МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 4

УДК 517.958, 530.145.61

© *М. С. Сметанина*

# АСИМПТОТИКА УРОВНЕЙ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА ДЛЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛЕНКИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В работе рассматривается трехмерный оператор Шрёдингера для кристаллической пленки с нелокальным потенциалом, представляющим собой сумму оператора умножения на функцию и оператора ранга два («сепарабельного потенциала»), вида $V = W(x) + \lambda_1(\cdot, \phi_1)\phi_1 + \lambda_2(\cdot, \phi_2)\phi_2$. Здесь функция $W(x)$ экспоненциально убывает по переменной $x_3$, функции $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ линейно независимы, блоховские по переменным $x_1$, $x_2$ и экспоненциально убывающие по переменной $x_3$. Потенциалы данного рода возникают в теории псевдопотенциала. Под уровнем оператора Шрёдингера понимается его собственное значение или резонанс. Доказаны существование и единственность уровня данного оператора вблизи нуля, получена его асимптотика.

*Ключевые слова*: уравнение Шрёдингера, нелокальный потенциал, собственные значения, резонансы, асимптотика.

DOI: 10.20537/vm180403

## Введение

Математическая теория возмущений, происходящая из соответствующей квантовой теории [1], существует несколько десятилетий, однако до сих пор сохраняет актуальность и возможности развития (см., например, исследования собственных значений и резонансов в различных ситуациях [2–4], а также оценки собственных значений в лакунах [5]). При этом одним из основных направлений в теории возмущений является исследование оператора Шрёдингера [1].

Как известно, оператор Шрёдингера может рассматриваться как оператор энергии (гамильтониан) электрона (см., например, монографию [6]). Хотя из соображений простоты вычислений и исследования в физической литературе часто используются локальные потенциалы (операторы умножения на функцию), однако в методе Хартри–Фока [7] и в методике псевдопотенциала [8] строятся потенциалы, не являющиеся локальными, а также достаточно часто в физике рассматриваются потенциалы, представляющие собой конечномерные операторы (см., например, [9]). В то же время математические исследования оператора Шрёдингера с нелокальным потенциалом проводились лишь эпизодически. Так, например, в работе [10] исследованы собственные значения и резонансы оператора Шрёдингера с возмущенным нелокальным ступенчатым потенциалом. Собственные значения оператора Шрёдингера с малыми потенциалами на оси и плоскости исследовались в статьях [11–13], однако в них не рассматриваются резонансные состояния, которые играют большую роль в теории рассеяния частиц (см., например, [14, 15]). Задача рассеяния для разностного оператора с нелокальным потенциалом изучалась в работе [16].

В настоящей статье получены условия существования и исследовано асимптотическое поведение уровней (т. е., по определению, собственных значений и резонансов) вблизи границы непрерывного спектра оператора Шрёдингера для трехмерной кристаллической пленки с нелокальным потенциалом, представляющим собой сумму оператора умножения на функцию и оператора ранга два («сепарабельного потенциала»); в этом случае потенциал является периодическим по двум переменным и изучение оператора в трехмерном пространстве сводится к его исследованию в бесконечной по третьей переменной ячейке. В значительно более простом одномерном случае подобные результаты были получены в работе [17].

## § 1. Функция Грина

Рассмотрим оператор Шрёдингера вида

$$H = -\Delta + V(x),$$

где $\Delta$ — оператор Лапласа, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, потенциал $V(x)$ предполагается вещественным, периодическим по переменным $x_1, x_2$, с периодом единица и убывающим при $|x_3| \to \infty$. Операторы подобного рода возникают в квантовой теории твердого тела [18]. Как известно (см. [1, 19]), изучение оператора $H$ с периодическим по переменным $x_1, x_2$ потенциалом сводится к изучению семейства операторов $H(k_\|) = -\Delta + V(x)$ (здесь и далее $k_\| = (k_1, k_2)$), определенных на (достаточно гладких) блоховских по переменным $x_1, x_2$ функциях из $L^2(\Omega)$, где $\Omega = [0,1]^2 \times \mathbb{R}$ — ячейка, $k_\| \in \Omega^* = [-\pi, \pi)^2$ — квазиимпульс.

**Определение 1.** *Блоховские по $x_1, x_2$ функции* — это сужение на $\Omega$ функций $\psi(x)$, определенных на $\mathbb{R}^3$ и удовлетворяющих условию

$$\psi(x + (n_\|, 0)) = e^{i(k_\|, n_\|)}\psi(x), \quad n_\| \in \mathbb{Z}^2.$$

Семейство операторов $\widehat{H} = \{H(k_\|)\}_{k_\| \in \Omega^*}$ образует разложение $H$ в прямом интеграле пространств (см. [1])

$$\int_{\Omega^*}^{\oplus} L^2(\Omega)\, dk \equiv L^2(\Omega^*, L^2(\Omega)) \cong L^2(\Omega \times \Omega^*).$$

В работе изучается оператор Шрёдингера в $L^2(\Omega)$ с нелокальным потенциалом, соответствующий кристаллической пленке вида

$$H(k_\|) = -\Delta + W(x) + V_s, \tag{1.1}$$

где $W(x)$ — вещественная функция, удовлетворяющая оценке $|W(x)| \leqslant Ce^{-a|x_3|}$; $C, \alpha = \text{const}$, причем $\alpha > 0$ (в дальнейшем функции, удовлетворяющие неравенству такого вида, будем называть экспоненциально убывающими по переменной $x_3$); $V_s = \lambda_1(\cdot, \phi_1)\phi_1 + \lambda_2(\cdot, \phi_2)\phi_2$ — оператор ранга 2 («сепарабельный потенциал» [20]); функции $\phi_1$, $\phi_2$ линейно независимы, блоховские по переменным $x_1$, $x_2$ и экспоненциально убывающие по $x_3$; $\lambda_1$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ — некоторые постоянные.

В дальнейшем будем использовать обозначения $H_0(k_\|) = -\Delta$, $H_s(k_\|) = -\Delta + V_s$ для операторов Шрёдингера и $R_0(k_\|, E) = (H_0(k_\|) - E)^{-1}$, $R_s(k_\|, E) = (H_s(k_\|) - E)^{-1}$ для их резольвент. Через $(\psi, \phi)$ будет обозначаться не только скалярное произведение функций $\psi$, $\phi \in L^2(\Omega)$, но и, в случае когда одна из функций не принадлежит $L^2(\Omega)$, вообще интеграл $\displaystyle\int_\Omega \psi(x)\overline{\phi(x)}\, dx$. Как известно, ядро резольвенты оператора $H_0(k_\|)$ имеет вид (см. [21])

$$G_0(x, y, k_\|, E) = -\sum_{n_\| \in \mathbb{Z}^2} \frac{\exp(i((k_\| + 2\pi n_\|, \sqrt{E - (k_\| + \pi n_\|)^2}), (x_\| - y_\|, |x_3 - y_3|)))}{2i\sqrt{E - (k_\| + 2\pi n_\|)^2}},$$

где $x = (x_\|, x_3)$, $y = (y_\|, y_3) \in \Omega$, $\operatorname{Im}\sqrt{E - (k_\| + 2\pi n_\|)^2} > 0$.

Согласно [22] оно представимо в виде

$$G_0(x, y, k_\|, E) = -\frac{\exp(i((k_\|, \sqrt{E - k_\|^2}), (x_\| - y_\|, |x_3 - y_3|)))}{2i\sqrt{E - k_\|^2}} + G_1(x - y, k_\|, E), \tag{1.2}$$

где $G_1(x - y, k_\|, E)$ представляет собой аналитическую $L^2(\Omega)$-значную функцию параметра $E$ в комплексной окрестности точки $k_\|$. Заметим, что отсюда и из утверждения об относительно компактных возмущениях [1] легко следует, что $\sigma_{ess}(H(k_\|)) = \sigma_{ess}(H_s(k_\|)) = \sigma(H_0(k_\|)) =$

$= [k_\parallel^2, \infty)$, где через $\sigma(A)$ и $\sigma_{ess}(A)$ обозначаются спектр и существенный спектр оператора $A$ соответственно (см. [23, предложение 2.1]).

Будем в дальнейшем пользоваться обозначениями вида $G_0(x,y,k)$ вместо $G_0(x,y,k_\parallel,E)$, где $k=(k_\parallel,k_3)$, $k_3=\sqrt{E-k_\parallel^2}$. Функция Грина $G_0$ оператора $H_0(k_\parallel)$ имеет ветвление второго порядка по $E$ в комплексной окрестности точки $k_\parallel^2$; по параметру $k_3$ функция $G_0$ мероморфна в комплексной окрестности нуля. В то время когда $k_3$ пробегает окрестность нуля, $E$ пробегает двулистную риманову поверхность (на втором «нефизическом» листе располагаются резонансы, см. определение ниже).

Из (1.2) получаем

$$\begin{aligned} G_0(x,y,k) &= -\frac{e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)}}{2ik_3} - \frac{e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)}(e^{ik_3|x_3-y_3|}-1)}{2ik_3} + G_1(x-y,k) = \\ &= -\frac{e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)}}{2ik_3} + G^{(1)}(x,y,k), \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $G^{(1)}$ обладает тем свойством, что $\sqrt{W(x)}G^{(1)}(x,y,k)\sqrt{W(y)}$ (а также $G^{(1)}(x,y,k)W(y)$ и $G^{(1)}(x,y,k)\sqrt{W(y)}$) представляет собой $L^2(\Omega\times\Omega)$-значную функцию параметра $k_3$ в окрестности нуля (существование производной нетрудно доказать, применяя теорему Лебега о предельном переходе к конечно-разностному отношению, а затем используя векторнозначный вариант теоремы Вейерштрасса о равномерно сходящемся ряде, составленном из аналитических функций (см. подробное доказательство для аналогичного случая в работе [24])). Сказанное, очевидно, справедливо также для функции $G_1(x-y,k)$.

**Определение 2.** Будем говорить, что $k_3 \in \mathbb{C}$ или соответствующее $E = k^2 = k_\parallel^2 + k_3^2$ является *резонансом* оператора $H$, если существует ненулевое экспоненциально возрастающее решение интегрального уравнения

$$\psi(x) = -\int_\Omega G_0(x,y,k)V\psi(y)\,dy.$$

Заметим, что резонансы отвечают $k_3$ с $\operatorname{Im} k_3 < 0$ или второму листу римановой поверхности для функции $\sqrt{E}$.

Заметим также, что данное определение эквивалентно для локальных потенциалов обычному определению резонанса [9] как полюса резольвенты $R(E) = (H-E)^{-1}$; это следует из леммы 1 [25] и аналитической теоремы Фредгольма.

Под уровнем оператора Шрёдингера будем понимать его собственное значение или резонанс. В настоящей работе доказаны существование и единственность уровня оператора Шрёдингера вида (1.1) и получена его асимптотика.

## § 2. Исследование уровней оператора Шрёдингера

В следующем утверждении, доказательство которого проводится аналогично одномерному случаю (см. [17]), получена формула для резольвенты $R_s(k_\parallel,E)$.

**Лемма 1.** *Предположим, что*

$$\Delta = (1+\lambda_1(R_0(k_\parallel,E)\phi_1,\phi_1))(1+\lambda_2(R_0(k_\parallel,E)\phi_2,\phi_2)) - \lambda_1\lambda_2(R_0(k_\parallel,E)\phi_1,\phi_2)(R_0(k_\parallel,E)\phi_2,\phi_1) \neq 0.$$

*Тогда резольвента $R_s(k_\parallel,E)$ оператора $H_s(k_\parallel)$ задается формулой*

$$\begin{aligned} \psi(x) = R_s(E)\phi(x) = R_0(x) - \\ -\lambda_1 \frac{(R_0\phi,\phi_1)(1+\lambda_2(R_0\phi_2,\phi_2)) + \lambda_2(R_0\phi,\phi_2)(R_0\phi_2,\phi_1)}{(1+\lambda_1(R_0\phi_1,\phi_1))(1+\lambda_2(R_0\phi_2,\phi_2)) - \lambda_1\lambda_2(R_0\phi_1,\phi_2)(R_0\phi_2,\phi_1)} R_0\phi_1 - \\ -\lambda_2 \frac{(R_0\phi,\phi_2)(1+\lambda_1(R_0\phi_1,\phi_1)) + \lambda_1(R_0\phi,\phi_1)(R_0\phi_1,\phi_2)}{(1+\lambda_1(R_0\phi_1,\phi_1))(1+\lambda_2(R_0\phi_2,\phi_2)) - \lambda_1\lambda_2(R_0\phi_1,\phi_2)(R_0\phi_2,\phi_1)} R_0\phi_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

*Здесь для удобства вместо $R_0(k_\parallel,E)$ используется $R_0$.*

Далее введем следующие обозначения:

$$\Delta_1(\phi) = (R_0\phi, \phi_1)(1 + \lambda_2(R_0\phi_2, \phi_2)) + \lambda_2(R_0\phi, \phi_2)(R_0\phi_2, \phi_1), \tag{2.2}$$

$$\Delta_2(\phi) = (R_0\phi, \phi_2)(1 + \lambda_1(R_0\phi_1, \phi_1)) + \lambda_1(R_0\phi, \phi_1)(R_0\phi_1, \phi_2). \tag{2.3}$$

Согласно лемме 1 и обозначениям (2.2) и (2.3) формула (2.1) резольвенты оператора $H_s(k_\parallel)$ примет вид

$$R_s(k_\parallel, E)\phi = R_0(k_\parallel, E)\phi - \lambda_1 \frac{\Delta_1(\phi)}{\Delta} R_0(k_\parallel, E)\phi_1 - \lambda_2 \frac{\Delta_2(\phi)}{\Delta} R_0(k_\parallel, E)\phi_2, \tag{2.4}$$

где $\phi \in L^2(\Omega)$. При этом $E < k_\parallel$ является собственным значением оператора $H_s(k_\parallel)$ в том и только в том случае, если $\Delta = 0$. Из формулы видно, что ядро оператора $\sqrt{W(x)}R_s(k)\sqrt{W(x)}$ вместе с ядром $\sqrt{W(x)}G_0(x, y, k)\sqrt{W(x)}$ оператора $\sqrt{W(x)}R_0(k)\sqrt{W(x)}$ продолжается как $L^2(\Omega \times \Omega)$-значная мероморфная функция параметра $k_3$ в окрестности точки $k_3 = 0$.

Введем следующие обозначения:

$$p(x, y, k_\parallel) = G_1(x - y, k) \mid_{k_3=0}, \tag{2.5}$$

$$q(x, y, k_\parallel) = -\frac{\mid x_3 - y_3 \mid}{2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)} + p(x, y, k_\parallel), \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered}
t(\phi_1, \phi_2, k_\parallel) = -\lambda_2 \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)} \sqrt{W}\phi_2 \overline{\sqrt{W}\phi_2}\, dx\, dy - \\
- \lambda_1 \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)} \sqrt{W}\phi_1 \overline{\sqrt{W}\phi_1}\, dx\, dy - \\
- \lambda_1\lambda_2 \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)} \sqrt{W}\phi_1 \overline{\sqrt{W}\phi_1}\, dx\, dy \iint_{\Omega^2} q(x, y, k_\parallel) \sqrt{W}\phi_2 \overline{\sqrt{W}\phi_2}\, dx\, dy - \\
- \lambda_1\lambda_2 \iint_{\Omega^2} q(x, y, k_\parallel) \sqrt{W}\phi_1 \overline{\sqrt{W}\phi_1}\, dx\, dy \times \\
\times \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)} \sqrt{W}\phi_2 \overline{\sqrt{W}\phi_2}\, dx\, dy,
\end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}
f(\phi) = -\iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)} \sqrt{W}\phi \overline{\sqrt{W}\phi_1}\, dx\, dy - \\
- \lambda_2 \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)} \sqrt{W}\phi \overline{\sqrt{W}\phi_1}\, dx\, dy \iint_{\Omega^2} q(x, y, k_\parallel) \sqrt{W}\phi_2 \overline{\sqrt{W}\phi_2}\, dx\, dy - \\
- \lambda_2 \iint_{\Omega^2} q(x, y, k_\parallel) \sqrt{W}\phi \overline{\sqrt{W}\phi_1}\, dx\, dy \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)} \sqrt{W}\phi_2 \overline{\sqrt{W}\phi_2}\, dx\, dy + \\
+ \lambda_2 \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)} \sqrt{W}\phi \overline{\sqrt{W}\phi_2}\, dx\, dy \iint_{\Omega^2} q(x, y, k_\parallel) \sqrt{W}\phi_2 \overline{\sqrt{W}\phi_1}\, dx\, dy + \\
+ \lambda_2 \iint_{\Omega^2} q(x, y, k_\parallel) \sqrt{W}\phi \overline{\sqrt{W}\phi_2}\, dx\, dy \times \\
\times \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)} \sqrt{W}\phi_2 \overline{\sqrt{W}\phi_1}\, dx\, dy,
\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}
g(\phi) = -\iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)} \sqrt{W}\phi \overline{\sqrt{W}\phi_2}\, dx\, dy - \\
- \lambda_1 \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)} \sqrt{W}\phi \overline{\sqrt{W}\phi_2}\, dxdy \iint_{\Omega^2} q(x, y, k_\parallel) \sqrt{W}\phi_1 \overline{\sqrt{W}\phi_1}\, dx\, dy -
\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
-\lambda_2 \iint_{\Omega^2} q(x,y,k_\|)\sqrt{W}\phi\overline{\sqrt{W}\phi_2}\,dx\,dy \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\|,x_\|-y_\|)}\sqrt{W}\phi_1\overline{\sqrt{W}\phi_1}\,dx\,dy+\\
+\lambda_1 \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\|,x_\|-y_\|)}\sqrt{W}\phi\overline{\sqrt{W}\phi_1}\,dx\,dy \iint_{\Omega^2} q(x,y,k_\|)\sqrt{W}\phi_1\overline{\sqrt{W}\phi_2}\,dx\,dy+\\
+\lambda_1 \iint_{\Omega^2} q(x,y,k_\|)\sqrt{W}\phi\overline{\sqrt{W}\phi_1}\,dx\,dy\times\\
\times\iint_{\Omega^2} e^{i(k_\|,x_\|-y_\|)}\sqrt{W}\phi_1\overline{\sqrt{W}\phi_2}\,dx\,dy. \qquad (2.9)
\end{gathered}
$$

**Теорема 1.** *Пусть $\Delta \neq 0$. Тогда для всех достаточно малых $\epsilon$ в окрестности нуля существует единственный уровень оператора Шрёдингера $H(k_\|) = -\Delta + W(x) + V_s$, для которого справедлива формула*

$$k_3 = \epsilon K + O(\epsilon^2),$$

*где*

$$
\begin{gathered}
K = \frac{1}{2i}\bigg(\int_\Omega W(y)\,dy - \frac{\lambda_1 f(e^{i(k_\|,x_\|)}\sqrt{W(x)})}{t(\phi_1,\phi_2,k_\|)}\int_\Omega e^{-i(k_\|,y_\|)}\sqrt{W(y)}\phi_1(y)\,dy+\\
+\frac{\lambda_2 g(e^{i(k_\|,x_\|)}\sqrt{W(x)})}{t(\phi_1,\phi_2,k_\|)}\int_\Omega e^{-i(k_\|,y_\|)}\sqrt{W(y)}\phi_2(y)\,dy\bigg),
\end{gathered}
$$

*выражения $f(e^{i(k_\|,x_\|)}\sqrt{W(x)})$, $g(e^{i(k_\|,x_\|)}\sqrt{W(x)})$ и $t(\phi_1,\phi_2,k_\|)$ явно зависят от функций $\phi_1$, $\phi_2$, $W(x)$, $e^{i(k_\|,x_\|)}$ и приведены в доказательстве теоремы.*

Доказательство. Применим к уравнению Шрёдингера $(H_0(k_\|) + V_s - E)\psi(x) = -\epsilon W(x)\psi(x)$ оператор $R_s(k_\|, E)$, при условии, что $\Delta \neq 0$. В полученном уравнении

$$\psi(x) = -\epsilon R_s(k_\|, E) W(x)\psi(x)$$

перейдем к новой функции $\phi(x) = \sqrt{W(x)}\psi(x)$ из класса $L^2(\Omega)$. В уравнении

$$\phi(x) = -\epsilon\sqrt{W(x)}R_s(E)\sqrt{W(x)}\phi(x) \qquad (2.10)$$

оператор в правой части аналитически зависит от $k_3 \neq 0$ в окрестности нуля. Определение уровня эквивалентно существованию ненулевого решения уравнения (2.10), а в силу аналитической теоремы Фредгольма это определение эквивалентно существованию полюса оператора

$$(1 + \epsilon\sqrt{W(x)}R_s(k_\|, E)\sqrt{W(x)})^{-1}.$$

Из теоремы 3.11 [23] данное определение соответствует существованию ненулевого решения уравнения

$$\psi(x) = -\int_\Omega G_0(x,y,k)V(y)\psi(y)\,dy$$

Таким образом, в случае $\operatorname{Im} k_3 < 0$ (тогда в силу (1.2) $G_0$ экспоненциально возрастает) приведенное определение отвечает пониманию резонанса, указанному во введении. Кроме того, формула

$$(1 + \epsilon\sqrt{W}R_s(k_\|, E)\sqrt{W})^{-1} = 1 - \epsilon\sqrt{W}R(k_\|, E)\sqrt{W},$$

вытекающая из резольвентного тождества (см., например, [26]), говорит о том, что данное определение резонанса также эквивалентно и трактовке резонанса как полюса резольвенты (см. [9]).

В рассматриваемом случае уровнем, ввиду (2.4), является такое $k_3 \neq 0$ из комплексной окрестности нуля (и соответствующее $E = k^2$), для которого существует ненулевое решение в $L^2(\Omega)$ уравнения

$$\phi(x) = -\epsilon\int_\Omega \sqrt{W(x)}G_0(x,y,k)\sqrt{W(y)}\phi(y)\,dy +$$

$$+\lambda_1\epsilon\frac{\Delta_1(\phi)}{\Delta}\int_\Omega\sqrt{W(x)}G_0(x,y,k)\phi_1(y)\,dy+\lambda_2\epsilon\frac{\Delta_2(\phi)}{\Delta}\int_\Omega\sqrt{W(x)}G_0(x,y,k)\phi_2(y)\,dy, \qquad (2.11)$$

где $\phi(x)=\sqrt{W(x)}\psi(x)\in L^2(\Omega)$.

Перейдем далее от функций $\phi_i(x)$ к функциям $\sqrt{W(x)}\phi_i(x)$, $i=1,2$. Используя представление (1.3) ядра оператора $R_0(k_\parallel,E)$, уравнение (2.11) запишем в виде

$$\begin{aligned}\phi(x)=\frac{\epsilon}{2ik_3}\int_\Omega\sqrt{W(x)}e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}\sqrt{W(y)}\phi(y)\,dy-\epsilon\int_\Omega\sqrt{W(x)}G^{(1)}(x,y,k)\sqrt{W(y)}\phi(y)\,dy+\\
+\lambda_1\epsilon\frac{\Delta_1(\phi)}{\Delta}\Big(-\int_\Omega\sqrt{W(x)}\frac{e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}}{2ik_3}\sqrt{W(y)}\phi_1(y)\,dy+\\
+\int_\Omega\sqrt{W(x)}G^{(1)}(x,y,k)\sqrt{W(y)}\phi_1(y)\,dy\Big)+\\
+\lambda_2\epsilon\frac{\Delta_2(\phi)}{\Delta}\Big(-\int_\Omega\sqrt{W(x)}\frac{e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}}{2ik_3}\sqrt{W(y)}\phi_2(y)\,dy+\\
+\int_\Omega\sqrt{W(x)}G^{(1)}(x,y,k)\sqrt{W(y)}\phi_2(y)\,dy\Big).\end{aligned} \qquad (2.12)$$

Определим операторнозначную функцию $L(k)$ равенством

$$\begin{aligned}L(k)\phi(x)=-\int_\Omega\sqrt{W(x)}G^{(1)}(x,y,k)\sqrt{W(y)}\phi(y)\,dy+\\
+\lambda_1\frac{\Delta_1(\phi)}{\Delta}\int_\Omega\sqrt{W(x)}G^{(1)}(x,y,k)\sqrt{W(y)}\phi_1(y)\,dy+\\
+\lambda_2\frac{\Delta_2(\phi)}{\Delta}\int_\Omega\sqrt{W(x)}G^{(1)}(x,y,k)\sqrt{W(y)}\phi_2(y)\,dy.\end{aligned} \qquad (2.13)$$

В силу сказанного о функции $G^{(1)}(x,y,k)$ во введении и после умножения числителя и знаменателя выражений $\dfrac{\Delta_1(\phi)}{\Delta}$ и $\dfrac{\Delta_2(\phi)}{\Delta}$ на $k_3^2$, функция $L(k)$ является аналитической в окрестности нуля со значениями в множестве компактных операторов. Введем новую неизвестную функцию

$$\Theta(x)=(1-\epsilon L(k))\phi(x).$$

При условии, что $|\epsilon|<1/\|L(k)\|$, оператор $(1-\epsilon L(k))^{-1}$ существует. С учетом сказанного и равенства (2.13) уравнение (2.12) примет вид

$$\begin{aligned}(1-\epsilon L(k))\phi(x)=\frac{\epsilon}{2ik_3}\int_\Omega\sqrt{W(x)}e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}\sqrt{W(y)}\phi(y)\,dy-\\
-\frac{\lambda_1\epsilon}{2ik_3}\frac{\Delta_1(\phi)}{\Delta}\int_\Omega\sqrt{W(x)}e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}\sqrt{W(y)}\phi_1(y)\,dy-\\
-\frac{\lambda_2\epsilon}{2ik_3}\frac{\Delta_2(\phi)}{\Delta}\int_\Omega\sqrt{W(x)}e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}\sqrt{W(y)}\phi_2(y)\,dy.\end{aligned}$$

После перехода к новой функции $\Theta(x)$ получим

$$\begin{aligned}\Theta(x)=\frac{\epsilon}{2ik_3}\int_\Omega\sqrt{W(x)}e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}\sqrt{W(y)}(1-\epsilon L(k))^{-1}\Theta(y)\,dy-\\
-\frac{\lambda_1\epsilon}{2ik_3}\frac{\Delta_1((1-\epsilon L(k))^{-1}\Theta(y))}{\Delta}\int_\Omega\sqrt{W(x)}e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}\sqrt{W(y)}\phi_1(y)\,dy-\\
-\frac{\lambda_2\epsilon}{2ik_3}\frac{\Delta_2((1-\epsilon L(k))^{-1}\Theta(y))}{\Delta}\int_\Omega\sqrt{W(x)}e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}\sqrt{W(y)}\phi_2(y)\,dy.\end{aligned}$$

После вынесения общего множителя за скобки это уравнение выглядит следующим образом:

$$\Theta(x)=\frac{\epsilon}{2ik_3}e^{i(k_\parallel,x_\parallel)}\sqrt{W(x)}\Big(\int_\Omega e^{-i(k_\parallel,y_\parallel)}\sqrt{W(y)}(1-\epsilon L(k))^{-1}\Theta(y)\,dy-$$
$$-\lambda_1\frac{\Delta_1((1-\epsilon L(k))^{-1}\Theta(y))}{\Delta}\int_\Omega e^{-i(k_\parallel,y_\parallel)}\sqrt{W(y)}\phi_1(y)\,dy-$$
$$-\lambda_2\frac{\Delta_2((1-\epsilon L(k))^{-1}\Theta(y))}{\Delta}\int_\Omega e^{-i(k_\parallel,y_\parallel)}\sqrt{W(y)}\phi_2(y)\,dy\Big). \tag{2.14}$$

Из этого уравнения видно, что функция $\Theta(x)$ представима в виде $\Theta(x)=C\sqrt{W(x)}e^{i(k_\parallel,x_\parallel)}$, где $C=\mathrm{const}\neq 0$. Подставляя данное выражение в (2.14), получим после сокращения

$$k_3=\frac{\epsilon}{2i}\Big(\int_\Omega e^{-i(k_\parallel,y_\parallel)}\sqrt{W(y)}(1-\epsilon L(k))^{-1}e^{i(k_\parallel,y_\parallel)}\sqrt{W(y)}\,dy-$$
$$-\lambda_1\frac{\Delta_1((1-\epsilon L(k))^{-1}e^{i(k_\parallel,y_\parallel)}\sqrt{W(y)})}{\Delta}\int_\Omega e^{-i(k_\parallel,y_\parallel)}\sqrt{W(y)}\phi_1(y)\,dy-$$
$$-\lambda_2\frac{\Delta_2((1-\epsilon L(k))^{-1}e^{i(k_\parallel,y_\parallel)}\sqrt{W(y)})}{\Delta}\int_\Omega e^{-i(k_\parallel,y_\parallel)}\sqrt{W(y)}\phi_2(y)\,dy\Big) \tag{2.15}$$

или

$$k_3=\epsilon F(k_3), \tag{2.16}$$

где $F(k_3)$ есть правая часть уравнения (2.15). Таким образом, существование уровня оператора $H$ эквивалентно существованию решения уравнения (2.16) в окрестности точки $k_3=0$. В силу малости $\epsilon$ отображение $\epsilon F(k)$ переводит некоторую окрестность нуля в себя и функция $F(k)$ является аналитической в окрестности точки $k_3=0$ (следует из векторнозначного варианта теоремы Вейерштрасса об аналитичности равномерно сходящегося ряда, составленного из аналитических функций) (см. доказательство в одномерном случае [24]). Таким образом, к уравнению (2.16) применим принцип сжимающих отображений, из которого следуют существование и единственность решения этого уравнения в окрестности нуля. Для раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ в правой части (2.15) представим

$$G_0(x,y,k)=-\frac{e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}}{2ik_3}e^{ik_3|x_3-y_3|}+G_1(x-y,k)=$$
$$=-\frac{e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}}{2ik_3}(1+ik_3\mid x_3-y_3\mid+o(k_3))+G_1(x-y,k)=$$
$$=-\frac{e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}}{2ik_3}-\frac{\mid x_3-y_3\mid}{2}e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}+O(k_3)+G_1(x-y,k). \tag{2.17}$$

Тогда с учетом (2.17) и принятых обозначений (2.5), (2.6) и (2.7) имеем

$$k_3^2\Delta=\Big(k_3+\lambda_1\Big(\int_\Omega\big(-\frac{e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}}{2i}+k_3q(x,y,k_\parallel)+O(k_3^2)\big)\sqrt{W}\phi_1\,dy,\sqrt{W}\phi_1\Big)\Big)\times$$
$$\times\Big(k_3+\lambda_2\Big(\int_\Omega\big(-\frac{e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}}{2i}+k_3q(x,y,k_\parallel)+O(k_3^2)\big)\sqrt{W}\phi_2\,dy,\sqrt{W}\phi_2\Big)\Big)-$$
$$-\lambda_1\lambda_2\Big(\int_\Omega\big(-\frac{e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}}{2i}+k_3q(x,y,k_\parallel)+O(k_3^2)\big)\sqrt{W}\phi_1\,dy,\sqrt{W}\phi_2(x)\Big)\times$$
$$\times\Big(\int_\Omega\big(-\frac{e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}}{2i}+k_3q(x,y,k_\parallel)+O(k_3^2)\big)\sqrt{W}\phi_2\,dy,\sqrt{W}\phi_1\Big).$$

После раскрытия скобок и сокращения получим

$$
\begin{aligned}
k_3^2\Delta = \frac{k_3}{2i}\Big( &- \lambda_2 \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)}\sqrt{W}\phi_2\overline{\sqrt{W}\phi_2}\,dx\,dy - \\
&- \lambda_1 \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)}\sqrt{W}\phi_1\overline{\sqrt{W}\phi_1}\,dx\,dy - \\
- \lambda_1\lambda_2 \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)}&\sqrt{W}\phi_1\overline{\sqrt{W}\phi_1}\,dx\,dy \iint_{\Omega^2} q(x,y,k_\parallel)\sqrt{W}\phi_2\overline{\sqrt{W}\phi_2}\,dx\,dy - \\
- \lambda_1\lambda_2 \iint_{\Omega^2} q(x,y,k_\parallel)\sqrt{W}\phi_1&\overline{\sqrt{W}\phi_1}\,dx\,dy \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)}\sqrt{W}\phi_2\overline{\sqrt{W}\phi_2}\,dx\,dy\Big) + O(k_3^2) = \\
&= \frac{k_3}{2i} t(\phi_1,\phi_2,k_\parallel) + O(k_3^2),
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

где $t(\phi_1,\phi_2,k_\parallel)$ — функция, не зависящая от $k_3$.

Аналогично с учетом (2.5), (2.6) и (2.8) рассмотрим

$$
\begin{aligned}
k_3^2\Delta_1(\phi) = \Big(\int_\Omega \big(-\frac{e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)}}{2i} + k_3 q(x,y,k_\parallel) + O(k_3^2)\big)\sqrt{W}\phi\,dy, \sqrt{W}\phi_1\Big) \times \\
\times \Big(k_3 + \lambda_2\Big(\int_\Omega \big(-\frac{e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)}}{2i} + k_3 q(x,y,k_\parallel) + O(k_3^2)\big)\sqrt{W}\phi_2\,dy, \sqrt{W}\phi_2\Big)\Big) - \\
- \lambda_2\Big(\int_\Omega \big(-\frac{e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)}}{2i} + k_3 q(x,y,k_\parallel) + O(k_3^2)\big)\sqrt{W}\phi\,dy, \sqrt{W}\phi_2\Big) \times \\
\times \Big(\int_\Omega \big(-\frac{e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)}}{2i} + k_3 q(x,y,k_\parallel) + O(k_3^2)\big)\sqrt{W}\phi_2\,dy, \sqrt{W}\phi_1\Big) = \\
= \frac{k_3}{2i}\Big(-\iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)}\sqrt{W}\phi\overline{\sqrt{W}\phi_1}\,dx\,dy - \\
- \lambda_2 \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)}\sqrt{W}\phi\overline{\sqrt{W}\phi_1}\,dx\,dy \iint_{\Omega^2} q(x,y,k_\parallel)\sqrt{W}\phi_2\overline{\sqrt{W}\phi_2}\,dx\,dy - \\
- \lambda_2 \iint_{\Omega^2} q(x,y,k_\parallel)\sqrt{W}\phi\overline{\sqrt{W}\phi_1}\,dx\,dy \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)}\sqrt{W}\phi_2\overline{\sqrt{W}\phi_2}\,dx\,dy + \\
+ \lambda_2 \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)}\sqrt{W}\phi\overline{\sqrt{W}\phi_2}\,dx\,dy \iint_{\Omega^2} q(x,y,k_\parallel)\sqrt{W}\phi_2\overline{\sqrt{W}\phi_1}\,dx\,dy + \\
+ \lambda_2 \iint_{\Omega^2} q(x,y,k_\parallel)\sqrt{W}\phi\overline{\sqrt{W}\phi_2}\,dx\,dy \iint_{\Omega^2} e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)}\sqrt{W}\phi_2\overline{\sqrt{W}\phi_1}\,dx\,dy\Big) + O(k_3^2) = \\
= \frac{k_3}{2i} f(\phi) + O(k_3^2),
\end{aligned}
$$

где $\phi = (1 - \epsilon L(k))^{-1}\Theta(x)$ и $\Theta(x) = C\sqrt{W(x)}e^{i(k_\parallel, x_\parallel)}$. Тогда после разложения оператора $(1 - L(k))^{-1}$ получим

$$
\begin{aligned}
k_3^2\Delta_1(\phi) &= \frac{k_3}{2i} f((1 - \epsilon L(k))^{-1} e^{i(k_\parallel, x_\parallel)}\sqrt{W(x)}) + O(k_3^2) = \\
&= \frac{k_3}{2i} f(e^{i(k_\parallel, x_\parallel)}\sqrt{W(x)}) + O(k_3^2).
\end{aligned} \tag{2.19}
$$

Здесь функция $f(e^{i(k_\parallel, x_\parallel)}\sqrt{W(x)})$ не зависит от $k_3$.

Наконец, используя (2.5), (2.6) и (2.9), получим

$$
k_3^2\Delta_2(\phi) = \Big(\int_\Omega \big(-\frac{e^{i(k_\parallel, x_\parallel - y_\parallel)}}{2i} + k_3 q(x,y,k_\parallel) + O(k_3^2)\big)\sqrt{W}\phi\,dy, \sqrt{W}\phi_2\Big) \times
$$

$$\times\Big(k_3+\lambda_2\Big(\int_\Omega\big(-\frac{e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}}{2i}+k_3q(x,y,k_\parallel)+O(k_3^2)\big)\sqrt{W}\phi_1\,dy,\sqrt{W}\phi_1\Big)\Big)-$$

$$-\lambda_1\Big(\int_\Omega\big(-\frac{e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}}{2i}+k_3q(x,y,k_\parallel)+O(k_3^2)\big)\sqrt{W}\phi\,dy,\sqrt{W}\phi_1\Big)\times$$

$$\times\Big(\int_\Omega\big(-\frac{e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}}{2i}+k_3q(x,y,k_\parallel)+O(k_3^2)\big)\sqrt{W}\phi_1\,dy,\sqrt{W}\phi_2\Big)=$$

$$=\frac{k_3}{2i}\Big(-\iint_{\Omega^2}e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}\sqrt{W}\phi\overline{\sqrt{W}\phi_2}\,dx\,dy-$$

$$-\lambda_1\iint_{\Omega^2}e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}\sqrt{W}\phi\overline{\sqrt{W}\phi_2}\,dx\,dy\iint_{\Omega^2}q(x,y,k_\parallel)\sqrt{W}\phi_1\overline{\sqrt{W}\phi_1}\,dx\,dy-$$

$$-\lambda_2\iint_{\Omega^2}q(x,y,k_\parallel)\sqrt{W}\phi\overline{\sqrt{W}\phi_2}\,dx\,dy\iint_{\Omega^2}e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}\sqrt{W}\phi_1\overline{\sqrt{W}\phi_1}\,dx\,dy+$$

$$+\lambda_1\iint_{\Omega^2}e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}\sqrt{W}\phi\overline{\sqrt{W}\phi_1}\,dx\,dy\iint_{\Omega^2}q(x,y,k_\parallel)\sqrt{W}\phi_1\overline{\sqrt{W}\phi_2}\,dx\,dy+$$

$$+\lambda_1\iint_{\Omega^2}q(x,y,k_\parallel)\sqrt{W}\phi\overline{\sqrt{W}\phi_1}\,dxdy\iint_{\Omega^2}e^{i(k_\parallel,x_\parallel-y_\parallel)}\sqrt{W}\phi_1\overline{\sqrt{W}\phi_2}\,dx\,dy\Big)+O(k_3^2)=$$

$$=\frac{k_3}{2i}g(\phi)+O(k_3^2).$$

Аналогично рассмотрению $k_3^2\Delta_1(\phi)$ получим

$$k_3^2\Delta_2(\phi)=\frac{k_3}{2i}g(e^{i(k_\parallel,x_\parallel)}\sqrt{W(x)})+O(k_3^2),\tag{2.20}$$

где $(e^{i(k_\parallel,x_\parallel)}\sqrt{W(x)})$ также не зависит от $k_3$.

Таким образом, с учетом обозначений (2.18), (2.19), (2.20) уравнение (2.15) примет вид

$$k_3=\frac{\epsilon}{2i}\Big(\int_\Omega W(y)\,dy-\lambda_1\frac{f(e^{i(k_\parallel,x_\parallel)}\sqrt{W(x)})+O(k_3^2)}{t(\phi_1,\phi_2,k_\parallel)+O(k_3)}\times$$

$$\times\int_\Omega e^{-i(k_\parallel,y_\parallel)}\sqrt{W(y)}\phi_1(y)\,dy-\lambda_2\frac{g(e^{i(k_\parallel,x_\parallel)}\sqrt{W(x)})+O(k_3^2)}{t(\phi_1,\phi_2,k_\parallel)+O(k_3)}\times$$

$$\times\int_\Omega e^{-i(k_\parallel,y_\parallel)}\sqrt{W(y)}\phi_2(y)\,dy\Big).$$

Положим

$$K=\frac{1}{2i}\Big(\int_\Omega W(y)\,dy-\frac{\lambda_1 f(e^{i(k_\parallel,x_\parallel)}\sqrt{W(x)})}{t(\phi_1,\phi_2,k_\parallel)}\int_\Omega e^{-i(k_\parallel,y_\parallel)}\sqrt{W(y)}\phi_1(y)\,dy+$$

$$+\frac{\lambda_2 g(e^{i(k_\parallel,x_\parallel)}\sqrt{W(x)})}{t(\phi_1,\phi_2,k_\parallel)}\int_\Omega e^{-i(k_\parallel,y_\parallel)}\sqrt{W(y)}\phi_2(y)\,dy\Big).$$

Тогда

$$k_3=K\epsilon+\epsilon O(k_3)=\epsilon K+O(\epsilon^2)=\epsilon F(k_3),\tag{2.21}$$

где $F(k_3)=K+O(\epsilon)$. Существование и единственность решения уравнения (2.21) в окрестности нуля вытекают из принципа сжимающих отображений, так как в силу малости $\epsilon$ отображение $\epsilon F(k_3)$ переводит круг $S=\{|k_3|<\delta\}$ в себя, а в силу аналитичности $F(k_3)$ в круге $S$ имеем $|\epsilon F'(k_3)|\leqslant q<1$. Таким образом, к отображению $F(k_3)$ применим принцип сжимающих отображений. Теорема доказана. $\square$

МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 4

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 432 с.
2. Mera H., Pedersen T.G., Nikolić B.K. Nonperturbative quantum physics from low-order perturbation theory // Physical Review Letters. 2015. Vol. 115. Issue 14. 143001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.115.143001
3. Cornean H.D., Jensen A., Nenciu G. Metastable states when the Fermi Golden Rule constant vanishes // Communications in Mathematical Physics. 2015. Vol. 334. Issue 3. P. 1189–1218. DOI: 10.1007/s00220-014-2127-5
4. Bourget O., Cortés V.H., del Río R., Fernández C. Resonances under rank one perturbations // Journal of Mathematical Physics. 2017. Vol. 58. No. 9. 093502. DOI: 10.1063/1.4989882
5. Hinchcliffe J., Strauss M. Spectral enclosure and superconvergence for eigenvalues in gaps // Integral Equations and Operator Theory. 2016. Vol. 84. Issue 1. P. 1–32. DOI: 10.1007/s00020-015-2247-0
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматгиз, 1963. 702 с.
7. Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А. Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 200 с.
8. Хейне В., Коэн М., Уэйр Д. Теория псевдопотенциала. М.: Мир, 1973. 558 с.
9. Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991. 568 с.
10. Коробейников А.А., Плетникова Н.И. О вычислении уровней энергии и резонансов электронных состояний в случае кристаллической поверхности // Вестник Ижевского государственного технического университета. 2006. № 4. С. 63–68. https://elibrary.ru/item.asp?id=11913893
11. Гадыльшин Р.Р. О локальных возмущениях оператора Шрёдингера на оси // Теоретическая и математическая физика. 2002. Т. 132. № 1. С. 97–104. DOI: 10.4213/tmf349
12. Гадыльшин Р.Р. О локальных возмущениях оператора Шрёдингера на плоскости // Теоретическая и математическая физика. 2004. Т. 138. № 1. С. 41–54. DOI: 10.4213/tmf7
13. Гадыльшин Р.Р., Хуснуллин И.Х. Оператор Шрёдингера на оси с потенциалами, зависящими от двух параметров // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. № 6. С. 50–66. http://mi.mathnet.ru/aa1213
14. Colom R., McPhedran R., Stout B., Bonod N. Modal expansion of the scattered field: Causality, nondivergence, and nonresonant contribution // Physical Review B. 2018. Vol. 98. Issue 8. 085418. DOI: 10.1103/PhysRevB.98.085418
15. Fang Z., Shi M., Guo J.-Y., Niu Z.-M., Liang H., Zhang S.-S. Probing resonances in the Dirac equation with quadrupole-deformed potentials with the complex momentum representation method // Physical Review C. 2017. Vol. 95. Issue 2. 024311. DOI: 10.1103/PhysRevC.95.024311
16. Морозова Л.Е. Задача рассеяния для дискретного оператора Шрёдингера с «резонансным» потенциалом на графе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 29–34. DOI: 10.20537/vm130104
17. Сметанина М.С. Об уровнях оператора Шрёдингера с возмущенным нелокальным потенциалом // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2006. Вып. 1 (35). С. 98–104. http://mi.mathnet.ru/iimi83
18. Займан Дж. Принципы твердого тела. М.: Мир, 1974. 472 с.
19. Скриганов М.М. Геометричекие и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 1985. Т. 171. С. 3–122. http://mi.mathnet.ru/tm2190
20. Демков Ю.Н., Островский В.Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л.: ЛГУ, 1975. 240 с.
21. Чубурин Ю.П. О рассеянии на кристаллической пленке: Спектр и асимптотика волновых функций уравнения Шредингера / Физико-технический институт. Препринт. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. 43 с.
22. Чубурин Ю.П. О рассеянии для оператора Шрёдингера в случае кристаллической пленки // Теоретическая и математическая физика. 1987. Т. 72. № 1. С. 120–131. http://mi.mathnet.ru/tmf5315
23. Сметанина М.С. Исследование уравнения Шрёдингера с нелокальным потенциалом: дис. . . . канд. физ.-матем. наук. БелГУ. Белгород, 2009. 109 с.
24. Сметанина М.С. Об уравнении Шрёдингера с нелокальным потенциалом // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2002. Вып. 3 (26). С. 99–114. http://mi.mathnet.ru/iimi253

25. Чубурин Ю.П. О попадании собственного значения (резонанса) оператора Шрёдингера на границу зоны // Теоретическая и математическая физика. 2001. Т. 126. № 2. С. 196–205. DOI: 10.4213/tmf424
26. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982. 486 с.

Поступила в редакцию 30.08.2018

Сметанина Мария Сергеевна, к. ф.-м. н., заведующий кафедрой, Удмуртский государственный университет, филиал в г. Можге, 427790, Россия, г. Можга, ул. Интернациональная, 88.
E-mail: mariya.smetanina@mail.ru

***M. S. Smetanina***

**Asymptotics of the Schrödinger operator levels for a crystal film with a nonlocal potential**

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 4, pp. 462–473 (in Russian).

*Keywords*: Schrödinger equation, nonlocal potential, eigenvalues, resonances, asymptotics.

MSC2010: 35Q40, 35J10, 35P20

DOI: 10.20537/vm180403

We consider a three-dimensional Schrödinger operator for a crystal film with a nonlocal potential, which is a sum of an operator of multiplication by a function, and an operator of rank two ("separable potential") of the form $V = W(x) + \lambda_1(\cdot, \phi_1)\phi_1 + \lambda_2(\cdot, \phi_2)\phi_2$. Here the function $W(x)$ decreases exponentially in the variable $x_3$, the functions $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ are linearly independent, of Bloch type in the variables $x_1$, $x_2$ and exponentially decreasing in the variable $x_3$. Potentials of this type appear in the pseudopotential theory. A level of the Schrödinger operator is its eigenvalue or resonance. The existence and uniqueness of the level of this operator near zero is proved, and its asymptotics is obtained.

REFERENCES

1. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators*, New York: Academic Press, 1978.
2. Mera H., Pedersen T.G., Nikolić B.K. Nonperturbative quantum physics from low-order perturbation theory, *Physical Review Letters*, 2015, vol. 115, issue 14, 143001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.115.143001
3. Cornean H.D., Jensen A., Nenciu G. Metastable states when the Fermi Golden Rule constant vanishes, *Communications in Mathematical Physics*, 2015, vol. 334, issue 3, pp. 1189–1218. DOI: 10.1007/s00220-014-2127-5
4. Bourget O., Cortés V.H., del Río R., Fernández C. Resonances under rank one perturbations, *Journal of Mathematical Physics*, 2017, vol. 58, no. 9, 093502. DOI: 10.1063/1.4989882
5. Hinchcliffe J., Strauss M. Spectral enclosure and superconvergence for eigenvalues in gaps, *Integral Equations and Operator Theory*, 2016, vol. 84, issue 1, pp. 1–32. DOI: 10.1007/s00020-015-2247-0
6. Landau L.D., Lifshits E.M. *Kvantovaya mekhanika. Nerelyativistskaya teoriya* (Quantum mechanics. Nonrelativistic theory), Moscow: Fizmatgiz, 1963, 702 p.
7. Faddeev L.D., Yakubovskii O.A. *Lektsii po kvantovoi mekhanike dlya studentov-matematikov* (Lectures on quantum mechanics for mathematics students), Leningrad: Leningrad State University, 1980, 200 p.
8. Heine V., Cohen M., Weaire D. *The pseudopotential concept*, New York: Academic Press, 1970, 557 p. Translated under the title *Teoriya psevdopotentsiala*, Moscow: Mir, 1973, 558 p.
9. Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H. *Solvable models in quantum mechanics*, New York: Springer, 1988, 452 p. Translated under the title *Reshaemye modeli v kvantovoi mekhanike*, Moscow: Mir, 1991, 568 p.
10. Korobeinikov A.A., Pletnikova N.I. The computation of the energy levels and electron states of resonances in the case of a crystal film, *Vestnik Izhevskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta*, 2006, no. 4, pp. 63–68 (in Russian). `https://elibrary.ru/item.asp?id=11913893`

11. Gadyl'shin R.R. Local perturbations of the Schrödinger operator on the axis, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2002, vol. 132, no. 1, pp. 976–982. DOI: 10.1023/A:1019615509634
12. Gadyl'shin R.R. Local perturbations of the Schrödinger operator on the plane, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2004, vol. 138, no. 1, pp. 33–44. DOI: 10.1023/B:TAMP.0000010631.40891.f0
13. Gadyl'shin R.R., Khusnullin I.Kh. Schrödinger operator on the axis with potentials depending on two parameters, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2011, vol. 22, no. 6, pp. 883–894. DOI: 10.1090/S1061-0022-2011-01174-4
14. Colom R., McPhedran R., Stout B., Bonod N. Modal expansion of the scattered field: Causality, nondivergence, and nonresonant contribution, *Physical Review B*, 2018, vol. 98, issue 8, 085418. DOI: 10.1103/PhysRevB.98.085418
15. Fang Z., Shi M., Guo J.-Y., Niu Z.-M., Liang H., Zhang S.-S. Probing resonances in the Dirac equation with quadrupole-deformed potentials with the complex momentum representation method, *Physical Review C*, 2017, vol. 95, issue 2, 024311. DOI: 10.1103/PhysRevC.95.024311
16. Morozova L.E. The scattering problem for a discrete Schrödinger operator with the "resonant" potential on the graph, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 1, pp. 29–34 (in Russian). DOI: 10.20537/vm130104
17. Smetanina M.S. Levels of the Schrödinger operator with a perturbed non-local potential, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2006, issue 1 (35), pp. 98–104 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/iimi83
18. Ziman J. *Principles of the theory of solids*, Cambridge: Cambridge University Press, 1972, 435 p. Translated under the title *Printsipy tverdogo tela*, Moscow: Mir, 1974, 472 p.
19. Skriganov M.M. Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensional periodic operators, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1987, vol. 171, pp. 1–121. http://mi.mathnet.ru/eng/tm2190
20. Demkov Yu.N., Ostrovskii V.N. *Metod potentsialov nulevogo radiusa v atomnoi fizike* (Method of zero-radius potentials in atomic physics), Leningrad: Leningrad State University, 1975, 240 p.
21. Chuburin Yu.P. *On the scattering on a crystal film: Spectrum and asymptotics of the Schrödinger equation wave functions, Preprint of the Physical-Technical Institute*, Sverdlovsk: Ural Scientific Center, USSR Academy of Sciences, 1985, 43 p. (In Russian).
22. Chuburin Yu.P. Scattering for the Schrödinger operator in the case of a crystal film, *Theor. Math. Phys.*, 1987, vol. 72, issue 1, pp. 764–772. DOI: 10.1007/BF01035703
23. Smetanina M.S. Investigation of the Schrödinger equation with nonlocal potential, *Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation*, Belgorod, 2009, 109 p. (In Russian).
24. Smetanina M.S. On the levels of the Schrödinger operator with nonlocal potential, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2002, issue 3 (26), pp. 99–114 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/iimi253
25. Chuburin Yu.P. Schrödinger operator eigenvalue (resonance) on a zone boundary, *Theor. Math. Phys.*, 2001, vol. 126, issue 2, pp. 161–168. DOI: 10.1023/A:1005287525569
26. Richtmyer R. *Principles of advanced mathematical physics. Vol. 1*, New York: Springer, 1978, 424 p. Translated under the title *Printsipy sovremennoi matematicheskoi fiziki*, Moscow: Mir, 1982, 486 p.

Received 30.08.2018

Smetanina Mariya Sergeevna, Candidate of Physics and Mathematics, Head of the Department, Mozhga Branch, Udmurt State University, ul. Internatsional'naya, 88, Mozhga, 427790, Russia.
E-mail: mariya.smetanina@mail.ru