Введем в пространстве $\mathbb{R}^m$ кубическую сетку $S^{(\delta)}=\{x=(x_1,\ldots,x_m)\colon x_k=j_k\delta, j_k\in\mathbb{Z}, k=\overline{1,m}\}$, где δ — длина ребра куба сетки $S^{(\delta)}$ — шаг сетки $S^{(\delta)}$.

Определение 2.1. *Сеточной аппроксимацией* $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)$ множества Лебега $L_\varphi(\gamma)$ на сетке $S^{(\delta)}$ назовем множество

$$L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)=\{x\in S^{(\delta)}\colon \varphi(x)\leqslant\gamma\}\subset\mathbb{R}^m.$$

Возникает естественная задача оценки сверху хаусдорфова расстояния $d(L_\varphi(\gamma), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma))$ в зависимости от шага δ сетки $S^{(\delta)}$.

Сформулируем некоторые утверждения, относящиеся к выводу этой оценки.

Теорема 2.1. *Пусть функция* $\varphi\colon \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^1$ *с постоянной Липшица* $L_* = L_*(D_*)$ *такова, что* $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma) \neq \varnothing$, $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c)$ *ограничено и* $c \geqslant L_*\delta\sqrt{m}$. *Тогда*

$$h(L_\varphi(\gamma), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c)) \leqslant \frac{\delta\sqrt{m}}{2}, \tag{2.1}$$

$$h(L_\varphi(\gamma), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)) \leqslant h(L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)) + \frac{\delta\sqrt{m}}{2}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Любая точка $x \in L_\varphi(\gamma)$ принадлежит некоторому m-мерному кубу $\mathbb{U}$ из сетки $S^{(\delta)}$, все вершины которого принадлежат множеству $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c)$.

Действительно, предположим противное: существует некоторая точка $x \in L_\varphi(\gamma) \cap \mathbb{U}$ такая, что одна из вершин куба $\mathbb{U}$ — точка y — не содержится в $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c)$.

Тогда имеют место неравенства

$$||x - y|| \leqslant \delta\sqrt{m}, \quad \varphi(y) > \gamma + c \geqslant \varphi(x) + c.$$

Следовательно,

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| > c \geqslant L_*\delta\sqrt{m} \geqslant L_*||x - y||.$$

Мы пришли к противоречию с тем, что L_* — постоянная Липшица для $\varphi(x)$ в области D_*.

Из доказанного утверждения следует оценка (2.1).

Учитывая $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma) \subset L_\varphi(\gamma)$ и оценку (2.1), получаем цепочку неравенств:

$$d(L_\varphi(\gamma), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)) = h(L_\varphi(\gamma), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)) \leqslant h(L_\varphi(\gamma), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c)) + h(L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)) \leqslant$$
$$\leqslant h(L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)) + \frac{\delta\sqrt{m}}{2}.$$

Теорема 2.1 доказана. □

Лемма 2.1. *Пусть функция* $\varphi\colon \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^1$ *с постоянной Липшица* $L_* = L_*(D_*)$ *такова, что* $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma) \neq \varnothing$, $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c)$ *ограничено и* $c \geqslant L_*\delta\sqrt{m}$. *Тогда*

$$h(L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)) \geqslant \delta\sqrt{m}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Так как $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma) \subset L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c)$, то $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)$ также ограничено.

Введем обозначения $z = (1, 1, \ldots, 1)$, $\alpha = \max\limits_{x \in L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)} \langle z, x\rangle$, $\Gamma_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^m \colon \langle z, x\rangle = \alpha\}$, $M_\alpha = L_\varphi^{(\delta)}(\gamma) \cap \Gamma_\alpha$.

Выберем произвольную точку $x \in M_\alpha$. Выполняются соотношения $y = x + z \notin M_\alpha$ и $\rho(y, L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)) = ||x - y|| = \delta\sqrt{m}$.

Предположив, что $y \notin L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c)$, получим

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| > c \geqslant L_*\delta\sqrt{m} \geqslant L_*||x - y||,$$

откуда следует, что нарушается условие липшицевости функции φ. Следовательно, предположение о том, что $y \notin L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c)$, приводит к противоречию. Значит, $y \in L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c)$. Тогда

$$h(L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)) \geqslant \rho(y, L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)) = ||x - y|| = \delta\sqrt{m}.$$

Неравенство (2.3) доказано. □

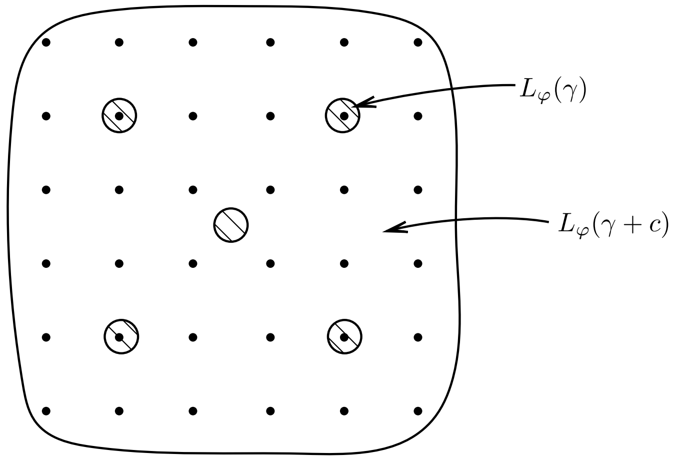

Рис. 1. Пример, в котором достигается верхняя граница оценки (2.2)

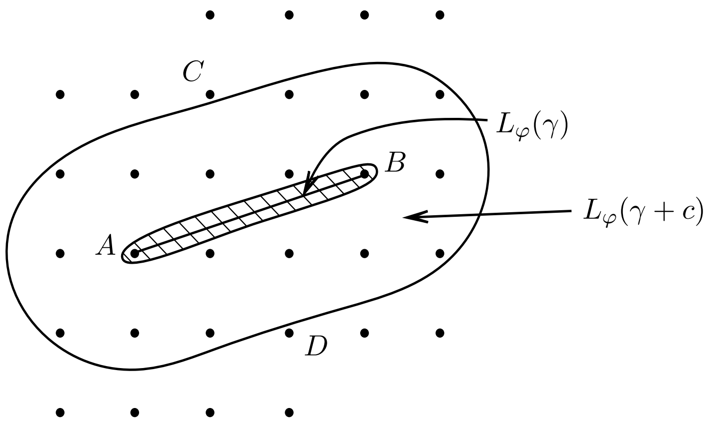

Рис. 2. Пример выпуклого множества $L_\varphi(\gamma)$, для которого
$d(L_\varphi(\gamma), \widetilde{L}_\varphi(\gamma)) = \dfrac{\sqrt{10}}{2}\,\delta > h(\widetilde{L}_\varphi(\gamma+c), \widetilde{L}_\varphi(\gamma)) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\delta$

Замечание 1. Оценка (2.2) в теореме 2.1 достигается на следующем примере, представленном на рис. 1.

На рис. 1 изображены множества Лебега $L_\varphi(\gamma)$ и $L_\varphi(\gamma+c)$ функции $\varphi(x)$ с постоянной Липшица $L_* = 1$ и $c = \delta\sqrt{2}$. Отметим, что при таких условиях границы $\partial L_\varphi(\gamma)$ и $\partial L_\varphi(\gamma+c)$ не могут быть ближе к друг другу, чем на расстоянии $\delta\sqrt{2}$, что осложняет построение нашего примера. Множество $L_\varphi(\gamma)$ состоит из пяти точек, изображенных заштрихованными кружками. Черными точками изображены узлы сетки $S^{(\delta)}$, расстояние между которыми составляет шаг сетки δ. Центральная «заштрихованная точка» не попадает в $S^{(\delta)}$ и, соответственно, в $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)$, поэтому $h(L_\varphi(\gamma), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\,\delta$. В то же время на рисунке $h(_\varphi^{(\delta)}(\gamma+c), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)) = \delta\sqrt{2}$. Тем самым в данном примере неравенство (2.2) обращается в равенство.

Если в формулировку теоремы 2.1 добавить условие, предполагающее выпуклость $L_\varphi(\gamma)$, то, по-видимому, можно получить более строгую оценку, чем (2.2); однако полностью избавиться от добавки $\dfrac{\delta\sqrt{m}}{2}$ невозможно (см. рис. 2).

Заметим, что в качестве функции $\varphi(x)$ на рис. 2 мы можем выбрать функцию $\varphi(x) =$

$=\rho(x, AB)+\gamma$ с постоянной Липшица $L_*=1$, где AB — отрезок, соединяющий точки A и B. Тогда мы можем выбрать постоянную $c=\delta\sqrt{2}$. Точки C и D не попадают в множество $L_\varphi(\gamma+c)$, так как $\rho(C, AB)=\rho(D, AB)=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\,\delta>c$.

Получение достижимой оценки величины $d(L_\varphi(\gamma), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma))$ в случае выпуклого множества Лебега $L_\varphi(\gamma)$ представляется нам интересной задачей.

Теорема 2.2. *Пусть функция $\varphi(x)\in C^1(\Omega)$, где $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ — связная область; числа $\gamma\in\mathbb{R}^1$ и $c>0$ таковы, что $L_\varphi(\gamma-c)\neq\varnothing$ и $L_\varphi(\gamma)$ ограничено. Пусть также градиент $\nabla\varphi(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$\zeta\leqslant\max_{x\in D_*}||\nabla\varphi(x)||\leqslant L_*,$$

где ζ и L_* из $(0,\infty)$ и $D_*=\mathrm{cl}(L_\varphi(\gamma)\backslash L_\varphi(\gamma-c))$.

Тогда при шаге $\delta\leqslant\dfrac{c}{L_*\sqrt{m}}$ сетки $S^{(\delta)}$ верна оценка

$$d(L_\varphi(\gamma), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma))\leqslant\frac{c}{\zeta}+\frac{\delta\sqrt{m}}{2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из включения $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)\subset L_\varphi(\gamma)$ следует

$$d(L_\varphi(\gamma), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma))=h(L_\varphi(\gamma), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)). \tag{2.4}$$

Также выполняется неравенство

$$h(L_\varphi(\gamma), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma))\leqslant h(L_\varphi(\gamma), L_\varphi(\gamma-c))+h(L_\varphi(\gamma-c), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)). \tag{2.5}$$

Принимая во внимание (2.1), получаем

$$h(L_\varphi(\gamma-c), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma))\leqslant\frac{\delta\sqrt{m}}{2}. \tag{2.6}$$

Оценим теперь величину $h(L_\varphi(\gamma), L_\varphi(\gamma-c))$. Выберем произвольную точку $x\in L_\varphi(\gamma)$. Рассмотрим траекторию $z=z(t)=(z_1(t),\ldots,z_m(t))$, $t\in[0,l]$, начинающуюся в выбранной точке $x=z(0)$ и параметризованную так, что

$$\dot z(t)=-\frac{\nabla\varphi(z(t))}{||\nabla\varphi(z(t))||}.$$

Это равенство означает, что касательный вектор $\dot z(t)$ к кривой $z(t)$, $t\in[0,l]$, совпадает по направлению с антиградиентом $-\nabla\varphi(z(t))$ функции $\varphi(\cdot)$.

При такой параметризации параметр t означает длину участка кривой, соединяющего точки x и $z(t)$. В силу неравенства $||\nabla\varphi(x)||\geqslant\zeta>0$, $x\in D_*$, найдется такой момент $\vartheta\in[0,+\infty)$, что $\varphi(z(\vartheta))=\gamma-c$, то есть $y=z(\vartheta)\in L_\varphi(\gamma-c)$.

Оценим длину $l=\vartheta$ участка кривой $z(t)$, $t\in[0,\vartheta]$.

По формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$-c=\varphi(y)-\varphi(x)=\int_0^l\frac{d\varphi(z(t))}{dt}\,dt=\int_0^l\langle\nabla\varphi(z(t)),\dot z(t)\rangle\,dt=$$
$$=-\int_0^l\frac{\langle\nabla\varphi(z(t)),\nabla\varphi(z(t))\rangle}{||\nabla\varphi(z(t))||}\,dt=-\int_0^l||\nabla\varphi(z(t))||\,dt\leqslant-l\zeta.$$

Из этого неравенства следует $l\leqslant\dfrac{c}{\zeta}$.

В силу произвольности выбора точки $x \in L_\varphi(\gamma)$ имеем

$$h(L_\varphi(\gamma), L_\varphi(\gamma - c)) = \max_{x \in L_\varphi(\gamma)} \rho(x, L_\varphi(\gamma - c)) \leqslant \frac{c}{\zeta}. \tag{2.7}$$

Подставляя оценки (2.6) и (2.7) в правую часть неравенства (2.5), получаем

$$h(L_\varphi(\gamma), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)) \leqslant \frac{c}{\zeta} + \frac{\delta\sqrt{m}}{2}.$$

Тем самым (учитывая (2.4)) мы доказали теорему 2.2. □

Теорема 2.2 в рассматриваемом случае гладкой функции $\varphi(x)$ дает нам априорную оценку сверху хаусдорфова расстояния $d(L_\varphi(\gamma), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma))$.

Представляет интерес распространение результата теоремы 2.2 на случай менее гладкой функции $\varphi(x)$.

Теорема 2.3. *Пусть функция* $\varphi\colon \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^1$ *имеет постоянную Липшица* $L_* = L_*(D_*)$ *в области* D_* *и числа* $\gamma \in \mathbb{R}^1$, $c > 0$ *таковы, что* $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma - c) \neq \varnothing$ *и* $L_\varphi(\gamma)$ *ограничено.*

Пусть также существует такое $\zeta \in (0, \infty)$, *что для каждой точки* $x \in L_\varphi(\gamma) \backslash L_\varphi(\gamma - c)$ *существует направление* s, $||s|| = 1$, *для которого*

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_x} \frac{\varphi(x + \lambda s) - \varphi(x)}{\lambda} \leqslant -\zeta;$$

здесь $\Lambda_x = \{\lambda \in \mathbb{R}^1 \colon \lambda > 0, x + \lambda s \in \mathrm{cl}(L_\varphi(\gamma) \backslash L_\varphi(\gamma - c)\}$.
Тогда при шаге $\delta \in \left(0, \dfrac{c}{L_*\sqrt{m}}\right)$ *сетки* $S^{(\delta)}$ *верна оценка*

$$d(L_\varphi(\gamma), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)) \leqslant \frac{c}{\zeta} + \frac{\delta\sqrt{m}}{2}.$$

Доказательство. Справедливо неравенство

$$d(L_\varphi(\gamma), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)) = h(L_\varphi(\gamma), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)) \leqslant h(L_\varphi(\gamma), L_\varphi(\gamma - c)) + h(L_\varphi(\gamma - c), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)). \tag{2.8}$$

Принимая во внимание (2.2), получаем

$$h(L_\varphi(\gamma - c), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)) \leqslant \frac{\delta\sqrt{m}}{2}. \tag{2.9}$$

Оценим сверху $h(L_\varphi(\gamma), L_\varphi(\gamma - c))$. Выберем произвольную точку $x \in L_\varphi(\gamma) \backslash L_\varphi(\gamma - c)$ и соответствующее ей по условиям теоремы направление s. Будем постепенно увеличивать $\lambda > 0$ (начиная с малых $\lambda > 0$) до тех пор, пока не выполнится включение $x + \lambda s \in \partial L_\varphi(\gamma)$ при некотором $\lambda_0 \in \left(0, \dfrac{c}{\zeta}\right]$.

Итак, пусть при некотором $\lambda_0 \in \left(0, \dfrac{c}{\zeta}\right]$ имеет место равенство $\varphi(x + \lambda_0 s) = \gamma$. Тогда

$$\rho(x, L_\varphi(\gamma)) \leqslant ||x - (x + \lambda_0 s)|| = \lambda_0 \leqslant \frac{c}{\zeta},$$

и, следовательно, в силу произвольности выбора точки x имеем

$$h(L_\varphi(\gamma), L_\varphi(\gamma - c)) = \sup_{x \in L_\varphi(\gamma)} \rho(x, L_\varphi(\gamma - c)) \leqslant \frac{c}{\zeta}.$$

Отсюда и из неравенств (2.8), (2.9) получаем утверждение теоремы 2.3. □

§ 3. Оценка рассогласования множеств $\widehat{Z}$ и $\widehat{\mathscr{Z}}^a$

В этом параграфе опишем более подробную схему конструирования множества $\widehat{\mathscr{Z}}^a$ — конечного множества точек в D, аппроксимирующего множество $\widehat{Z}$. $\widehat{\mathscr{Z}}^a$ в D будем конструировать как систему множеств $\{\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)\colon \tau_i \in \Gamma\}$ в $\mathbb{R}^m$, отвечающую некоторому разбиению Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$ и начиная с множества $\widehat{\mathscr{Z}}^a(t_0)$. Определение множества $\widehat{\mathscr{Z}}^a(t_0)$ обусловлено выбором кубической сетки в $\mathbb{R}^m$ и, стало быть, обусловлено размерами шага сетки. Следовательно, и конструкция самого множества $\widehat{\mathscr{Z}}^a$ зависит от выбора шага сетки. В конечном итоге оказывается, что на построение конечного множества $\widehat{\mathscr{Z}}^a$ существенно влияют диаметр разбиения Γ и величина шага сетки.

В этом параграфе мы выведем оценку рассогласования сверху между $\widehat{Z}$ и $\widehat{\mathscr{Z}}^a$, которая будет зависеть от диаметра разбиения Γ и величины шага сетки.

Итак, введем на оси обратного времени τ разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с одинаковыми шагами $\Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i = \Delta > 0$, где $\Delta = \Delta(\Gamma)$ — диаметр разбиения Γ.

Множество $\widehat{\mathscr{Z}}^a$ в D, отвечающее этому разбиению Γ, будем конструировать как систему $\{\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)\colon \tau_i \in \Gamma\}$ множеств $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i) \subset \mathbb{R}^m$, начиная с $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_0)$.

Считаем, что, наряду с диаметром $\Delta = \Delta(\Gamma) = \dfrac{1}{N}(\vartheta - t_0)$ задано некоторое число $\delta > 0$, определяющее в $\mathbb{R}^m$ «кубическую» сетку $S^{(\delta)}$. В сетке $S^{(\delta)}$ все кубы равны и имеют длины ребер, равные δ. Пусть также задано $\gamma \in \mathbb{R}^1$.

Предположим, что $\delta > 0$ таково, что $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma) \neq \varnothing$ и $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c)$ ограничено и $c = c(\delta) = L_*\delta\sqrt{m}$.

В качестве начального множества (состоящего из конечного числа точек) полагаем $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_0) = L_\varphi^{(\delta)}(\gamma) \subset L_\varphi(\gamma) = M(\gamma)$.

Согласно теореме 2.1 из § 2 справедлива оценка

$$d(M(\gamma), \widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_0)) = d(L_\varphi(\gamma), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)) \leqslant \varkappa(\delta) + \frac{\delta\sqrt{m}}{2};$$

здесь $\varkappa(\delta) = h(L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c(\delta)), L_\varphi^{(\delta)}(\gamma))$.

Величину $\varkappa(\delta)$ мы можем вычислить, выделив множества $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)$ и $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c(\delta))$. Имеет место $\varkappa(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$, и значит, $d(M(\gamma), \widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_0)) \downarrow 0$ при шаге δ сетки $S^{(\delta)}$, стремящемся к нулю.

Перейдем к описанию схемы конструирования множеств $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_{i+1})$, $i = \overline{0, N-1}$. Описание схемы начнем с введения в рассмотрение некоторых «промежуточных» множеств $\widehat{Z}^a(\tau_{i+1})$, $i = \overline{0, N-1}$. Эти множества будем формировать последовательно по шагам $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ разбиения Γ; при этом в процессе их формирования несколько первых из них могут быть определены как множества $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_{i+1})$. Другие же множества $\widehat{Z}^a(\tau_{i+1})$ трансформируются в множества $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_{i+1})$ путем их прореживания, то есть выбрасывания из них определенного количества точек.

Считаем при этом, что в начальный момент $\tau_0 = t_0$ разбиения Γ выполняется равенство $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_0) = \widehat{Z}^a(\tau_0) = L_\varphi^{(\delta)}(\gamma)$ — конечное множество в $\mathbb{R}^m$, и, следовательно,

$$d(\widehat{Z}^a(\tau_0), M(\gamma)) \leqslant \varkappa(\delta) + \frac{\delta\sqrt{m}}{2}. \tag{3.1}$$

Более аккуратно и подробно процедура формирования множеств $\widehat{Z}^a(\tau_{i+1})$ и $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_{i+1})$, $i = \overline{0, N-1}$ описывается ниже.

Итак, зададим многозначное отображение $(\tau^*, \tau_*, Z_*) \mapsto Z^{(\rho)}(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ равенством

$$Z^{(\rho)}(\tau^*, \tau_*, Z_*) = Z_* + \rho H^{(\rho)}(\tau_*, Z_*),$$

$t_0 \leqslant \tau_* < \tau^* \leqslant \vartheta$, Z_* — конечное множество в $\mathbb{R}^m$, $\rho = \tau^* - \tau_* > 0$.

Здесь обозначено $Z_* + \rho H^{(\rho)}(\tau_*, Z_*) = \bigcup\limits_{z_* \in Z_*} (z_* + \rho H^{(\rho)}(\tau_*, z_*))$, где $(\tau_*, z_*) \mapsto H^{(\rho)}(\tau_*, z_*)$ — некоторая конечнозначная аппроксимация отображения $(\tau_*, z_*) \mapsto H(\tau_*, z_*)$ на D, удовлетворяющая

$$\sup_{(\tau_*, z_*) \in D} d(H(\tau_*, z_*), H^{(\rho)}(\tau_*, z_*)) \leqslant \zeta^*(\rho), \quad \rho \in (0, \infty),$$

где функция $\zeta^*(\rho)$, $\rho \in (0, \infty)$ выбрана такой, что $\zeta^*(\rho) \downarrow 0$ при $\rho \downarrow 0$.

Так определенное отображение $(\tau^*, \tau_*, Z_*) \mapsto Z^{(\rho)}(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ есть *конечнозначное* отображение.

«Промежуточные» множества $\widehat{Z}^a(\tau_{i+1})$, $i = \overline{0, N-1}$, определим рекуррентными соотношениями

$$\widehat{Z}^a(\tau_{i+1}) = Z^{(\Delta)}(\tau_{i+1}, \tau_i, \widehat{Z}^a(\tau_i)), \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Теперь сравним, насколько сильно различаются друг от друга системы $\{\widehat{Z}^a(\tau_i) \colon \tau_i \in \Gamma\}$ и $\{\widehat{Z}(\tau_i) \colon \tau_i \in \Gamma\}$, где $\widehat{Z}(\tau_i)$, $i = \overline{0, N}$, — сечения интегральной воронки $\widehat{Z}$ д. в. (1.5).

При условиях **A**, **B**, наложенных на систему (1.1), учитывая включения $(\tau_i, \widehat{Z}(\tau_i)) \subset D$, $(\tau_i, \widehat{Z}^a(\tau_i) \subset D$, $i = \overline{0, N}$, и оценку (3.1) рассогласования между начальными множествами $\widehat{Z}^a(\tau_0)$ и $\widehat{Z}(\tau_0) = M(\gamma)$, получаем следующую оценку рассогласования между $\widehat{Z}^a(\tau_i)$ и $\widehat{Z}(\tau_i)$:

$$d(\widehat{Z}^a(\tau_i), \widehat{Z}(\tau_i)) \leqslant e^{L(\tau_i - \tau_0)}(\varkappa(\delta) + \frac{\delta\sqrt{m}}{2} + (\tau_i - \tau_0)(\zeta^*(\Delta) + \omega^*(\Delta) + LK\Delta). \tag{3.2}$$

Из оценки (3.2), принимая во внимание определения функций $\varkappa(\delta)$, $\zeta^*(\rho)$ и $\omega^*(\delta)$ $(\rho > 0$, $\delta > 0)$, получаем

$$\max_{\tau_i \in \Gamma} d(\widehat{Z}^a(\tau_i), \widehat{Z}(\tau_i)) \to 0 \text{ при } \rho \downarrow 0,\ \delta \downarrow 0.$$

В этом смысле система $\{\widehat{Z}^a(\tau_i) \colon \tau_i \in \Gamma\}$ аппроксимирует систему $\{\widehat{Z}(\tau_i) \colon \tau_i \in \Gamma\}$ и вместе с ней интегральную воронку $\widehat{Z}$ д. в. (1.5).

При вычислении множеств $\widehat{Z}^a(\tau_i)$, $i = \overline{0, N}$, может оказаться, что в некоторые моменты τ_i количество $m(\widehat{Z}^a(\tau_i))$ элементов этих конечных множеств окажется настолько большим, что затруднит проведение эффективных последующих вычислений.

Такие ситуации порождают необходимость при вычислении множеств $\widehat{Z}^a(\tau_i)$ поддерживать их мощность на определенном уровне, то есть в определенные моменты прореживать вычисленные множества. При этом мы должны проводить прореживание так, чтобы в результате его реализовалось конечное множество, не сильно отличающееся в хаусдорфовой метрике от прореживаемого множества.

В связи с необходимостью прореживания аппроксимирующих множеств зададим некоторую функцию $\chi(\delta)$, $\delta > 0$, такую, что $\chi^*(\delta) = \delta^{-1}\chi(\delta) \downarrow 0$, $\delta \downarrow 0$. Фазовое пространство $\mathbb{R}^m$ д. в. (1.5) представим как объединение замкнутых кубов $\mathbb{U}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}$, с ребрами длины $\sqrt{m}\chi(\Delta)$.

Каждому конечному множеству $\Phi \subset \mathbb{R}^m$ поставим в соответствие множество $\Omega^{(\Delta)}(\Phi) \subset \mathbb{R}^m$ согласно следующему правилу: в каждом кубе $\mathbb{U}_\alpha$, $\mathbb{U}_\alpha \cap \Phi \neq \varnothing$, выделим по точке $z_\alpha \in \Phi$ и при этом каждую такую точку множества Φ включаем только в один куб $\mathbb{U}_\alpha$.

Справедливо $m(\Omega^{(\Delta)}(\Phi)) \leqslant m(\Phi)$.

Из определения множества $\Omega^{(\Delta)}(\Phi)$ вытекает оценка [6, 9, 10]

$$d(\Omega^{(\Delta)}(\Phi), \Phi) \leqslant \chi(\Delta).$$

Введя такую процедуру $\Phi \mapsto \Omega^{(\Delta)}(\Phi)$ прореживания конечных множеств в $\mathbb{R}^m$, зададим множества $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)$, $i = \overline{0, N}$, в $\mathbb{R}^m$ при помощи рекуррентных соотношений

$$\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_0) = M(\gamma), \quad \widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_{i+1}) = \Omega^{(\Delta)}(Z^{(\Delta)}(\tau_{i+1}, \tau_i, \widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i))), \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Предположим, реализовав эти соотношения, вычислили множества $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)$, $i=\overline{0,N}$.

Тогда можно показать [6, 9, 10], что при разбиении Γ с диаметром $\Delta=\Delta(\Gamma)\in(0,L^{-1}\ln 2]$ выполняется оценка

$$d(\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i),\widehat{Z}^a(\tau_i))\leqslant 2L^{-1}e^{L(\tau_i-t_0)}\chi^*(\Delta),\quad i=\overline{1,N}. \tag{3.3}$$

Учитывая оценки (3.2) и (3.3), получаем

$$\begin{gathered} d(\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i),\widehat{Z}(\tau_i))\leqslant d(\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i),\widehat{Z}^a(\tau_i))+d(\widehat{Z}^a(\tau_i),\widehat{Z}(\tau_i))\leqslant\\ \leqslant e^{L(\vartheta-t_0)}\varkappa(\delta)+\frac{\delta\sqrt{m}}{2}+2L^{-1}\chi^*(\Delta)+(\vartheta-t_0)(\zeta^*(\Delta)+\omega^*(\Delta)+KL\Delta),\quad i=\overline{0,N}. \end{gathered}\tag{3.4}$$

Обозначим символом $\widehat{W}(t_j)$ сечения множества $\widehat{W}$ в моменты $t_j\in\Gamma$. Справедливы равенства $\widehat{W}(t_j)=\widehat{Z}(\tau_i)$, $t_j+\tau_i=t_0+\vartheta$, $\tau_i\in\Gamma$.

Введя обозначения $\widehat{\mathscr{W}}^a(t_j)=\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)$, $\widehat{W}^a(t_j)=\widehat{Z}^a(\tau_i)$, $t_j+\tau_i=t_0+\vartheta$, $\tau_i\in\Gamma$, оценку (3.4) запишем как оценку рассогласования между множествами $\widehat{\mathscr{W}}^a(t_j)$ и $\widehat{W}(t_j)$, $t_j+\tau_i=t_0+\vartheta$, $\tau_i\in\Gamma$:

$$\begin{gathered} d(\widehat{\mathscr{W}}^a(t_j),\widehat{W}(t_j))\leqslant d(\widehat{\mathscr{W}}^a(t_j),\widehat{W}^a(t_j))+d(\widehat{W}^a(t_j),\widehat{W}(t_j))\leqslant\\ e^{L(\vartheta-t_0)}\Big(\varkappa(\delta)+\frac{\delta\sqrt{m}}{2}+2L^{-1}\chi^*(\Delta)+(\vartheta-t_0)(\zeta^*(\Delta)+\omega^*(\Delta)+LK\Delta)\Big),\quad j=\overline{0,N}, \end{gathered}\tag{3.5}$$

при $\Delta\in(0,L^{-1}\ln 2]$.

Из (3.5) следует

$$\max_{t_j\in\Gamma} d(\widehat{\mathscr{W}}^a(t_j),\widehat{W}(t_j))\to 0 \text{ при } \Delta=\Delta(\Gamma)\downarrow 0.$$

Это предельное соотношение вместе с равенством $\widehat{W}=\mathrm{cl}W$ означает, что система $\{\widehat{\mathscr{W}}^a(t_j):t_j\in\Gamma\}$ конечных множеств $\widehat{\mathscr{W}}^a(t_j)\subset\mathbb{R}^m$ является аппроксимирующей для множества разрешимости W.

§ 4. Конструирование управления, доставляющего приближенное решение задачи 2

В этом параграфе будет описан метод конструирования управления $u^*(t)$, $t\in[t_0,\vartheta]$, — приближенного решения задачи 2. Конструирование управления $u^*(t)$, $t\in[t_0,\vartheta]$, основано на притягивании движения $x^*(t)$ системы (1.1) к множеству разрешимости W.

Пусть на оси t задано разбиение $\Gamma=\{t_0,t_1,\ldots,t_j,\ldots,t_N=\vartheta\}$ промежутка $[t_0,\vartheta]$ с равными шагами $\Delta_j=t_{j+1}-t_j=\Delta$, $j=\overline{0,N-1}$.

Считаем, что выполнены следующие условия:

(1) по схеме предыдущего параграфа вычислена система $\{\widehat{\mathscr{W}}^a(t_j)\colon t_j\in\Gamma\}$ конечных множеств $\widehat{\mathscr{W}}^a(t_j)\subset D_*$, отвечающая разбиению Γ. При этом множества $\widehat{\mathscr{W}}^a(t_j)$, $t_j\in\Gamma$, совпадают с «промежуточными» множествами $\widehat{W}^a(t_j)$, $t_j\in\Gamma$. Это означает, что наши вычислительные возможности оказались достаточными для того, чтобы избежать прореживания множеств $\widehat{Z}^a(\tau_i)=\widehat{W}^a(t_j)$, $\tau_i+t_j=t_0+\vartheta$, в процессе вычислений;

(2) мы имеем возможность вычислять конечные множества $Y^a(t^*,t_*,x_*)=x_*+\rho F^{(\rho)}(t_*,x_*)$, $(t_*,x_*)\in D$, $t_0\leqslant t_*<t^*\leqslant\vartheta$, $\rho=t^*-t_*$; здесь $F^{(\rho)}(t_*,x_*)=-H^{(\rho)}(\tau_*,z_*)$, $t_*+\tau_*=t_0+\vartheta$, $x_*=z_*$.

Теперь вернемся к разбиению Γ и опишем схему пошагового формирования управления $u^*(t)$ на $[t_0,\vartheta]$. Эта схема типична для всех промежутков $[t_j,t_{j+1}]$ разбиения Γ, поэтому опишем ее детально для начального промежутка $[t_0,t_1]$.

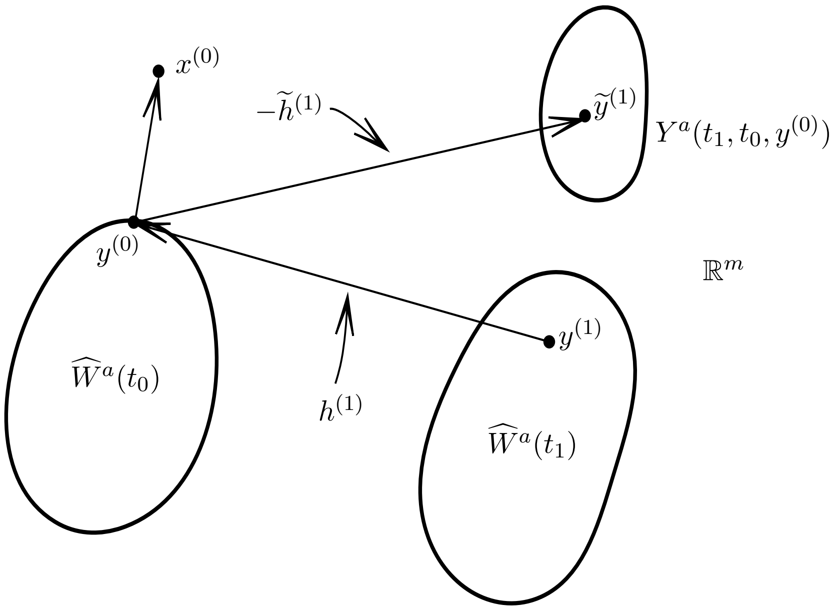

Рис. 3.

Пусть $x^{(0)}$ — некоторая точка вблизи $\widehat{W}^a(t_0)$ и $y^{(0)}$ — точка в $\widehat{W}^a(t_0)$, ближайшая к $x^{(0)}$.

По определению множеств $\widehat{W}^a(t_0)=\widehat{Z}^a(\tau_N)$ и $\widehat{W}^a(t_1)=\widehat{Z}^a(\tau_{N-1})$, найдутся такие точка $y^{(1)}\in\widehat{W}^a(t_1)$ и вектор $h^{(1)}\in H^{(\Delta)}(\tau_{N-1},y^{(1)})$, что $y^{(0)}=y^{(1)}+\Delta\,h^{(1)}$.

Изучим вопрос об оценке хаусдорфова расстояния $d(H^{(\Delta)}(\tau_{N-1},y^{(1)}),H^{(\Delta)}(\tau_N,y^{(0)}))$. Напомним, что отображение $(\tau_*,z_*)\mapsto H^{(\rho)}(\tau_*,z_*)$, $(\tau_*,z_*)\in D$, $\rho>0$, удовлетворяет неравенству

$$d(H(\tau_*,z_*),H^{(\rho)}(\tau_*,z_*))\leqslant\zeta^*(\rho),\quad (\tau_*,z_*)\in D,\ \rho>0;$$

здесь $\zeta^*(\rho)\downarrow 0$ при $\rho\downarrow 0$.

Учитывая эту оценку, получаем

$$\begin{gathered}d(H^{(\Delta)}(\tau_{N-1},y^{(1)}),H^{(\Delta)}(\tau_N,y^{(0)}))\leqslant d(H^{(\Delta)}(\tau_{N-1},y^{(1)}),H(\tau_{N-1},y^{(1)}))+\\+d(H(\tau_{N-1},y^{(1)}),H(\tau_N,y^{(0)}))+d(H(\tau_N,y^{(0)}),H^{(\Delta)}(\tau_N,y^{(0)}))\leqslant\\\leqslant\zeta^*(\Delta)+\omega^*(\Delta)+LK\Delta+\zeta^*(\Delta),\quad \Delta=\Delta(\Gamma).\end{gathered}$$

Обозначив $\lambda^*(\Delta)=2\zeta^*(\Delta)+\omega^*(\Delta)+LK\Delta$, $\Delta>0$, получаем оценку

$$d(H^{(\Delta)}(\tau_{N-1},y^{(1)}),H^{(\Delta)}(\tau_N,y^{(0)}))\leqslant\lambda^*(\Delta),\tag{4.1}$$

где $\lambda^*(\Delta)\downarrow 0$ при $\Delta\downarrow 0$.

Пусть $\widetilde{h}^{(1)}$ — ближайший в $H^{(\Delta)}(\tau_N,y^{(0)})$ вектор к $h^{(1)}\in H^{(\Delta)}(\tau_{N-1},y^{(1)})$. Учитывая (4.1), получаем

$$||h^{(1)}-\widetilde{h}^{(1)}||\leqslant\lambda^*(\Delta).$$

Обозначим евклидово расстояние между $Y^a(t_1,t_0,y^{(0)})$ и $\widehat{W}^a(t_1)$ символом

$$\rho(Y^a(t_1,t_0,y^{(0)}),\,\widehat{W}^a(t_1))=\min\{||y-w||\colon y\in Y^a(t_1,t_0,y^{(0)}),w\in\widehat{W}^a(t_1)\}.$$

Положив $\widetilde{y}^1=y^{(0)}-\Delta\widetilde{h}^{(1)}\in Y^a(t_1,y_0,y^{(0)})$ и принимая во внимание равенство $y^{(0)}=$ $=y^{(1)}+\Delta h^{(1)}$, получим

$$y^{(1)}-\widetilde{y}^{(1)}=(y^{(0)}-\Delta h^{(1)})-(y^{(0)}-\Delta\widetilde{h}^{(1)})=\Delta(\widetilde{h}^{(1)}-h^{(1)}).$$

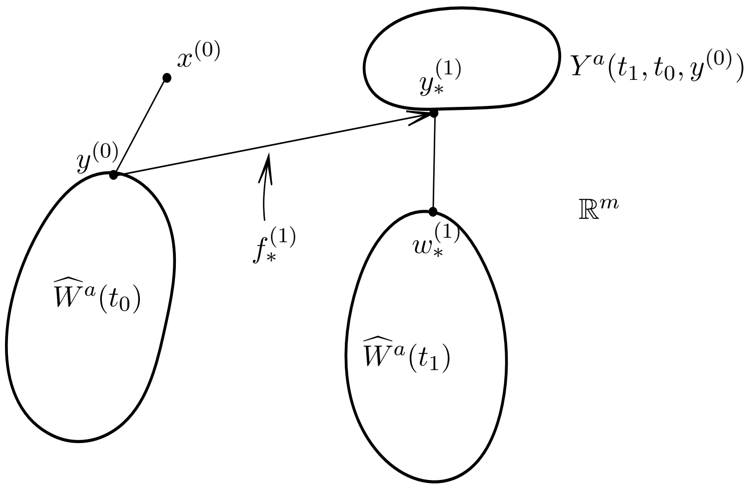

Рис. 4.

Отсюда вытекает оценка

$$||y^{(1)} - \widetilde{y}^{(1)}|| = \Delta||h^{(1)} - \widetilde{h}^{(1)}|| \leqslant \Delta\lambda^*(\Delta),$$

из которой следует

$$\rho(Y^a(t_1, t_0, y^{(0)}), \widehat{W}^a(t_1)) \leqslant \Delta\lambda^*(\Delta).$$

Обозначив $\rho^{(1)}(\Delta) = \rho(Y^a(t_1, t_0, y^{(0)}), \widehat{W}^a(t_1))$, получаем $\rho^{(1)}(\Delta) \leqslant \Delta\lambda^*(\Delta)$. Пусть $y^{(1)}_*$ и $w^{(1)}_*$ — такие точки в конечных множествах $Y^a(t_1, t_0, y^{(0)})$ и $\widehat{W}^a(t_1)$, которые удовлетворяют соотношению

$$||y^{(1)}_* - w^{(1)}_*|| = \rho^{(1)}(\Delta) \leqslant \Delta\lambda^*(\Delta). \tag{4.2}$$

Считая, что мы эти точки выделили в множествах $Y^a(t_1, t_0, y^{(0)})$ и $\widehat{W}^a(t_1)$, вычислим вектор

$$f^{(1)}_* = \frac{y^{(1)}_* - y^{(0)}}{\Delta} \in F^{(\Delta)}(t_0, y^{(0)}) \subset F(t_0, y^{(0)}).$$

Вектор $f^{(1)}_* \in F(t_0, y^{(0)})$ представим в виде

$$f^{(1)}_* = \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k f(t_0, y^{(0)}, u^{(k)}), \tag{4.3}$$

где $\alpha_k \geqslant 0$ и $u^{(k)} \in P$ при $k = \overline{1, m+1}$, $\sum\limits_{k=1}^{m+1} \alpha_k = 1$.

При уже вычисленном векторе $f^{(1)}_*$ рассмотрим (4.3) как уравнение относительно α_k, $u^{(k)}$, $k = \overline{1, m+1}$, удовлетворяющих приведенным выше соотношениям.

Для управляемых систем (1.1) достаточно общего вида мы не умеем решать (точно) уравнение (4.3).

Допустим, однако, что мы можем решить уравнение (4.3) с некоторой погрешностью, не превосходящей величину $\varkappa(\Delta)$ ($\varkappa(\Delta) \downarrow 0$ при $\Delta \downarrow 0$), то есть допустим, что вектор $f^{(1)}_*$ представим в виде

$$f^{(1)}_* = \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k f(t_0, y^{(0)}, u^{(k)}) + s(\Delta), \tag{4.4}$$

где вектор $s(\Delta) \in \mathbb{R}^m$ удовлетворяет неравенству $||s(\Delta)|| \leqslant \varkappa(\Delta)$, а α_k и $u^{(k)}$, $k = \overline{1, m+1}$, удовлетворяют приведенным выше соотношениям.

Для упрощения выкладок договоримся считать, что $\alpha_k > 0$ при $k = \overline{1, m+1}$.

Введем числа $\Delta_k = \alpha_k \Delta$, $k = \overline{1, m+1}$, и разбиение $\Gamma^* = \{t_1^* = t_0, t_2^*, \ldots, t_k^*, t_{k+1}^*, \ldots, t_{m+1}^*, t_{m+2}^* = t_1\}$ промежутка $[t_0, t_1]$; здесь $t_{k+1}^* = t_k^* + \Delta_k$, $k = \overline{1, m+1}$.

Определим также управление $u^*(t)$ на промежутке $[t_0, t_1]$ разбиения Γ:

$$u^*(t) = u^{(k)} \text{ при } t \in [t_k^*, t_{k+1}^*), \quad k = \overline{1, m+1}.$$

Управление $u^*(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, применим к системе (1.1) с начальныи условием $x^*(t_0) = x^{(0)}$.

Покажем, что при достаточно малых $\Delta = \Delta(\Gamma) > 0$ управление $u^*(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, приведет движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x^{(0)}$, в момент t_1 в малую окрестность множества $\widehat{W}^a(t_1)$ в случае, если величина $||x^{(0)} - y^{(0)}||$ мала.

Итак, для движения $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x^{(0)}$, системы (1.1) на начальном шаге $[t_0, t_1]$ разбиения Γ выполняется равенство

$$x^*(t_1) = x^{(0)} + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^*(t), u^*(t))\, dt,$$

где интеграл в правой части равенства есть интеграл Лебега.

Наряду с этим равенством выполняется

$$y_*^{(1)} = y^{(0)} + \Delta f_*^{(1)}.$$

Из этих двух равенств, учитывая (4.4), получаем

$$\begin{aligned} ||x^*(t_1) - y_*^{(1)}|| &= \left\| (x^{(0)} - y^{(0)}) + \Big(\int_0^1 f(t, x^*(t), u^*(t))\, dt - \Delta f_*^{(1)} \Big) \right\| \leqslant \\ &\leqslant ||x^{(0)} - y^{(0)}|| + \left\| \int_{t_0}^{t_1} \big(f(t, x^*(t), u^*(t)) - f(t_0, x^{(0)}, u^*(t)) \big)\, dt \right\| + \\ &+ \left\| \int_{t_0}^{t_1} f(t_0, x^{(0)}, u^*(t))\, dt - \Delta \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k f(t_0, y^{(0)}, u^{(k)}) \right\| + \Delta ||s(\Delta)||. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Из (4.5) следует оценка

$$\begin{aligned} ||x^*(t_1) - y_*^{(1)}|| &\leqslant ||x^{(0)} - y^{(0)}|| + \Delta(\omega^*(\Delta) + LK\Delta) + \\ &+ \left\| \sum_{k=1}^{m+1} \Delta_k (f(t_0, x^{(0)}, u^{(k)}) - f(t_0, y^{(0)}, u^{(k)})) \right\| + \Delta ||s(\Delta)||, \end{aligned}$$

где $\Delta = \Delta(\Gamma) > 0$.

Введя обозначение $\varepsilon^{(0)} = ||x^{(0)} - y^{(0)}||$ для рассогласования между точками $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$, получаем

$$\begin{aligned} ||x^*(t_1) - y_*^{(1)}|| &\leqslant (1 + L\Delta)\varepsilon^{(0)} + \Delta(\omega^*(\Delta) + LK\Delta) + \Delta\varkappa(\Delta) \leqslant \\ &\leqslant e^{L\Delta}\varepsilon^{(0)} + \Delta(\omega^*(\Delta) + LK\Delta + \varkappa(\Delta)). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Из оценок (4.2), (4.6) следует

$$||x^*(t_1) - w_*^{(1)}|| \leqslant ||x^*(t_1) - y_*^{(1)}|| + ||y_*^{(1)} - w_*^{(1)}|| \leqslant e^{L\Delta}\varepsilon^{(0)} + \Delta\sigma(\Delta), \tag{4.7}$$

где $\sigma(\Delta) = \omega^*(\Delta) + LK\Delta + \varkappa(\Delta) + \lambda^*(\Delta)$, $\Delta > 0$.

Из (4.7) получаем

$$\varepsilon^{(1)}(\Delta) = \rho(x^*(t_1), \widehat{W}^a(t_1)) \leqslant e^{L\Delta}\varepsilon^{(0)} + \Delta\sigma(\Delta).$$

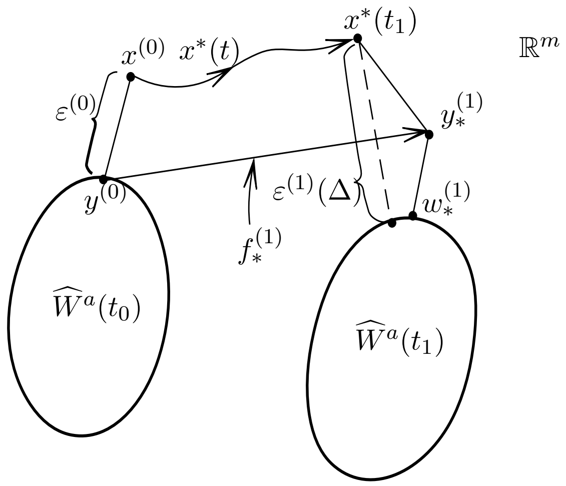

Рис. 5.

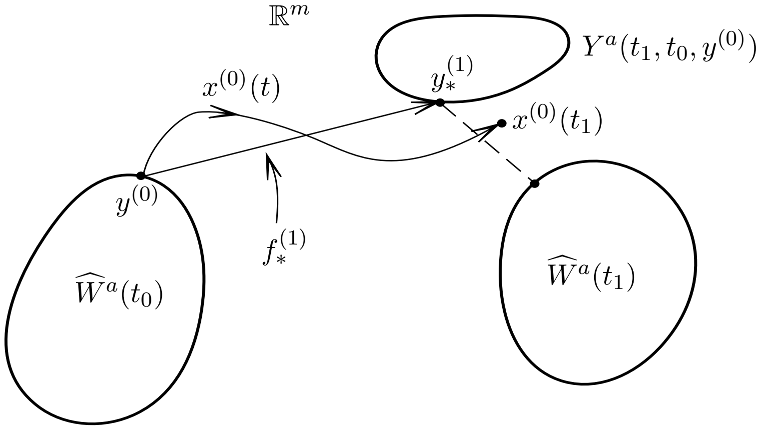

Рис. 6.

Замечание 2. Вектор $f_*^{(1)}$ был выбран в множестве $F(t_0, y^{(0)})$ из тех соображений, чтобы точка $y_*^{(1)}$ была ближайшей точкой к $\widehat{W}^a(t_1)$ в множестве $Y^a(t_1, t_0, y^{(0)})$, имеющем смысл некоторого локального множества достижимости, близкого к множеству достижимости $Y(t_1, t_0, y^{(0)})$ д. в. (1.5). Вектор $f_*^{(1)}$ стал тем ориентиром, по которому было сформировано кусочно-постоянное управление $u^*(t)$ на $[t_0, t_1]$. Это управление $u^*(t)$ на $[t_0, t_1]$ породило для управляемой системы (1.1) движение $x^{(0)}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, с начальным условием $x^{(0)}(t_0) = y^{(0)}$, приходящее в момент t_1 в точку $x^{(0)}(t_1)$, близкую к точке $y_*^{(1)}$.

Но тогда и движение $x^*(t)$ системы (1.1), порожденное тем же управлением $u^*(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, и с начальной точкой $x^*(t_0) = x^{(0)}$ приходит в момент t_1 в точку $x^*(t_1)$, достаточно близкую к $\widehat{W}^a(t_1)$.

Полагаем, что $x^{(1)} = x^*(t_1)$ и $y^{(1)}$ — ближайшая к $x^{(1)}$ точка на $\widehat{W}^a(t_1)$, так что справедливо равенство $\varepsilon^{(1)}(\Delta) = ||x^{(1)} - y^{(1)}||$.

Рассмотрим следующий за $[t_0, t_1]$ промежуток $[t_1, t_2]$ и оценим сверху расстояние $\rho(Y^a(t_2, t_1, y^{(1)}), \widehat{W}^a(t_2))$ между множествами $Y^a(t_2, t_1, y^{(1)})$ и $\widehat{W}(t_2)$. При выводе оценки сверху этой величины применимы те же рассуждения, которые были проведены при рассмотрении отрезка

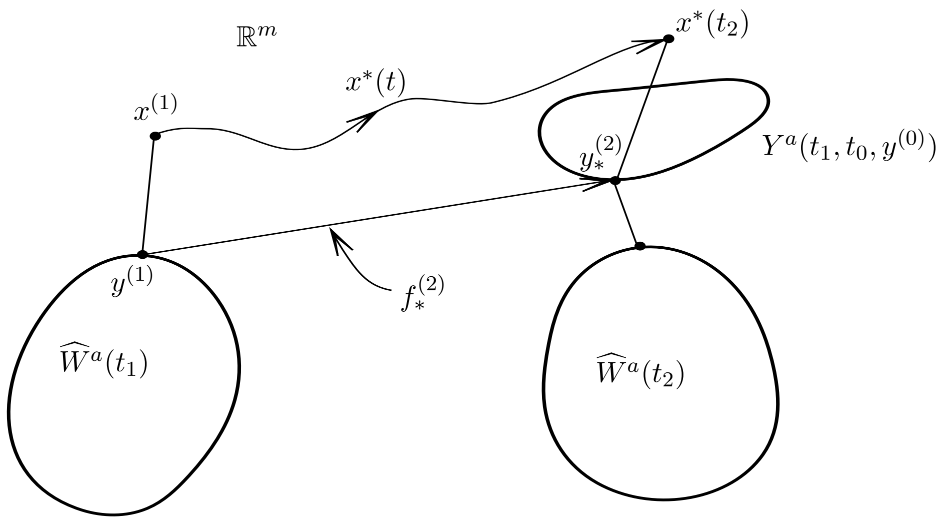

Рис. 7.

$[t_0, t_1]$. Имеем оценку, аналогичную оценке (4.2):

$$\rho^{(2)}(\Delta) = \rho(Y^a(t_2, t_1, y^{(1)}), \widehat{W}^a(t_2)) \leqslant \Delta\lambda^*(\Delta).$$

Выделив в множестве $Y^a(t_2, t_1, y^{(1)})$ точку $y_*^{(2)}$, ближайшую к множеству $\widehat{W}^a(t_2)$, вычислим вектор

$$f_*^{(2)} = \frac{y_*^{(2)} - y^{(1)}}{\Delta} \in F^{(\Delta)}(t_1, y^{(1)}) \subset F(t_1, y^{(1)}).$$

По вектору $f_*^{(2)} \in F(t_1, y^{(1)})$ формируем кусочно-постоянное управление $u^*(t)$ на $[t_1, t_2]$ по той же схеме, которая применялась при формировании управления $u^*(t)$ на $[t_0, t_1)$:

$$f_*^{(2)} = \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k f(t_1, y^{(1)}, u^{(k)}) + s(\Delta), \tag{4.8}$$

где $||s(\Delta)|| \leqslant \varkappa(\Delta)$, а α_k и $u^{(k)}$ удовлетворяют соотношениям $\alpha_k \geqslant 0$ и $u^{(k)} \in P$ при $k = \overline{1, m+1}$, $\sum\limits_{k=1}^{m+1} \alpha_k = 1$.

Управление $u^*(t)$, $t \in [t_1, t_2)$, применим к системе (1.1) с начальным условием $x^*(t_1) = x^{(1)}$. Это управление $u^*(t)$, $t \in [t_1, t_2)$, породит движение $x^*(t)$, $x^*(t_1) = x^{(1)}$, системы (1.1) на промежутке $[t_1, t_2]$, приходящее в момент t_2 в точку $x^*(t_2)$, удовлетворяющую неравенству

$$\varepsilon^{(2)}(\Delta) = \rho(x^*(t_2), \widehat{W}^a(t_2)) \leqslant e^{L\Delta}\varepsilon^{(1)}(\Delta) + \Delta\sigma(\Delta),$$

где $\sigma(\Delta)$, $\Delta > 0$, определено выше в (4.7)

Так, повторяя процедуру формирования кусочно-постоянного управления $u^*(t)$ для каждого очередного промежутка $[t_j, t_{j+1}]$ разбиения Γ, мы продолжим движение $x^*(t)$ системы (1.1) на весь промежуток $[t_0, \vartheta]$.

На каждом промежутке $[t_j, t_{j+1}]$ справедлива следующая оценка величины $\varepsilon^{(j+1)}(\Delta) = \rho(x^*(t_{j+1}), \widehat{W}^a(t_{j+1}))$:

$$\varepsilon^{(j+1)}(\Delta) \leqslant e^{L\Delta}\varepsilon^{(j)}(\Delta) + \Delta\sigma(\Delta). \tag{4.9}$$

Учитывая все оценки вида (4.9), в итоге получаем

$$\varepsilon^{(N)} = \rho(x^*(t_N), \widehat{W}^a(t_N)) \leqslant e^{LN\Delta}\varepsilon^{(0)} + (e^{L(N-1)\Delta} + e^{L(N-2)\Delta} + \ldots + e^{L\Delta} + 1)\Delta\sigma(\Delta). \quad (4.10)$$

Из (4.10) следует оценка

$$\begin{gathered}\rho(x^*(t_N), \widehat{W}^a(t_N)) \leqslant e^{L(\vartheta-t_0)}\varepsilon^{(0)} + \frac{e^{NL\Delta}-1}{e^{L\Delta}-1}\Delta\sigma(\Delta) \leqslant \\ \leqslant e^{L(\vartheta-t_0)}\varepsilon^{(0)} + L^{-1}(e^{L(\vartheta-t_0)}-1)\sigma(\Delta),\end{gathered} \quad (4.11)$$

где $\sigma(\Delta) = \omega^*(\Delta) + LK\Delta + \varkappa(\Delta) + \lambda^*(\Delta)$, $\Delta > 0$.

В частности, когда мы выбираем начальную точку $x^{(0)}$ для движения $x^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, системы (1.1) в множестве $\widehat{W}^a(t_0)$, то получаем $\varepsilon^{(0)} = 0$ и, значит, для такого движения $x^*(t)$ имеем

$$\rho(x^*(\vartheta), \widehat{W}^a(\vartheta)) \leqslant L^{-1}(e^{L(\vartheta-t_0)}-1)\sigma(\Delta).$$

Учитывая также, что в выражение для величины $\sigma(\Delta)$ входит $\lambda^*(\Delta) = 2\zeta^*(\Delta) + \omega^*(\Delta) + LK\Delta$, представим $\sigma(\Delta)$ в виде $\sigma(\Delta) = 2\zeta^*(\Delta) + 2(\omega^*(\Delta) + LK\Delta) + \varkappa(\Delta)$, $\Delta > 0$.

В начале этого параграфа (с. 499) мы предположили, что в процессе вычисления множеств $\widehat{W}^a(t_j) = \widehat{Z}^a(\tau_i)$, $\tau_i + t_j = t_0 + \vartheta$, $i = \overline{0, N}$, наши вычислительные возможности позволяют нам избежать прореживания множеств $\widehat{Z}^a(\tau_i) = Z^{(\Delta)}(\tau_i, \tau_{i-1}, \widehat{Z}^a(\tau_{i-1}))$, $i = \overline{1, N}$, и тем самым имеет место равенство $\mathcal{W}^a(t_j) = \widehat{W}^a(t_j)$, $j = \overline{0, N}$.

При этом предположении выполняется $\chi^*(\Delta) = 0$ при $\Delta = \Delta(\Gamma) > 0$.

В таком случае оценка (3.5) принимает вид

$$\begin{gathered}d(\widehat{W}^a(t_j), \widehat{W}(t_j)) \leqslant e^{L(\vartheta-t_0)}\Big(\varkappa(\delta) + \frac{\delta\sqrt{m}}{2} + \\ +(\vartheta-t_0)(\zeta^*(\Delta) + \omega^*(\Delta) + LK\Delta)\Big), \quad j = \overline{0, N},\end{gathered} \quad (4.12)$$

при $\Delta \in (0, L^{-1}\ln 2]$.

Учитывая оценки (4.11) и (4.12), получаем оценку сверху расстояния от конечной точки $x^*(\vartheta)$ движения $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x^{(0)}$, системы (1.1) до множества $\widehat{W}(\vartheta) = \widehat{Z}(\tau_0) = M(\gamma)$:

$$\begin{gathered}d(x^*(\vartheta), M(\gamma)) \leqslant d(x^*(\vartheta), \widehat{W}^a(\vartheta)) + d(\widehat{W}^a(\vartheta), \widehat{W}(\vartheta)) \leqslant \\ \leqslant e^{L(\vartheta-t_0)}\varepsilon^{(0)} + L^{-1}(e^{L(\vartheta-t_0)}-1)\sigma(\Delta) + \\ + e^{L(\vartheta-t_0)}\Big(\varkappa(\delta) + \frac{\delta\sqrt{m}}{2} + (\vartheta-t_0)(\zeta^*(\Delta) + \omega^*(\Delta) + LK\Delta)\Big)\end{gathered} \quad (4.13)$$

при $\Delta \in (0, L^{-1}\ln 2]$ и $\delta > 0$ таком, что $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma) \neq \varnothing$ и $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c(\delta))$ ограничено; здесь $c(\delta) = L_*\delta\sqrt{m}$.

В случае когда начальная точка $x^{(0)}$ для движения $x^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, системы (1.1) выбирается из $\widehat{W}^a(t_0)$, полагаем, что $\varepsilon^{(0)} = 0$. В этом случае в правой части оценки (4.13) исчезает первое слагаемое.

В итоге имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть начальная точка $x^*(t_0) = x^{(0)}$ для движения $x^*(t)$ системы (1.1) удовлетворяет равенству $\rho(x^{(0)}, \widehat{\mathcal{W}}^a(t_0)) = \rho(x^{(0)}, \widehat{W}^a(t_0)) = \varepsilon^{(0)}$, диаметр $\Delta = \Delta(\Gamma)$ разбиения Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$ ($\Delta = \Delta_j = t_{j+1} - t_j = \dfrac{1}{N}(\vartheta - t_0)$, $j = \overline{0, N-1}$) удовлетворяет неравенству $0 < \Delta \leqslant L^{-1}\ln 2$, параметр $\delta > 0$ сетки $S^{(\delta)}$ таков, что $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma) \neq \varnothing$ и $L_\varphi^{(\delta)}(\gamma + c(\delta))$ ограничено, где $c(\delta) = L_*\delta\sqrt{m}$. Тогда кусочно-постоянное управление $u^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, определенное на каждом полуинтервале $[t_j, t_{j+1})$ разбиения Γ соотношениями вида (4.8), порождает движение $x^*(t)$ системы (1.1), удовлетворяющее оценке (4.13).*

§ 5. Примеры

В этом параграфе приведем примеры нелинейных управляемых систем на конечном промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, которые иллюстрируют возможности алгоритмов решения задачи о сближении, представленных в предыдущих параграфах.

Пример 1 (трансляционный осциллятор с ротационным актуатором). В качестве управляемой механической системы на промежутке $[t_0, \vartheta] = [0, 5]$ возьмем изображенную на рис. 8 систему трансляционного осциллятора с ротационным актуатором [5, с. 30].

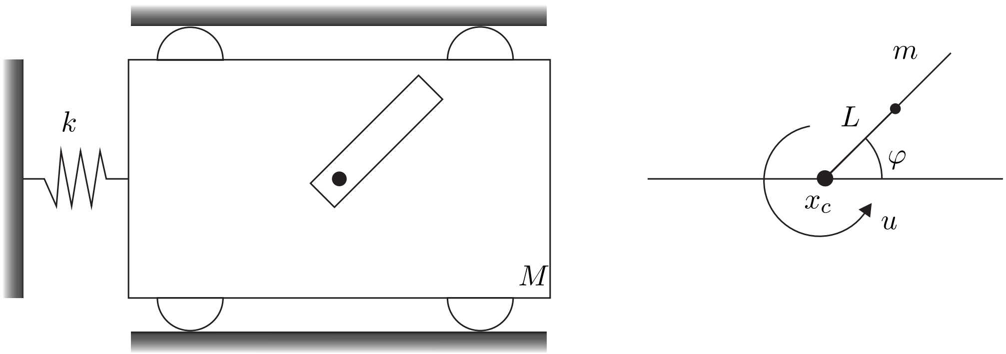

Рис. 8. Трансляционный осциллятор с ротационным актуатором

Система включает в себя платформу массы M, соединенную с неподвижной вертикальной поверхностью пружиной с линейной жесткостью, характеризуемой коэффициентом k. Платформа может двигаться только в горизонтальной плоскости, параллельной оси пружины. На платформе установлен эксцентрик массы m, приводимый в движение электродвигателем постоянного тока и имеющий момент инерции I относительно центра масс, расположенного на расстоянии L от оси вращения. Обозначим управляющий момент, приложенный к эксцентрику через u. Вращающий эксцентрик создает управляющую силу, используемую для демпфирования поступательного движения платформы. Математические уравнения системы в предположении отсутствия силы трения имеют вид

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_2, \\ \dot{x}_2 & = & \dfrac{(m+M)u - mL\cos x_1(mLx_2^2\sin x_1 - kx_3)}{(I+mL^2)(m+M) - m^2L^2\cos^2 x_1}, \\ \dot{x}_3 & = & x_4, \\ \dot{x}_4 & = & \dfrac{(I+mL^2)(mLx_2^2\sin x_1 - kx_3) - mL\cos x_1 u}{(I+mL^2)(m+M) - m^2L^2\cos^2 x_1}; \end{array}\right. \tag{5.1}$$

здесь $x_1 = x_c$, $x_2 = \dot{x}_c$, $x_3 = \varphi$, $x_4 = \dot{\varphi}$, x_c — координата точки крепления эксцентрика к платформе.

В данном примере разбиение Γ промежутка $[t_0, \vartheta] = [0, 5]$ имеет шаг $\Delta = 0.01$, $N = 500$, $t_0 = 0$, $t_N = 5$; управление u представлено конечным набором значений из $[-1, 1]$ с шагом 0.5. Управляемая система имеет следующие параметры:

$$M = 1.0, \qquad m = 0.5, \qquad L = 1, \qquad k = 0.05, \qquad I = 1.5.$$

Целевое множество M представляет собой единичный четырехмерный куб с центром в начале координат, то есть $M = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon \|x\|_\infty \leqslant 0.5\}$.

Рассматривается задача о приведении механической системы «трансляционный осциллятор с ротационным актуатором» в момент времени ϑ на целевое множество M в пространстве $\mathbb{R}^4$.

Для решения поставленной задачи с привлечением алгоритмов, описанных в § 3 и § 4, вводится разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}, t_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ и для него проводятся вычисления на ЭВМ последовательности $\{\widehat{\mathcal{W}}^a(t_j)\}$ множеств $\widehat{\mathcal{W}}^a(t_j) \subset \mathbb{R}^4$, $j = N, \ldots, 0$, $\widehat{\mathcal{W}}^a(t_N)) = M$, аппроксимирующих множество разрешимости W.

При пошаговом вычислении множеств $\widehat{Z}^a(\tau_i)$, начиная с некоторых номеров i, проявляются тенденции распространения множеств $\widehat{Z}^a(\tau_i)$ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^4$, и возникает потребность в прореживании множеств $\widehat{Z}^a(\tau_i) = Z^{(\Delta)}(\tau_i, \tau_{i-1}, \widehat{Z}^a(\tau_{i-1}))$ с помощью процедур, подробно описанных, например, в [10]. Отметим, что в силу такой особенности множеств $\widehat{\mathcal{W}}^a(t_j)$, $j = N, \ldots, 0$, их понятное пошаговое вычисление осуществляется как пошаговое вычисление множеств $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i) = \Omega^{(\Delta)}(Z^{(\Delta)}(\tau_i, \tau_{i-1}, \widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_{i-1})))$, $i = 1, \ldots, N$, где оператор $\Omega^{(\Delta)}(Z)$ означает процедуру прореживания множества $Z \subset \mathbb{R}^4$ (см. § 3).

Ниже приводится графическое представление решения упомянутой задачи. На рис. 9–12 представлены результаты численного моделирования множеств $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)$ ($\tau_i = 2.5$ и $\tau_i = 5.0$) для целевого множества M из примера 1. График движения системы (5.1) представлен на рис. 13–14, разрешающее кусочно-постоянное управление $u^*(t)$ представлено на рис. 15.

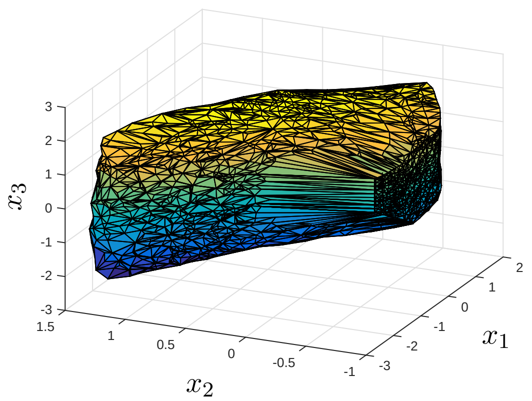

Рис. 9. Проекция множества $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)$ при $\tau_i = 2.5$ на подпространство $\mathbb{R}_{1,2,3}$ в примере 1

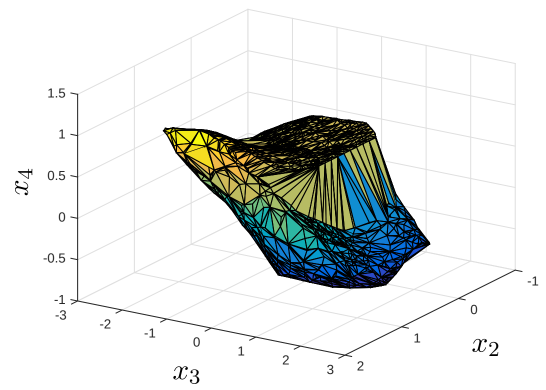

Рис. 10. Проекция множества $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)$ при $\tau_i = 2.5$ на подпространство $\mathbb{R}_{2,3,4}$ в примере 1

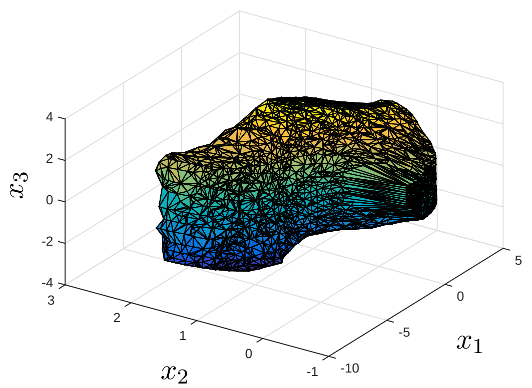

Рис. 11. Проекция множества $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)$ при $\tau_i = 5.0$ на подпространство $\mathbb{R}_{1,2,3}$ в примере 1

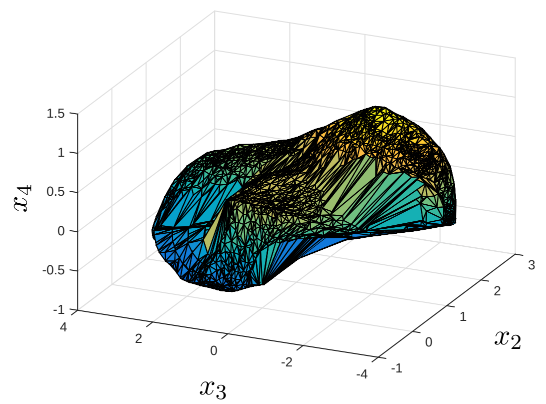

Рис. 12. Проекция множества $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)$ при $\tau_i = 5.0$ на подпространство $\mathbb{R}_{2,3,4}$ в примере 1

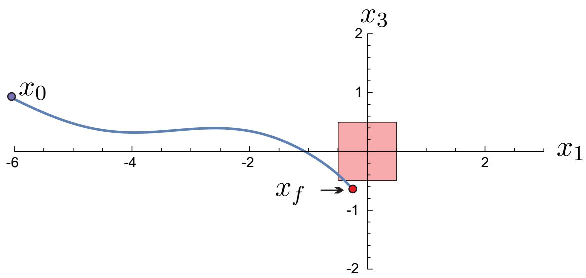

Рис. 13. Проекция на подпространство $\mathbb{R}_{1,3}$ движения системы (5.1) в примере 1

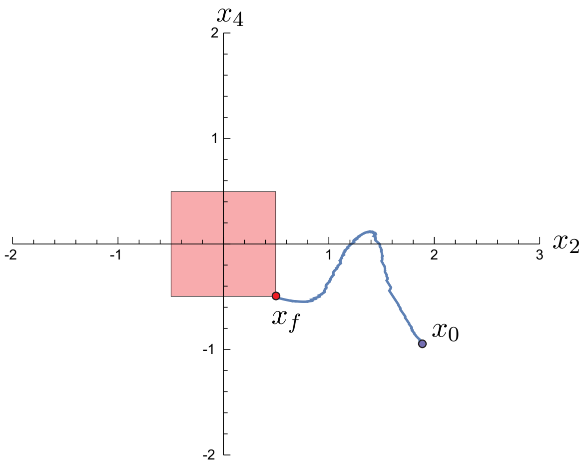

Рис. 14. Проекция на подпространство $\mathbb{R}_{2,4}$ движения системы (5.1) в примере 1

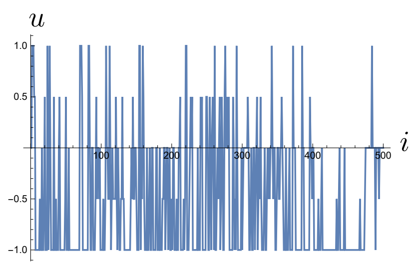

Рис. 15. Управление $u^*(t)$ для системы (5.1) в примере 1 (i — номер шага)

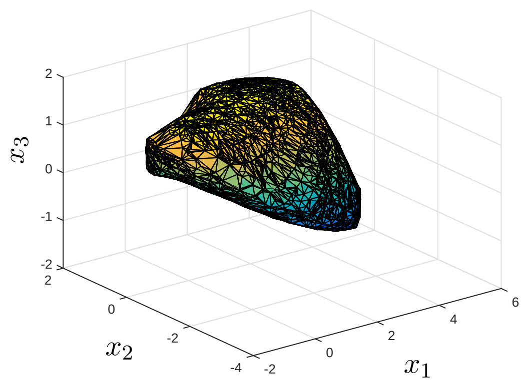

Рис. 16. Множество $\widehat{\mathscr{X}}^a(\tau_i)$ при $\tau_i = 2.5$ в примере 2.

Пример 2 (твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки). Пусть задано твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, поведение которого описывается уравнениями Эйлера:

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1 &= (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 + u_1, \\ J_2\dot{\omega}_2 &= (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 + u_2, \\ J_3\dot{\omega}_3 &= (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 + u_3; \end{cases} \tag{5.2}$$

здесь ω_1, ω_2 и ω_3 — компоненты вектора угловой скорости вдоль главных осей; u_1, u_2 и u_3 — моменты, приложенные вокруг главных осей, рассматриваемые как компоненты управления $u \in \mathbb{R}^3$, воздействующего на твердое тело; J_1, J_2 и J_3 — главные моменты инерции.

В данном примере рассмотрим конкретные уравнения, в которых $J_1 = 1$, $J_2 = 2$, $J_3 = 3$ и ограничение на управление u есть куб $P = \{u = (u_1, u_2, u_3)\colon \max\limits_{i=\overline{1,3}} |u_i| \leqslant 1\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Перейдя от переменных ω_1, ω_2, ω_3 в уравнении (5.2) к записи в переменных x_1, x_2 и x_3 и учитывая приведенные значения J_1, J_2, J_3, получим

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2x_3 + u_1, \\ 2\dot{x}_2 &= 2x_3x_1 + u_2, \\ 3\dot{x}_3 &= -x_1x_2 + u_3. \end{cases} \tag{5.3}$$

В данном примере параметры задачи, такие как разбиение Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$, шаг Δ, N, t_0, t_N, аналогичны данным из примера 1. Целевое множество в данном примере выберем одноточечным: $M = \{x_f\}$, где $x_f = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

Ниже приводится графическое представление решения упомянутой задачи. На рис. 16–18 представлены результаты численного моделирования множеств $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)$ ($\tau_i = 2.5$, $\tau_i = 3.75$ и $\tau_i = 5.0$) для целевого множества M из примера 2. График движения системы (5.3) представлен на рис. 19. Проекции разрешающего кусочно-постоянного управления $u^*(t)$ представлены на рис. 20–22.

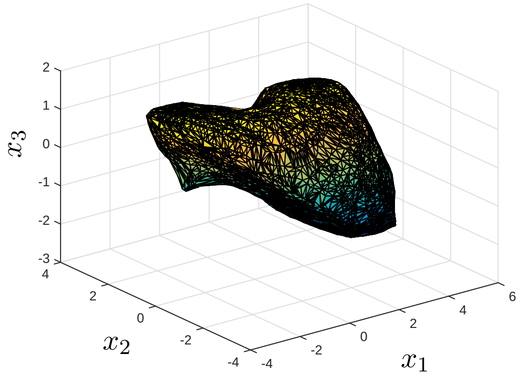

Рис. 17. Множество $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)$ при $\tau_i = 3.75$ в примере 2

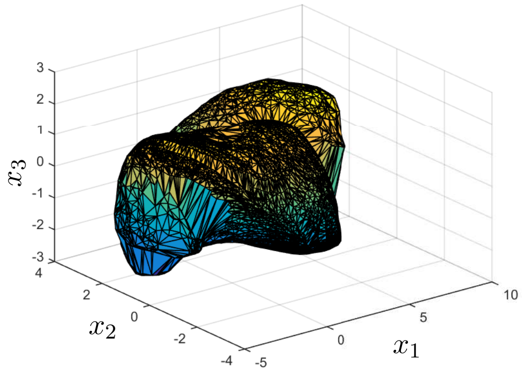

Рис. 18. Множество $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)$ при $\tau_i = 5.0$ в примере 2

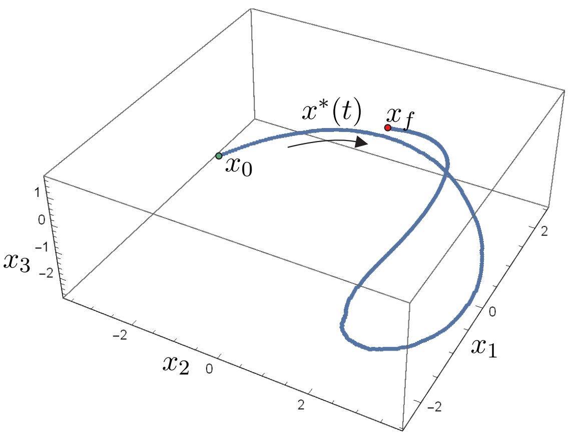

Рис. 19. Движение системы (5.3) в примере 2

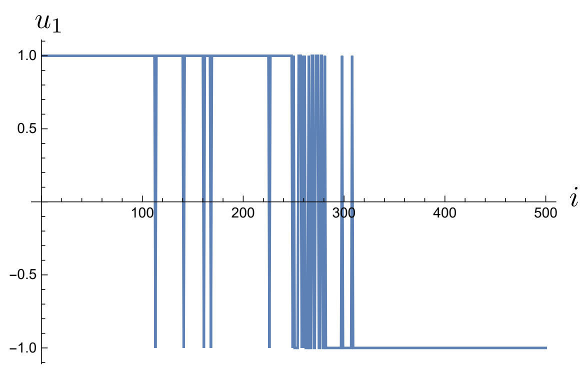

Рис. 20. Проекция управления $u^*(t)$ для системы (5.3) в примере 2 на пространство $\mathbb{R}_1$

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006. Работа первого и второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18–01–00221). Работа третьего автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18–01–00264).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А.Б. Избранные труды. М.: Изд-во Московского университета, 2009. 756 с.
2. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. О разрешимости задач гарантирующего управления для частично наблюдаемых линейных динамических систем // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2012. Т. 277. С. 152–167. http://mi.mathnet.ru/tm3387

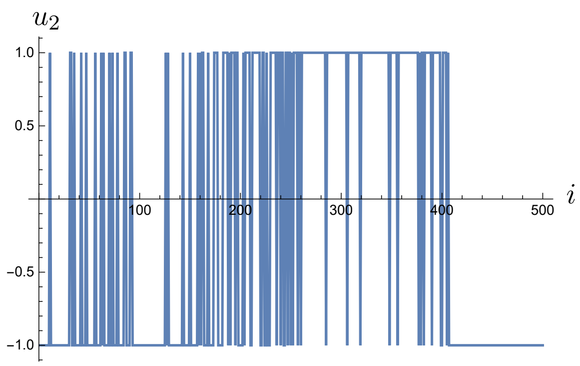

Рис. 21. Проекция управления $u^*(t)$ для системы (5.3) в примере 2 на пространство $\mathbb{R}_2$

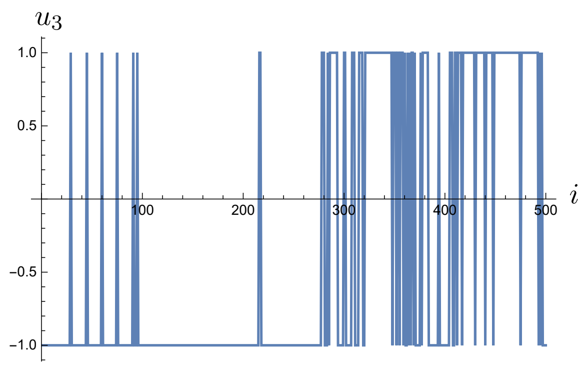

Рис. 22. Проекция управления $u^*(t)$ для системы (5.3) в примере 2 на пространство $\mathbb{R}_3$

3. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
4. Ухоботов В.И., Изместьев И.В. Однотипная задача импульсной встречи в заданный момент времени с терминальным множеством в форме кольца // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 197–211. DOI: 10.20537/vm150205
5. Халил Х.К. Нелинейные системы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 812 с.
6. Ушаков А.В. Об одном варианте приближенного построения разрешающих управлений в задаче о сближении // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 4. С. 94–107. DOI: 10.20537/vm120408
7. Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С. Экстремальное прицеливание в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 4. С. 573–586. `https://elibrary.ru/item.asp?id=13060015`
8. Ушаков В.Н., Ухоботов В.И., Ушаков А.В., Паршиков Г.В. К решению задач о сближении управляемых систем // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 276–291. DOI: 10.1134/S0371968515040214
9. Ушаков В.Н., Ершов А.А. К решению задач управления с фиксированным моментом окончания // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 543–564. DOI: 10.20537/vm160409
10. Ершов А.А., Ушаков В.Н. О сближении управляемой системы, содержащей неопределенный параметр // Математический сборник. 2017. Т. 208. № 9. С. 56–99. DOI: 10.4213/sm8761

Поступила в редакцию 13.10.2018

Ушаков Владимир Николаевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16,
ведущий научный сотрудник, Уральский федеральный университет, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Ершов Александр Анатольевич, к. ф.-м. н., научный сотрудник, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16,
старший научный сотрудник, Уральский федеральный университет, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: ale10919@yandex.ru

Паршиков Григорий Викторович, научный сотрудник, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: grigory.parshikov@uran.ru

МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 4

V. N. Ushakov, A. A. Ershov, G. V. Parshikov

On reducing the motion of a controlled system to a Lebesgue set of a Lipschitz function

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 4, pp. 489–512 (in Russian).

Keywords: control system, Lebesgue set, solvability set, optimal control.

MSC2010: 49M25

DOI: 10.20537/vm180405

We consider a nonlinear controlled system in a finite-dimensional Euclidean space defined on a finite time interval. One of the main problems of mathematical control theory is studied: the problem of approaching a phase vector of a controlled system with a compact target set in the phase space at a fixed time instant. In this paper, a Lebesgue set of a scalar Lipschitz function defined on the phase space is a target set. The mentioned approach problem is closely connected with many important and key problems of control theory and, in particular, with the problem of optimally reducing a controlled system to a target set. Due to the complexity of the approach problem for nontrivial controlled systems, an analytical representation of solutions is impossible even for relatively simple controlled systems. Therefore, in the present work, we study first of all the issues related to the construction of an approximate solution of the approach problem. The construction of an approximate solution by the method described in the paper is primarily concerned with the design of the integral funnel of the controlled system, presented in the so-called "reverse" time. To date, there are several algorithms for constructing a resolving program control in the approach problem. This paper presents an algorithm for constructing a control based on the maximum attraction of the system's motion to the solvability set of the approach problem. Examples are provided.

Funding. The work was supported by Act 211 of the Government of the Russian Federation, contract no. 02.A03.21.0006. The studies of the first and second authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18–01–00221). The study of the third author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18–01–00264).

REFERENCES

1. Kurzhanskii A.B. *Izbrannye trudy* (Selected works), Moscow: Moscow State University, 2009, 756 p.
2. Kryazhimskiy A.V., Osipov Yu.S. On the solvability of problems of guaranteeing control for partially observable linear dynamical systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2012, vol. 277, no. 1, pp. 144–159. DOI: 10.1134/S0081543812040104
3. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Game problems about the meeting of movements), Moscow: Nauka, 1970, 420 p.
4. Ukhobotov V.I., Izmest'ev I.V. Single-type problem of pulse meeting in fixed time with terminal set in form of a ring, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2015, vol. 25, issue 2, pp. 197–211 (in Russian). DOI: 10.20537/vm150205
5. Khalil Kh.K. *Nelineinye sistemy* (Nonlinear systems), Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2009, 812 p.
6. Ushakov A.V. On one version of approximate permitting control calculation in a problem of approaching, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2012, issue 4, pp. 94–107 (in Russian). DOI: 10.20537/vm120408
7. Ganebnyi S.A., Kumkov S.S., Patsko V.S. Extremal aiming in problems with an unknown level of dynamic disturbance, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, issue 4, pp. 411–420. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2009.08.010
8. Ushakov V.N., Ukhobotov V.I., Ushakov A.V., Parshikov G.V. On solving approach problems for control systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, issue 1, pp. 263–278. DOI: 10.1134/S0081543815080210
9. Ushakov V.N., Ershov A.A. On the solution of control problems with fixed terminal time, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 543–564. DOI: 10.20537/vm160409
10. Ershov A.A., Ushakov V.N. An approach problem for a control system with an unknown parameter, *Sbornik: Mathematics*, 2017, vol. 208, no. 9, pp. 1312–1352. DOI: 10.1070/SM8761

Received 13.10.2018

Ushakov Vladimir Nikolaevich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Main Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
Leading Researcher, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Ershov Aleksandr Anatol'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
Senior Researcher, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: ale10919@yandex.ru

Parshikov Grigory Viktorovich, Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: grigory.parshikov@uran.ru