ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 4

УДК 517.926, 517.977

© ***А. А. Козлов, А. Д. Бурак***

ОБ УПРАВЛЕНИИ ОТДЕЛЬНЫМИ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ИНВАРИАНТАМИ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С НАБЛЮДАТЕЛЕМ

Рассматривается линейная нестационарная управляемая система с наблюдателем с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$y = C^*(t)x, \quad y \in \mathbb{R}^p. \tag{2}$$

Исследуется задача управления асимптотическими инвариантами системы, замкнутой посредством линейной нестационарной динамической обратной связи по выходу. Метод исследования, представленный в работе, базируется на построении системы асимптотической оценки состояния системы (1), (2), введенной Р. Калманом. Для решения задачи используется обобщение понятия равномерной полной управляемости по Калману, предложенное Е. Л. Тонковым для систем с коэффициентами из более широких функциональных классов. Дано определение равномерной полной наблюдаемости (в смысле Тонкова) для системы (1), (2). Для $n = 2$ доказано, что свойство равномерной полной управляемости и равномерной полной наблюдаемости системы (1), (2) (в смысле Тонкова) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами является достаточным условием глобальной управляемости верхнего особого показателя Боля, а также характеристических показателей Ляпунова системы, замкнутой посредством линейной динамической обратной связи по выходу. Для доказательства используются установленные ранее результаты о равномерной глобальной достижимости двумерной системы (1), замкнутой линейной нестационарной статической обратной связью по состоянию, при условии равномерной полной управляемости (в смысле Тонкова) открытой системы (1).

Ключевые слова: линейная управляемая система с наблюдателем, равномерная полная управляемость, равномерная полная наблюдаемость, глобальная управляемость асимптотических инвариантов.

DOI: 10.20537/vm180402

Всюду далее через $\mathbb{R}^n$ будем обозначать n-мерное векторное евклидово пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{x^*x}$ для всякого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ (символ * здесь и ниже означает операцию транспонирования), через M_{mn} — пространство вещественных $(m \times n)$-матриц со спектральной (операторной) нормой $\|A\| = \max\limits_{x \neq 0} \|Ax\|/\|x\|$, т. е. нормой, индуцируемой евклидовыми нормами в векторных пространствах $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$; $\mathrm{M}_n := \mathrm{M}_{nn}$. Пусть также $E \in \mathrm{M}_n$ — единичная матрица.

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с наблюдателем

$$y = C^*(t)x, \quad y \in \mathbb{R}^p, \quad t \geqslant 0. \tag{2}$$

Будем считать, что коэффициенты $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$, $t \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, принадлежат классу локально интегрируемых по Лебегу и интегрально ограниченных [1, с. 252] матричных функций размерностей соответственно $n \times n$, $n \times m$ и $n \times p$, т. е. функций, которые удовлетворяют соотношениям

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_t^{t+1}\|A(\tau)\|\,d\tau<\infty, \tag{3}$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_t^{t+1}\|B(\tau)\|\,d\tau<\infty, \tag{4}$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_t^{t+1}\|C(\tau)\|\,d\tau<\infty. \tag{5}$$

В настоящей работе рассмотрена задача глобального управления отдельными асимптотическими инвариантами (верхним особым показателем Боля [2], характеристическими показателями Ляпунова [3, с. 7–263]) линейной системы (1), (2) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами. Для ее решения использован подход, основанный на построении системы асимптотической оценки состояния [4, с. 69], который изначально был предложен Р. Калманом и им же успешно реализован [4, с. 74–80] при изучении вопросов стабилизации линейных стационарных систем (1), (2). Обобщение калмановского подхода на случай нестационарных систем и, соответственно, решение задачи равномерной стабилизации (см. ниже определение 11) линейных нестационарных управляемых систем (1) на основе свойств равномерной полной управляемости и равномерной полной наблюдаемости были получены в работе [5] японскими математиками М. Икедой, Х. Маедой, С. Кодамой. Это решение заключалось в построении такого измеримого и ограниченного управляющего воздействия, что верхний особый показатель Боля системы (1) с построенным управлением принимал значение, меньшее произвольного наперед заданного отрицательного числа. Само доказательство проводилось в рамках второго (прямого) метода Ляпунова [3], [6, с. 234–319], поэтому не позволяло получить более детальных результатов о поведении отдельных асимптотических характеристик системы (1) с выбранным управлением, таких, например, как вышеуказанный показатель Боля, характеристические показатели Ляпунова. Эту задачу удалось частично решить в 2010 году В. А. Зайцеву [7], который, также пользуясь калмановским подходом, установил глобальную управляемость верхнего особого показателя Боля (см. далее теорему 5), а также некоторых иных инвариантов линейной нестационарной системы (1) с наблюдателем (2) в предположении, что коэффициенты системы (1), (2) локально интегрируемы (причем $B(\cdot)$ и $C(\cdot)$ с квадратом нормы) и удовлетворяют условиям (3) и

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_t^{t+1}\|B(\tau)\|^2\,d\tau<\infty, \tag{6}$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_t^{t+1}\|C(\tau)\|^2\,d\tau<\infty. \tag{7}$$

Исследование же аналогичного вопроса для систем (1), (2), удовлетворяющих условиям (3), (4), (5), ранее вообще не проводилось. Это связано прежде всего с тем, что метод решения данной задачи, предложенный В. А. Зайцевым в [7], предполагает использование свойства равномерной полной управляемости (по Калману) [8] линейной системы (1), которое имеет смысл лишь в случае интегрируемости с квадратом нормы матрицы B.

Определение 1 (Р. Калман [8]). Система (1) называется *σ-равномерно вполне управляемой*, если существуют такие числа $\alpha_i>0$, $i=\overline{1,4}$, что при всяких векторе $\xi\in\mathbb{R}^n$ и числе $t_0\geqslant 0$ выполняются неравенства

$$\alpha_1\|\xi\|^2\leqslant\int_{t_0}^{t_0+\sigma}\xi^*X(t_0,s)B(s)B^*(s)X^*(t_0,s)\xi\,ds\leqslant\alpha_2\|\xi\|^2,$$

$$\alpha_3\|\xi\|^2\leqslant\int_{t_0}^{t_0+\sigma}\xi^*X(t_0+\sigma,s)B(s)B^*(s)X^*(t_0+\sigma,s)\xi\,ds\leqslant\alpha_4\|\xi\|^2.$$

Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существует $\sigma>0$ такое, что система (1) σ-равномерно вполне управляема.

В работе [9] было показано, что необходимым условием равномерной полной управляемости по Калману системы (1) является условие (6). Отказ от наличия локальной интегрируемости B с квадратом нормы делает фактически невозможным применение определения 1 (а следовательно, и разработанного метода) для решения представленной задачи.

Е. Л. Тонковым было сформулировано иное определение равномерной полной управляемости, преимуществом которого, по сравнению с определением Калмана, является возможность его применения к системам с коэффициентами из более широких функциональных классов.

Определение 2 (Е. Л. Тонков [10]). Система (1) называется *σ-равномерно вполне управляемой*, если существуют такое $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geqslant 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется измеримое и ограниченное управление $u\colon [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^m$, при всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leqslant \gamma\|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в точку $x(t_0+\sigma) = 0$. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существует $\sigma > 0$ такое, что система (1) σ-равномерно вполне управляема.

Определение 2 применимо для системы (1) с интегрально ограниченными матрицами A, B. Если коэффициенты системы (1) удовлетворяют условиям (3), (6), то из равномерной полной управляемости системы (1) в смысле Тонкова следует равномерная полная управляемость системы (1) в смысле Калмана (см. [9, теорема 3]). Кроме того, если A, B удовлетворяют условиям (3), (4), то свойство σ-равномерной полной управляемости системы (1) эквивалентно свойству $H(\sigma)$ [9, теорема 4].

Определение 3 (см. [9]). Говорят, что система (1):
обладает свойством $H(\sigma)$ (где $\sigma > 0$), если существуют $\beta_i = \beta_i(\sigma) > 0$, $i = \overline{1,4}$, такие, что для любого $\tau \geqslant 0$ и любого вектора $h \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства

$$\beta_1\|h\| \leqslant \int_\tau^{\tau+\sigma} \|h^* X(\tau, s)B(s)\|\, ds \leqslant \beta_2\|h\|,$$

$$\beta_3\|h\| \leqslant \int_\tau^{\tau+\sigma} \|h^* X(\tau+\sigma, s)B(s)\|\, ds \leqslant \beta_4\|h\|;$$

обладает свойством H, если существует $\sigma > 0$ такое, что система (1) обладает свойством $H(\sigma)$.

Теорема 1 (см. [9, теорема 4]). *Пусть коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям* (3), (4). *Тогда система* (1) *σ-равномерно вполне управляема* (*в смысле Тонкова*) *в том и только в том случае, если она обладает свойством $H(\sigma)$.*

Замечание 1. Известно (см. предложение 4 (c) работы [9]), что если система (1) обладает свойством $H(\sigma)$, то для нее справедливо и свойство $H(\sigma_1)$ для всякого $\sigma_1 \geqslant \sigma$. Тогда если коэффициенты σ-равномерно вполне управляемой (в смысле Тонкова) системы (1) удовлетворяют условиям (3), (4), то из теоремы 1 следует, что эта система обладает свойством $H(\sigma)$, а значит, и свойством $H(\sigma_1)$ для любого $\sigma_1 \geqslant \sigma$. Последнее условие, в силу той же теоремы 1, обеспечивает σ_1-равномерную полную управляемость (в смысле Тонкова) системы (1) при каждом $\sigma_1 \geqslant \sigma$.

На основании определения 2, а также калмановского подхода в данной работе получены достаточные условия глобальной управляемости верхнего особого показателя Боля, а также характеристических показателей Ляпунова двумерной линейной управляемой системы (1) с наблюдателем (2) и локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Прежде чем переходить к формулировке основных результатов работы, дадим необходимые нам в дальнейшем определения и утверждения как из теории управления, так и из теории характеристических показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, а также установим несколько вспомогательных теорем (см. далее теоремы 2 и 4).

Рассмотрим линейную систему (1) с нулевым управлением и наблюдателем (2), т. е. систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{8}$$

$$y = C^*(t)x, \quad y \in \mathbb{R}^p, \quad t \geqslant 0. \tag{9}$$

Определение 4. Система (8), (9) называется *σ-равномерно вполне наблюдаемой* (в смысле Тонкова), если сопряженная ей линейная управляемая система

$$\dot{x} = -A^*(t)x + C(t)v, \quad v \in \mathbb{R}^p, \quad t \geqslant 0, \tag{10}$$

является σ-равномерной вполне управляемой (в смысле Тонкова). Система (8), (9) называется *равномерно вполне наблюдаемой* (в смысле Тонкова), если существует $\sigma > 0$ такое, что система (8), (9) σ-равномерно вполне наблюдаема.

Замечание 2. Данное определение было предложено В. А. Зайцевым.

Замечание 3. Пусть коэффициенты управляемой системы (1) и системы с наблюдателем (8), (9) удовлетворяют условиям (3), (4), (5). Тогда из замечания 1 очевидным образом следует, что если система (1) равномерно вполне управляема, а система (8), (9) равномерно вполне наблюдаема (и значит, система (10) равномерно вполне управляема), то без ограничения общности можно считать, что существует общее число $\sigma > 0$ такое, что система (1) является σ-равномерно вполне управляемой, а система (8), (9) — σ-равномерно вполне наблюдаемой.

На основании определения 4, а также определения 3 и теоремы 1 установим следующий коэффициентный критерий равномерной полной наблюдаемости (в смысле Тонкова) системы (8), (9) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Теорема 2. *Система (8), (9) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами σ-равномерно вполне наблюдаема (в смысле Тонкова) тогда и только тогда, когда существуют такие* $\delta_i = \delta_i(\sigma) > 0$, $i = \overline{1,4}$, *что для любого* $\tau \geqslant 0$ *и любого вектора* $h \in \mathbb{R}^n$ *выполнены неравенства*

$$\delta_1\|h\| \leqslant \int_{\tau}^{\tau+\sigma} \|h^* X^*(s,\tau)C(s)\|\, ds \leqslant \delta_2\|h\|, \tag{11}$$

$$\delta_3\|h\| \leqslant \int_{\tau}^{\tau+\sigma} \|h^* X^*(s,\tau+\sigma)C(s)\|\, ds \leqslant \delta_4\|h\|. \tag{12}$$

Доказательство. По определению 4, система (8), (9) σ-равномерно вполне наблюдаема (в смысле Тонкова), когда соответствующая система (10) σ-равномерно вполне управляема (в смысле Тонкова). В силу теоремы 1 это эквивалентно тому, что система (10) обладает свойством $H(\sigma)$. Система $\dot{y} = -A^*(t)y$, $t \geqslant 0$, является сопряженной к системе (8), поэтому для соответствующих матриц Коши этих систем выполняется равенство $Y(t,s) = X^*(s,t)$ при любых $t, s \geqslant 0$. На основании этого соотношения, а также наличия у системы (10) свойства $H(\sigma)$, пользуясь определением 3, установим существование таких величин $\delta_i = \delta_i(\sigma) > 0$, $i = \overline{1,4}$, при которых выполняются требуемые неравенства (11), (12). Теорема 2 доказана. □

Для любых чисел $r > 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ под $\mathcal{M}_n(r,\rho)$ всюду далее будем понимать множество матриц из M_n, которые удовлетворяют неравенствам $\|H - E\| \leqslant r$ и $\det H \geqslant \rho$.

Рассмотрим систему (1) с локально интегрируемыми по Лебегу и интегрально ограниченными коэффициентами. Пусть управление в системе (1) строится в виде линейной полной обратной связи $u = U(t)x$, где $U\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{M}_{mn}$ — некоторая измеримая и ограниченная функция. Получим замкнутую систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{13}$$

с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами. Обозначим через $X_U(t,s)$ матрицу Коши системы (13).

Определение 5 (см. [11], [12, с. 253]). Говорят, что система (13) обладает свойством

(1) *T-равномерной глобальной достижимости относительно неограниченного множества* $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$, если для любых $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ найдется такая величина $\theta = \theta(r, \rho) > 0$, при которой для произвольной матрицы $H \in \mathcal{M}_n(r, \rho)$ и всякого $t_0 \geqslant 0$ существует измеримое и ограниченное управление $U\colon [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{U}$, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ оценке $\|U(t)\| \leqslant \theta$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (13) выполнение равенства $X_U(t_0 + T, t_0) = H$;

(2) *T-равномерной глобальной достижимости*, если она T-равномерно глобально достижима относительно множества $\mathbb{U} = \mathrm{M}_{mn}$;

(3) *равномерной глобальной достижимости*, если она T-равномерно глобально достижима при некотором $T > 0$.

В статье [13] А. А. Козловым совместно с И. В. Инц была доказана следующая теорема.

Теорема 3 (см. [13, теорема 9]). *Пусть $n = 2$, $m \in \{1, 2\}$. Если система* (1) *с локально суммируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то система* (13) *равномерно глобально достижима.*

Замечание 4. На основании замечания 9 работы [13], а также доказательств теоремы 9 той же работы [13] и теоремы 2 статьи [14] легко установить, что в теореме 3 величина $T > 0$, входящая в определение 5 равномерной глобальной достижимости для системы (13), кратна числу $\sigma > 0$ — длине отрезка σ-равномерной полной управляемости системы (1), соответствующей системе (13).

Теорема 4. *Если система* (13) *является T-равномерно глобально достижимой, то она обладает также и свойством kT-равномерной глобальной достижимости при любом $k \in \mathbb{N}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для некоторого $T > 0$ система (13) T-равномерно глобально достижима. Зафиксируем произвольные числа $t_0 \geqslant 0$ и $k \in \mathbb{N}$. Возьмем любые числа $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ и матрицу $H \in \mathcal{M}_n(r, \rho)$. Поскольку для единичной матрицы $E \in \mathrm{M}_n$ выполняются соотношения $\det E = 1 \geqslant \rho$ и $\|E - E\| = 0 \leqslant r$, то для нее также имеет место включение $E \in \mathcal{M}_n(r, \rho)$. Тогда, пользуясь свойством T-равномерной глобальной достижимости, для системы (13) найдем такие измеримые и ограниченные управления $U = U_j(t)$, $t \in [t_0 + (j-1)T, t_0 + jT]$, $j = \overline{1, k}$, что выполняются равенства $X_{U_i}(t_0 + iT, t_0 + (i-1)T) = E$ для всех $i = \overline{1, k-1}$ и $X_{U_k}(t_0 + kT, t_0 + (k-1)T) = H$, а также оценки $\|U_j(t)\| \leqslant \theta_j(r, \rho)$, $t \in [t_0 + (j-1)T, t_0 + jT]$, $j = \overline{1, k}$, при некоторых $\theta_j(r, \rho) > 0$, зависящих только от r и ρ. Положим $\Theta(r, \rho) = \max\{\theta_j(r, \rho),\ j = \overline{1, k}\}$ и определим на отрезке $[t_0, t_0 + kT]$ управление $U(t) \equiv U_j(t)$, $t \in [t_0 + (j-1)T, t_0 + jT)$, $j = \overline{1, k}$, $U(t_0 + kT) = U_k(t_0 + kT)$. Тогда очевидно, что $U(t)$ — измеримое и ограниченное при всех $t \in [t_0, t_0 + kT]$ управление, удовлетворяющее оценке $\|U(t)\| \leqslant \max\{\|U_j(t)\|,\ j = \overline{1, k}\} \leqslant \max\{\theta_j(r, \rho),\ j = \overline{1, k}\} = \Theta(r, \rho)$, причем для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (13) с этим управлением имеют место равенства

$$X_U(t_0 + kT, t_0) = X_U(t_0 + kT, t_0 + (k-1)T) \cdot \ldots \cdot X_U(t_0 + 2T, t_0 + T) \cdot X_U(t_0 + T, t_0) =$$

$$= X_{U_k}(t_0 + kT, t_0 + (k-1)T) \cdot \ldots \cdot X_{U_2}(t_0 + 2T, t_0 + T) \cdot X_{U_1}(t_0 + T, t_0) =$$

$$= E \cdot \ldots \cdot E \cdot H = H,$$

означающие, что система (13) обладает свойством kT-равномерной глобальной достижимости. Теорема 4 доказана. $\square$

Замечание 5. Свойство равномерной глобальной достижимости системы (13), введенное Е. Л. Тонковым и В. А. Зайцевым в [11], широко используется при решении задач управляемости различных асимптотических инвариантов [12, с. 29–80] этой системы (см., например, [7, 14–27], [12, с. 137–332]), которые, в свою очередь, отвечают за тот или иной тип устойчивости системы (13).

Определение 6 (см. [1, с. 247], [6, с. 153–154]). *Преобразованием Ляпунова* системы (8) называется линейное преобразование $x = L(t)\widetilde{z}$ с обратимой абсолютно непрерывной матричной функцией $L = L(t)$, $t \geqslant 0$, со значениями во множестве $(n \times n)$-матриц, удовлетворяющей для всех $t \geqslant 0$ неравенству $\|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\| + \int_t^{t+1} \|\dot{L}(\tau)\|\, d\tau < \infty$.

Определение 7 (см. [12, с. 58]). Говорят, что *система* (8) *приводима к системе*

$$\dot{\widetilde{z}} = D(t)\widetilde{z}, \quad \widetilde{z} \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{14}$$

если найдется преобразование Ляпунова $x = L(t)\widetilde{z}$, связывающее системы (8) и (14), т. е. выполнено соотношение $D(t) = L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t)$ при любых $t \geqslant 0$. Системы, связанные преобразованием Ляпунова, называют *асимптотически эквивалентными* [28].

Определение 8 (см. [12, с. 60]). Величины и свойства системы (8), сохраняющиеся при действии преобразования Ляпунова, называются *асимптотическими* (*ляпуновскими*) *инвариантами*.

К асимптотическим инвариантам системы (8) относятся [29], например, полный спектр показателей Ляпунова [3, с. 7–263], [12, с. 31–42] $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$, отвечающих за асимптотическую устойчивость [12, с. 60–61] системы (8), верхний особый (генеральный) показатель Боля $\Omega^0(A)$ этой системы [2, 30], [12, с. 60–61], определяющий ее равномерную асимптотическую (экспоненциальную) устойчивость [12, с. 61]; свойства правильности [12, с. 70] и приводимости [12, с. 58] системы (8) и многие другие.

Определение 9. Напомним, что *характеристическим показателем Ляпунова* [3, с. 7–263] любого нетривиального решения $x = x(t)$, $t \in [0, +\infty)$, однородной системы (8) называют число

$$\lambda[x] := \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|;$$

верхним особым (*генеральным*) *показателем Боля* [2, 30] этой же системы называют величину

$$\Omega^0(A) := \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \sup_k \ln \|X((k+1)T, kT)\|,$$

где $X(t, s)$, $t, s \geqslant 0$, — матрица Коши линейной системы (8).

Замечание 6. Известно [6, с. 138], что спектр характеристических показателей Ляпунова стационарной системы $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$, состоит из набора вещественных частей собственных значений (корней характеристического многочлена) ее матрицы коэффициентов A.

Определение 10 (см. [12, с. 182]). Зафиксируем какой-либо асимптотический инвариант ι. *Задача глобального управления асимптотическим инвариантом* ι заключается в нахождении такого измеримого и ограниченного управления $U(\cdot)$, что система (13) с этим управлением будет иметь любое возможное наперед заданное значение этого инварианта. Так, например, рассматривая в данной задаче в качестве асимптотического инварианта ι верхний особый (генеральный) показатель Боля получим [12, с. 183–185] *задачу глобального управления верхним особым* (*генеральным*) *показателем Боля*, т. е. задачу о построении для системы (13) такого измеримого и ограниченного управляющего воздействия $U(\cdot)$, которое обеспечивает при произвольном заранее заданном вещественном числе α выполнение равенства $\Omega^0(A + BU) = \alpha$, где $\Omega^0(A + BU)$ — верхний особый показатель Боля замкнутой системы (13).

Перейдем теперь к рассмотрению основного вопроса данной работы — к задаче глобального управления асимптотическими инвариантами двумерной системы (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами и наблюдателем (2), т. е. системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad m \in \{1, 2\}, \quad t \geqslant 0, \tag{15}$$

$$y = C^*(t)x, \quad y \in \mathbb{R}^p, \quad t \geqslant 0. \tag{16}$$

Для этого воспользуемся, как уже было сказано ранее, подходом, предложенным Р. Калманом и ра́звитым (при решении задачи глобального управления асимптотическими характеристиками таких систем) В. А. Зайцевым [7], [31, с. 88–99]. Построим по системе (15), (16) и по выходу y систему ее асимптотической оценки состояния [4, с. 69], т. е. систему

$$\dot{\widehat{x}} = A(t)\widehat{x} + V(t)(y(t) - C^*(t)\widehat{x}) + B(t)u, \quad \widehat{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0, \tag{17}$$

где $\widehat{x}(t)$ — оценка состояния системы (15), (16). Возьмем в качестве u в системе (17) управление

$$u = U(t)\widehat{x}, \quad t \geqslant 0. \tag{18}$$

Подставив управление (18) в системы (15), (16) и (17), получим четырехмерную систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\widehat{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & B(t)U(t) \\ V(t)C^*(t) & A(t) + B(t)U(t) - V(t)C^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \widehat{x} \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 0. \tag{19}$$

Замечание 7. В системе (19) матрицы $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ играют роль управлений. Будем считать матричные управления $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ *допустимыми*, если они являются измеримыми и ограниченными на $\mathbb{R}_+$ матричными функциями со значениями в пространствах $\mathrm{M}_{m\,2}$ и $\mathrm{M}_{2\,p}$ соответственно.

Введем вектор отклонения $\widetilde{x} = \widetilde{x}(t)$ состояния $x(t)$ системы (15), (16) от оценки состояния $\widehat{x}(t)$, т. е. вектор $\widetilde{x}(t) := x(t) - \widehat{x}(t)$. Применим невырожденную замену переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ \widetilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ E & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \widehat{x} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Тогда система (19) переходит в систему с блочно-треугольной матрицей коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\widetilde{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) + B(t)U(t) & -B(t)U(t) \\ 0 & A(t) - V(t)C^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \widetilde{x} \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 0. \tag{21}$$

Известно [4, с. 77], что если система (1), (2) с постоянными коэффициентами обладает свойством полной управляемости и полной наблюдаемости, то можно выбрать такие постоянные управления U и V, которые обеспечивают для диагональных блоков матрицы коэффициентов системы (21) наперед заданные характеристические многочлены $\chi(A+BU)$ и $\chi(A-VC^*)$. Ввиду замечания 6, вещественные части корней этих характеристических многочленов образуют полный спектр показателей Ляпунова как системы (21), так и асимптотически эквивалентной ей системы (19). Поэтому в стационарном случае задача глобального управления характеристическими показателями системы (19) является полностью решенной. Для линейных нестационарных систем (1), (2) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (3), (6), (7), имеет место следующая теорема.

Теорема 5 (см. [7], [31, следствие 6.8]). *Если система* (1) *равномерно вполне управляема, а система* (8), (9) *равномерно вполне наблюдаема, то верхний особый показатель Боля системы* (19) *глобально управляем, т. е. для любого* $\alpha \in \mathbb{R}$ *существуют допустимые управления* $U(\cdot)$ *и* $V(\cdot)$ *такие, что верхний особый показатель Боля* $\Omega^0_{U,V}$ *замкнутой системы* (19) *с этими управлениями удовлетворяет равенству* $\Omega^0_{U,V} = \alpha$.

Замечание 8. Теорема 5 доказана в [7] для определения равномерной полной управляемости в смысле Калмана. Поскольку коэффициенты системы (1), (2) удовлетворяют условиям (3), (6), (7), по теореме 3 [9] из определения равномерной полной управляемости в смысле Тонкова следует определение равномерной полной управляемости в смысле Калмана. Поэтому теорема 5 будет справедлива и для определения равномерной полной управляемости в смысле Тонкова.

Замечание 9. Как легко видеть, выше (см., например, теорему 5) предложена несколько иная, по сравнению с классической (ср. с определением 10), формулировка задачи глобального управления асимптотическими инвариантами (полным спектром характеристических показателей Ляпунова, верхним особым (генеральным) показателем Боля) линейной системы.

В данной работе получены аналогичные вышеприведенным результаты для двумерных нестационарных систем (1), (2) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными матрицами коэффициентов A, B, C. Всюду далее определение равномерной полной управляемости понимается в смысле определения 2 Е. Л. Тонкова. Прежде чем переходить к результатам, получим несколько вспомогательных утверждений.

Теорема 6. *Пусть $n = 2$, $p \in \{1, 2\}$. Если система (8), (9) равномерно вполне наблюдаема, то найдется такое число $T > 0$, кратное величине $\sigma > 0$, что для любой наперед заданной линейной системы (14) с локально интегрируемой и интегрально ограниченной матрицей коэффициентов $D(\cdot)$ существует допустимое управление $V\colon [0, +\infty) \to \mathrm{M}_{2p}$, обеспечивающее при любом $k \in \mathbb{N}$ для матрицы Коши $\widetilde{X}_V(t, s) \in \mathrm{M}_2$, $t, s \geqslant 0$, системы с этим управлением*

$$\dot{\widetilde{x}} = (A(t) - V(t)C^*(t))\widetilde{x}, \quad \widetilde{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0, \tag{22}$$

выполнение равенства

$$\widetilde{X}_V(kT, (k-1)T) = \widetilde{Z}(kT, (k-1)T), \tag{23}$$

в котором $\widetilde{Z}(t, s) \in \mathrm{M}_2$, $t, s \geqslant 0$, — матрица Коши линейной нестационарной системы (14).

Доказательство. Пусть система (8) с наблюдателем (9) равномерно вполне наблюдаема. Тогда в силу определения 4 система (10) обладает свойством равномерной полной управляемости. Отсюда на основании теоремы 3 следует, что система, полученная из системы (10) путем ее замыкания некоторым допустимым управлением $v = V^*(t)x$, т. е. система

$$\dot{x} = (-A^*(t) + C(t)V^*(t))x, \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{24}$$

является равномерно глобально достижимой. Зафиксируем число $T > 0$ из определения равномерной глобальной достижимости для этой системы. В силу замечания 4 это число кратно величине $\sigma > 0$ из определения 2 равномерной полной управляемости для системы (10), совпадающей, ввиду определения 4 и теоремы 2, в свою очередь, с числом $\sigma > 0$, входящим в критерий (теорема 2) равномерной полной наблюдаемости для системы (8) с наблюдателем (9).

Возьмем произвольную систему (14) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами. Применяя лемму Гронуолла–Беллмана [6, с. 108–109] и формулу Лиувилля–Остроградского [6, с. 73], нетрудно показать, что для ее матрицы Коши $\widetilde{Z}(t, s)$, $t, s \geqslant 0$, найдутся такие числа $r_1 \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$, что для всякого $k \in \mathbb{N}$ и любых $t, s \in [(k-1)T, kT]$ выполняются неравенства $\|\widetilde{Z}(t, s)\| \leqslant r_1$ и $\det \widetilde{Z}(t, s) \geqslant \rho$. Отсюда, в силу элементарных свойств определителя и спектральной нормы матрицы, для $\widetilde{Z}^*((k-1)T, kT)$, $k \in \mathbb{N}$, получим оценки

$$\det \widetilde{Z}^*((k-1)T, kT) = \det \widetilde{Z}((k-1)T, kT) \geqslant \rho,$$

$$\|\widetilde{Z}^*((k-1)T, kT) - E\| = \|(\widetilde{Z}((k-1)T, kT) - E)^*\| =$$

$$= \|\widetilde{Z}((k-1)T,kT)-E\| \leqslant \|\widetilde{Z}((k-1)T,kT)\|+1 \leqslant r_1+1=: r,$$

означающие, что при любом $k\in\mathbb{N}$ имеет место включение $\widetilde{Z}((k-1)T,kT)\in\mathcal{M}_2(r,\rho)$.

Зафиксируем произвольное число $k\in\mathbb{N}$. Тогда в силу ранее установленного у системы (24) свойства равномерной глобальной достижимости найдется такое измеримое и ограниченное на отрезке $[(k-1)T,kT]$ управление $V^*(t)$, что для матрицы Коши $X_{V^*}(t,s)$ системы (24) с этим управлением выполняется равенство

$$X_{V^*}(kT,(k-1)T)=\widetilde{Z}^*((k-1)T,kT), \tag{25}$$

в котором $\widetilde{Z}((k-1)T,kT)$ — матрица, обратная к матрице Коши системы (14) на отрезке $[(k-1)T,kT]$. Так как системы (24) и (22), очевидно, являются сопряженными, то для соответствующих матриц Коши $X_{V^*}(t,s)$ и $\widetilde{X}_V(t,s)$ этих систем при всех $t,s>0$ выполняется [6, с. 169] равенство $X_{V^*}(t,s)=\widetilde{X}_V^*(s,t)$, из которого в силу формулы (25) и элементарных свойств матрицы Коши вытекают соотношения

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_V^*(kT,(k-1)T)=X_{V^*}((k-1)T,kT)=(X_{V^*}(kT,(k-1)T))^{-1}=\\ =(\widetilde{Z}^*((k-1)T,kT))^{-1}=\widetilde{Z}^*(kT,(k-1)T),\end{aligned}$$

т. е. $\widetilde{X}_V^*(kT,(k-1)T)=\widetilde{Z}^*(kT,(k-1)T)$. Транспонируя левую и правую части последнего равенства, получим требуемую формулу (23). Ввиду произвольности выбора числа $k\in\mathbb{N}$ теорема 6 доказана. □

Пользуясь рассуждениями, аналогичными сделанным при доказательстве теоремы 4, из теоремы 6 легко установим

Следствие 1. *Пусть $n=2$, $p\in\{1,2\}$. Если система (8), (9) равномерно вполне наблюдаема, то найдется такое число $T>0$, кратное величине $\sigma>0$, что для любой наперед заданной линейной системы (14) с локально интегрируемой и интегрально ограниченной матрицей коэффициентов $D(\cdot)$ существует допустимое управление $V\colon[0,+\infty)\to \mathrm{M}_{2p}$, обеспечивающее при любых $k,l\in\mathbb{N}$ для матрицы Коши $\widetilde{X}_V(t,s)\in\mathrm{M}_2$, $t,s\geqslant 0$, системы (22) с этим управлением выполнение равенства*

$$\widetilde{X}_V(klT,(k-1)lT)=\widetilde{Z}(klT,(k-1)lT),$$

в котором $\widetilde{Z}(t,s)\in\mathrm{M}_2,$, $t,s\geqslant 0$, — матрица Коши линейной нестационарной системы (14).

Зафиксируем произвольные локально интегрируемые и интегрально ограниченные (2×2)-матрицы-функции $F(t)$ и $D(t)$, $t\geqslant 0$, и рассмотрим четырехмерную линейную нестационарную систему

$$\begin{pmatrix}\dot z\\ \dot{\widetilde{z}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F(t) & G(t)\\ 0 & D(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ \widetilde{z}\end{pmatrix},\quad t\geqslant 0, \tag{26}$$

где $G\colon[0,+\infty)\to\mathrm{M}_2$ — некоторая локально интегрируемая и ограниченная матричная функция. Обозначим через $\mathcal{Z}(t,s)$ матрицу Коши системы (26), а через $\mathcal{X}_{U,V}(t,s)$ — матрицу Коши системы (21) с некоторыми фиксированными допустимыми управлениями $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$.

Теорема 7. *Пусть $n=2$, $m,p\in\{1,2\}$. Пусть система (1) равномерно вполне управляема и система (8), (9) равномерно вполне наблюдаема. Тогда существует $T>0$ такое, что для любых локально интегрируемых и интегрально ограниченных матричных функций $F,D\colon\mathbb{R}_+\to\mathrm{M}_2$ найдутся допустимые управления $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$, а также локально интегрируемая и ограниченная матричная функция $G\colon\mathbb{R}_+\to\mathrm{M}_2$, при которых для матрицы Коши $\mathcal{X}_{U,V}(t,s)$, $t,s\geqslant 0$, системы (21) с такими управлениями и для матрицы Коши $\mathcal{Z}(t,s)$, $t,s\geqslant 0$, системы (26) с матричной функцией $G(\cdot)$ при всяком $k\in\mathbb{N}$ справедливо соотношение*

$$\mathcal{X}_{U,V}(kT,(k-1)T)=\mathcal{Z}(kT,(k-1)T).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы проведем в соответствии с работой [7]. Зафиксируем две произвольные двумерные линейные нестационарные системы с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными матрицами коэффициентов:

$$\dot{z} = F(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0, \tag{27}$$

$$\dot{\widetilde{z}} = D(t)\widetilde{z}, \quad \widetilde{z} \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0. \tag{28}$$

Обозначим через $Z(t,s) \in \mathrm{M}_2$ и $\widetilde{Z}(t,s) \in \mathrm{M}_2$, $t,s \geqslant 0$, соответственно матрицы Коши этих систем.

Пусть $n = 2$ и $m,p \in \{1,2\}$. Будем также считать, что система (1) равномерно вполне управляема, а система (8), (9) равномерно вполне наблюдаема. Тогда на основании замечания 3 найдется такое число $\sigma > 0$, что система (1) является σ-равномерно вполне управляемой, а система (8), (9) — σ-равномерно вполне наблюдаемой. Поскольку система (8), (9) обладает свойством σ-равномерной полной наблюдаемости, то в силу теоремы 6 существует такое $T_1 = l_1 \cdot \sigma$ для некоторого $l_1 \in \mathbb{N}$, что при любом $k \in \mathbb{N}$ на отрезке $[(k-1)T_1, kT_1]$ найдется допустимое управление $\widetilde{V}\colon [(k-1)T_1, kT_1] \to \mathrm{M}_{2p}$, при котором для матрицы Коши $\widetilde{X}_{\widetilde{V}}(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, системы (22) выполняется равенство $\widetilde{X}_{\widetilde{V}}(kT_1,(k-1)T_1) = \widetilde{Z}(kT_1,(k-1)T_1)$. Система (1) (или, что то же самое, (15)) является σ-равномерно вполне управляемой, поэтому на основании теоремы 3 соответствующая ей система (13) обладает свойством T_2-равномерной глобальной достижимости, причем в силу замечания 4 выполняется равенство $T_2 = l_2 \cdot \sigma$ для некоторого $l_2 \in \mathbb{N}$. Пусть $l \in \mathbb{N}$ — наименьшее общее кратное чисел l_1 и l_2. Положив $T := l \cdot \sigma$, имеем $T \,\vdots\, T_i$ для $i = 1,2$. Зафиксируем это число T. В силу следствия 1 для системы (22) при любом $k \in \mathbb{N}$ на отрезке $[(k-1)T, kT]$ найдется допустимое управление $V_k\colon [(k-1)T, kT] \to \mathrm{M}_{2\,p}$, обеспечивающее для матрицы Коши $\widetilde{X}_{V_k}(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, системы (22) выполнение равенства

$$\widetilde{X}_{V_k}(kT,(k-1)T) = \widetilde{Z}(kT,(k-1)T). \tag{29}$$

Поскольку система (13) является T_2-равномерно глобально достижимой и выполняется соотношение $T \,\vdots\, T_2$, то на основании теоремы 4 эта система обладает также свойством T-равномерной глобальной достижимости. Так как $Z(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, — матрица Коши системы (27) с интегрально ограниченными коэффициентами, то, пользуясь теми же рассуждениями, что и в доказательстве теоремы 6, нетрудно показать, что найдутся такие числа $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$, при которых для всякого $k \in \mathbb{N}$ выполняется включение $Z(kT,(k-1)T) \in \mathcal{M}_2(r,\rho)$. Отсюда, ввиду T-равномерной глобальной достижимости системы (13), следует, что при каждом $k \in \mathbb{N}$ на отрезке $[(k-1)T, kT]$ найдется допустимое управление $U_k\colon [(k-1)T, kT] \to \mathrm{M}_{m\,2}$, обеспечивающее для матрицы Коши $X_{U_k}(t,s)$ системы (13) с этим управлением равенство

$$X_{U_k}(kT,(k-1)T) = Z(kT,(k-1)T). \tag{30}$$

Положим $U(t) \equiv U_k(t)$ и $V(t) \equiv V_k(t)$ при каждом $t \in [(k-1)T, kT) \subset [0,+\infty)$. Тогда, ввиду формул (29) и (30), для матрицы Коши системы (21) с такими управлениями $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ выполняются равенства

$$\mathcal{X}_{U,V}(kT,(k-1)T) = \begin{pmatrix} X_{U_k}(kT,(k-1)T) & \displaystyle\int\limits_{(k-1)T}^{kT} X_U(kT,\tau)(-B(\tau)U(\tau))\widetilde{X}_V(\tau,(k-1)T)\,d\tau \\ 0 & \widetilde{X}_{V_k}(kT,(k-1)T) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Z(kT,(k-1)T) & \displaystyle\int\limits_{(k-1)T}^{kT} X_U(kT,\tau)(-B(\tau)U(\tau))\widetilde{X}_V(\tau,(k-1)T)\,d\tau \\ 0 & \widetilde{Z}(kT,(k-1)T) \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{31}$$

Для матрицы Коши $\mathcal{Z}(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, системы (26) со всякой фиксированной локально интегрируемой и ограниченной матрицей $G(t)$, $t \geqslant 0$, в силу определений $Z(t,s)$ и $\widetilde{Z}(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, имеет место соотношение

$$\mathcal{Z}(kT,(k-1)T) = \begin{pmatrix} Z(kT,(k-1)T) & \displaystyle\int_{(k-1)T}^{kT} Z(kT,\tau)G(\tau)\widetilde{Z}(\tau,(k-1)T)\,d\tau \\ 0 & \widetilde{Z}(kT,(k-1)T) \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (32)$$

Из (32) и (31) следует равенство при всяком $k \in \mathbb{N}$ соответствующих диагональных блоков матриц $\mathcal{X}_{U,V}(kT,(k-1)T)$ и $\mathcal{Z}(kT,(k-1)T)$. Найдем такую локально интегрируемую и ограниченную матричную функцию $G(\cdot)$, чтобы при каждом $k \in \mathbb{N}$ наддиагональные блоки матриц $\mathcal{X}_{U,V}(kT,(k-1)T)$ и $\mathcal{Z}(kT,(k-1)T)$ также были равны:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} X_U(kT,\tau)(-B(\tau)U(\tau))\widetilde{X}_V(\tau,(k-1)T)\,d\tau = \int_{(k-1)T}^{kT} Z(kT,\tau)G(\tau)\widetilde{Z}(\tau,(k-1)T)\,d\tau. \quad (33)$$

Тем самым мы установим справедливость данной теоремы.

Обозначим для каждого $k \in \mathbb{N}$ левую часть равенства (33) через H_k и оценим ее. Матричные функции $U_k = U_k(t)$, $V_k = V_k(t)$, $t \in [(k-1)T, kT)$, ограничены равномерно относительно $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, управления $U(t)$, $V(t)$, $t \in [0,+\infty)$, ограничены. Поэтому найдутся такие вещественные числа $\nu_i > 0$, $i = 1,2$, при которых справедливы неравенства

$$\|U(t)\| \leqslant \nu_1 \quad \text{и} \quad \|V(t)\| \leqslant \nu_2 \quad \text{для любых} \quad t \in [0,+\infty). \quad (34)$$

Из свойства интегральной ограниченности коэффициентов системы (1) с наблюдателем (2), а также систем (27) и (28) следует, что найдутся такие $a,b,c,d,f > 0$, что выполняются оценки

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{(k-1)T}^{kT} \|A(\tau)\|\,d\tau < a, \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{(k-1)T}^{kT} \|B(\tau)\|\,d\tau < b, \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{(k-1)T}^{kT} \|C(\tau)\|\,d\tau < c, \quad (35)$$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{(k-1)T}^{kT} \|D(\tau)\|\,d\tau < d, \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{(k-1)T}^{kT} \|F(\tau)\|\,d\tau < f. \quad (36)$$

Ввиду (34) и (35), для матриц Коши $X_U(kT,s)$ и $\widetilde{X}_V(s,(k-1)T)$ систем (13) и (22) с управлениями $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ соответственно при $s \in [(k-1)T, kT]$ имеем равномерные по $k \in \mathbb{N}$ оценки

$$\|X_U(kT,s)\| \leqslant \exp\Big(\int_s^{kT} \|A(\tau)+B(\tau)U(\tau)\|\,d\tau\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\Big(\int_{(k-1)T}^{kT} \big(\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|\,\|U(\tau)\|\big)\,d\tau\Big) \leqslant \exp(a+b\nu_1) =: \Delta_1,$$

$$\|\widetilde{X}_V(s,(k-1)T)\| \leqslant \exp\Big(\int_{(k-1)T}^{s} \|A(\tau)-V(\tau)C^*(\tau)\|\,d\tau\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\Big(\int_{(k-1)T}^{kT} \big(\|A(\tau)\| + \|V(\tau)\|\,\|C^*(\tau)\|\big)\,d\tau\Big) \leqslant \exp(a+c\nu_2) =: \Delta_2.$$

В силу этих неравенств, а также первой из формул (34) и второй из (35), для норм матриц H_k при всех $k \in \mathbb{N}$ выполняются не зависящие от $k \in \mathbb{N}$ оценки сверху

$$\|H_k\| \leqslant \int_{(k-1)T}^{kT} \|X_U(kT,\tau)(-B(\tau)U(\tau))\widetilde{X}_V(\tau,(k-1)T)\|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \Delta_1\Delta_2 \int_{(k-1)T}^{kT} \|B(\tau)\|\,\|U(\tau)\|\,d\tau \leqslant \Delta_1\Delta_2 b\nu_1 =: \Delta. \quad (37)$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и $t \in [(k-1)T, kT)$ возьмем в качестве $G(t)$ матричную функцию

$$G(t) \equiv G_k(t) = \frac{1}{T} Z(t, kT) \cdot H_k \cdot \widetilde{Z}((k-1)T, t). \tag{38}$$

Тогда очевидно, что матрица-функция $G = G(t)$, $t \geqslant 0$, является локально интегрируемой на положительной полуоси функцией, причем для всякого $k \in \mathbb{N}$ выполняются равенства

$$\int_{(k-1)T}^{kT} Z(kT,\tau) G(\tau) \widetilde{Z}(\tau,(k-1)T)\, d\tau =$$
$$= \int_{(k-1)T}^{kT} Z(kT,\tau) \cdot \Big(\frac{1}{T} Z(\tau, kT) \cdot H_k \cdot \widetilde{Z}((k-1)T,\tau) \Big) \cdot \widetilde{Z}(\tau,(k-1)T)\, d\tau =$$
$$= H_k = \int_{(k-1)T}^{kT} X_U(kT,\tau)(-B(\tau)U(\tau)) \widetilde{X}_V(\tau,(k-1)T)\, d\tau,$$

устанавливающие для выбранной матрицы-функции $G(t)$, $t \geqslant 0$, справедливость формулы (33).

При любых $t \leqslant s \in [(k-1)T, kT]$ для норм матриц Коши $Z(t,s)$ и $\widetilde{Z}(t,s)$ линейных систем (27) и (28) на основании формул (36) имеем равномерные по $k \in \mathbb{N}$ неравенства

$$\|Z(t,s)\| \leqslant \exp\Big(\int_t^s \|F(\tau)\|\, d\tau \Big) \leqslant \exp\Big(\int_{(k-1)T}^{kT} \|F(\tau)\|\, d\tau \Big) \leqslant e^f =: \delta_1,$$
$$\|\widetilde{Z}(t,s)\| \leqslant \exp\Big(\int_t^s \|D(\tau)\|\, d\tau \Big) \leqslant \exp\Big(\int_{(k-1)T}^{kT} \|D(\tau)\|\, d\tau \Big) \leqslant e^d =: \delta_2.$$

Поэтому для всякого $t \in [(k-1)T, kT]$ справедливы оценки $\|Z(t,kT)\| \leqslant \delta_1$ и $|\widetilde{Z}((k-1)T,t)\| \leqslant \leqslant \delta_2$. Тогда на основании этих оценок, неравенства (37), а также формулы (38), для нормы матричной функции $G(t)$ при любых $k \in \mathbb{N}$ и $t \in [(k-1)T, kT]$ выполняются оценки сверху

$$\|G(t)\| \leqslant \frac{1}{T} \|Z(t,kT)\| \cdot \|H_k\| \cdot \|\widetilde{Z}((k-1)T,t)\| \leqslant \frac{1}{T} \delta_1 \Delta \delta_2,$$

означающие, что выбранная функция $G = G(t)$ является ограниченной при всех $t \geqslant 0$, а значит, искомой матричной функцией. Теорема 7 доказана. □

Теорема 8. *Пусть $n = 2$, $m \in \{1,2\}$, $p \in \mathbb{N}$. Пусть коэффициенты системы (1), (2) удовлетворяют условиям (3), (4), (5), система (1) равномерно вполне управляема и система (8), (9) равномерно вполне наблюдаема. Тогда для любых локально интегрируемых и интегрально ограниченных матриц-функций $F\colon [0,+\infty) \to \mathrm{M}_2$ и $D\colon [0,+\infty) \to \mathrm{M}_2$ существуют допустимые управления $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ такие, что система (19) асимптотической оценки состояния системы (1), (2) с этими управлениями приводима к системе (26) с некоторой локально интегрируемой и ограниченной матрицей $G(t)$.*

Доказательство. Пусть система (1) является равномерно вполне управляемой, а система (8), (9) обладает свойством равномерной полной наблюдаемости. Тогда по теореме 7 найдем такие допустимые управления $U(t)$ и $V(t)$, $t \geqslant 0$, а также матрицу $G(t)$, $t \geqslant 0$, что матрицы Коши систем (21) и (26) совпадают на множестве $\{kT,\ k \in \mathbb{N}\}$. Известно (см., например, [32]), что в этом случае системы (21) и (26) являются асимптотически эквивалентными, т. е. существует связывающее эти системы преобразование Ляпунова

$$\begin{pmatrix} x \\ \widetilde{x} \end{pmatrix} = L(t) \begin{pmatrix} z \\ \widetilde{z} \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 0.$$

Тогда, очевидно, что преобразование

$$\begin{pmatrix} x \\ \widehat{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ E & -E \end{pmatrix} L(t) \begin{pmatrix} z \\ \widetilde{z} \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 0,$$

также является ляпуновским, причем в силу формулы (20) оно приводит систему (19) к системе (26). Теорема 8 доказана. □

Следствие 2. *Пусть $n = 2$, $m, p \in \{1, 2\}$. Пусть коэффициенты системы* (1), (2) *удовлетворяют условиям* (3), (4), (5), *система* (1) *равномерно вполне управляема и система* (8), (9) *равномерно вполне наблюдаема. Тогда верхний особый показатель Боля системы* (19) *глобально управляем.*

Доказательство. Пусть система (1) является равномерно вполне управляемой, а система (8), (9) обладает свойством равномерной полной наблюдаемости. Зададим произвольное число $\alpha \in \mathbb{R}$ и возьмем любую систему (27) с диагональной, локально интегрируемой и интегрально ограниченной матрицей $F(\cdot)$, обладающую верхним особым [2] показателем Боля $\Omega^0(F) = \alpha$. Тогда верхний особый показатель системы

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\tilde{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(t) & 0 \\ 0 & F(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \tilde{z} \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 0, \tag{39}$$

также равен $\Omega^0(F) = \alpha$. Пользуясь теоремой 8, найдем такие допустимые управления $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$, что система (19) с этими управлениями приводима к системе

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\tilde{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(t) & G(t) \\ 0 & F(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \tilde{z} \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 0, \tag{40}$$

с некоторой локально интегрируемой и ограниченной матрицей $G(t)$. Известно [1, с. 120], что особые показатели линейной треугольной системы и линейной системы ее диагонального приближения совпадают. Следовательно, верхние особые показатели треугольной системы (40) и диагональной системы (39) совпадают, поскольку диагонали этих систем равны. Поскольку ляпуновское преобразование не меняет верхний особый показатель, то для показателя Боля системы (19) справедливы соотношения $\Omega^0_{U,V} = \Omega^0(F) = \alpha$. Следствие 2 доказано. $\square$

Определение 11 (см. [31, с. 99]). Система (19) называется *равномерно стабилизируемой динамической обратной связью по выходу*, если для любого $\alpha > 0$ существуют допустимые управления $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ такие, что верхний особый показатель Боля $\Omega^0_{U,V}$ системы (19) с этими управлениями удовлетворяет неравенству $\Omega^0_{U,V} < -\alpha$.

Для линейных нестационарных систем (1), (2) с матрицами-функциями A, B, C, удовлетворяющими условиям (3), (6), (7), имеет место следующая теорема.

Теорема 9 (см. [5, 7], [31, следствие 6.9]). *Если система* (1) *равномерно вполне управляема, а система* (8), (9) *равномерно вполне наблюдаема, то система* (19) *равномерно стабилизируема динамической обратной связью по выходу.*

Из следствия 2 очевидным образом вытекает обобщающее (для случая $n = 2$) теорему 9

Следствие 3. *Пусть $n = 2$, $m, p \in \{1, 2\}$. Пусть коэффициенты системы* (1), (2) *удовлетворяют условиям* (3), (4), (5), *система* (1) *равномерно вполне управляема и система* (8), (9) *равномерно вполне наблюдаема. Тогда система* (19) *равномерно стабилизируема динамической обратной связью по выходу.*

Аналогичным доказательству следствия 2 подходом (подобрав нужным нам образом блоки-матрицы, стоящие на диагонали системы (39)) можно установить обобщение на двумерные нестационарные системы результатов, полученных Р. Калманом [4, с. 77] в стационарном случае.

Следствие 4. *Пусть $n = 2$, $m, p \in \{1, 2\}$. Пусть коэффициенты системы* (1), (2) *удовлетворяют условиям* (3), (4), (5), *система* (1) *равномерно вполне управляема и система* (8), (9) *равномерно вполне наблюдаема. Тогда полный спектр показателей Ляпунова системы* (19) *глобально управляем, т. е. для любых вещественных чисел $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_4$ существуют измеримые и ограниченные управления $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ такие, что система* (19) *с этими управлениями имеет своим полным спектром показателей Ляпунова числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$.*

Финансирование. Работа выполнена в рамках проекта Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований № Ф16М–006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
2. Bohl P. Über Differentialgleichungen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1914. Vol. 144. P. 284–318. https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0144
3. Ляпунов А.М. Собрание сочинений. Т. 2. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 473 с.
4. Калман Р.Э., Фалб П.Л., Арбиб М.А. Очерки по математической теории систем. М.: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
5. Ikeda M., Maeda H., Kodama Sh. Estimation and feedback in linear time-varying systems: a deterministic theory // SIAM Journal on Control. 1975. Vol. 13. No. 2. P. 304–326. DOI: 10.1137/0313018
6. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. 480 с.
7. Зайцев В.А. Ляпуновская приводимость и стабилизация нестационарных систем с наблюдателем // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 3. С. 432–442.
8. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. Vol. 5. No. 1. P. 102–119.
9. Зайцев В. А. Критерии равномерной полной управляемости линейной системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 157–179. DOI: 10.20537/vm150202
10. Тонков Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813. https://mi.mathnet.ru/de3820
11. Зайцев В.А. Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трехмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2003. Вып. 1. С. 31–62. https://elibrary.ru/item.asp?id=22419350
12. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012. 407 с.
13. Козлов А.А., Инц И.В. О равномерной глобальной достижимости двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 2. С. 178–192. DOI: 10.20537/vm170203
14. Козлов А.А., Инц И.В. О глобальной ляпуновской приводимости двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 6. С. 720–742.
15. Зайцев В.А., Тонков Е.Л. Достижимость, согласованность и метод поворотов В. М. Миллионщикова // Известия вузов. Математика. 1999. № 2 (441). С. 45–56. http://mi.mathnet.ru/ivm560
16. Макаров Е.К., Попова С.Н. О глобальной управляемости центральных показателей линейных систем // Известия вузов. Математика. 1999. № 2 (441). С. 60–67. http://mi.mathnet.ru/ivm562
17. Макаров Е.К., Попова С.Н. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 97–106. http://mi.mathnet.ru/de9861
18. Попова С.Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 12. С. 1627–1636. http://mi.mathnet.ru/de10961
19. Попова С.Н. Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 41–46. http://mi.mathnet.ru/de11001
20. Козлов А.А., Макаров Е.К. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 5. С. 621–627.
21. Попова С.Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 8. С. 1048–1054.
22. Козлов А.А. Об управлении полной совокупностью ляпуновских инвариантов линейных систем в невырожденном случае // Труды Института математики НАН Беларуси. 2007. Т. 15. № 2. С. 33–37. http://mi.mathnet.ru/timb95

23. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных равномерно вполне управляемых систем с локально интегрируемыми коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 10. С. 1319–1335.
24. Козлов А.А., Бурак А.Д. Об управлении характеристическими показателями трехмерных линейных дифференциальных систем с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами // Веснік Віцебскага Дзяржаўнага Ўніверсітэта. 2013. № 5 (77). С. 11–31.
https://elibrary.ru/item.asp?id=20411094
25. Козлов А.А., Инц И.В., Бурак А.Д. Глобальная управляемость отдельных асимптотических инвариантов двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами // Молодежь в науке – 2013: Приложение к журналу «Весцi Нацыянальнай акадэмii навук». Ч. 2. Сер. физико-математических наук. 2014. С. 37–45.
26. Babiarz A., Czornik A., Niezabitowski M. On the number of upper Bohl exponents for diagonal discrete time-varying linear system // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2015. Vol. 429. No. 1. P. 337–353. DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.04.022
27. Zaitsev V.A. Uniform global attainability and global Lyapunov reducibility of linear control systems in the Hessenberg form // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 230. Issue 5. P. 677–682. DOI: 10.1007/s10958-018-3768-2
28. Богданов Ю.С. Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. № 6. С. 707–716. http://mi.mathnet.ru/de8686
29. Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1974. Т. 12. С. 71–146.
http://mi.mathnet.ru/intm30
30. Персидский К.П. Об устойчивости движения по первому приближению // Математический сборник. 1933. Т. 40. № 3. С. 284–293. http://mi.mathnet.ru/msb6785
31. Зайцев В.А. К теории стабилизации управляемых систем: дисс. … д-ра физ.-матем. наук / Удмуртский государственный университет. Ижевск, 2015. 293 с.
32. Макаров Е.К. О дискретности асимптотических инвариантов линейных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1322–1331.
http://mi.mathnet.ru/de9786

Поступила в редакцию 06.09.2018

Козлов Александр Александрович, к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой высшей математики, Полоцкий государственный университет, 211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29.
E-mail: kozlovaa@tut.by

Бурак Алексей Дмитриевич, магистрант, Полоцкий государственный университет, 211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29.
E-mail: burakad@inbox.ru

A. A. Kozlov, A. D. Burak

Control over some asymptotic invariants of two-dimensional linear control systems with an observer

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 4, pp. 445–461 (in Russian).

Keywords: linear control system with an observer, uniform complete controllability, uniform complete observability, global controllability of asymptotic invariants.

MSC2010: 34D08, 34H05, 93C15

DOI: 10.20537/vm180402

We consider a linear time-varying control system with an observer with locally integrable and integrally bounded coefficients

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$y = C^*(t)x, \quad y \in \mathbb{R}^p. \tag{2}$$

We study a problem of control over asymptotic invariants for the system closed by linear dynamic output feedback with time-varying coefficients. The research method presented in the paper is based on the construction of a system of asymptotic estimation for the state of the system (1), (2), introduced by R. Kalman. For solving the problem, we use the extension of the notion of uniform complete controllability (in the sense of Kalman) proposed by E.L. Tonkov for systems with coefficients from wider functional classes. The notion of uniform complete observability (in the sense of Tonkov) is given for the system (1), (2). For $n = 2$, it is proved that uniform complete controllability and uniform complete observability (in the sense of Tonkov) of the system (1), (2) with locally integrable and integrally bounded coefficients are sufficient for arbitrary assignability of the upper Bohl exponent and of the complete spectrum of the Lyapunov exponents for the system closed-loop by linear dynamic output feedback. For the proof, we use the previously established results on uniform global attainability of a two-dimensional system (1), closed by linear time-varying static state feedback, under the condition of uniform complete controllability (in the sense of Tonkov) of the open-loop system (1).

Funding. This work was supported by Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research, project no. F16M–006.

REFERENCES

1. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* (Theory of Lyapunov exponents and its application to problems of stability), Moscow: Nauka, 1966, 576 p.
2. Bohl P. Über Differentialgleichungen, *Journal für die reine und angewandte mathematik*, 1914, vol. 144, pp. 284–318 (in German). https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0144
3. Lyapunov A.M. *Sobranie sochinenii. Tom 2* (Collection of works, vol. 2), Moscow–Leningrad: Academy of Sciences of USSR, 1956, 473 p.
4. Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. *Topics in mathematical system theory*, New York: McGraw-Hill, 1969, 356 p.
5. Ikeda M., Maeda H., Kodama Sh. Estimation and feedback in linear time-varying systems: a deterministic theory, *SIAM Journal on Control*, 1975, vol. 13, no. 2, pp. 304–326. DOI: 10.1137/0313018
6. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical stability theory), Moscow: Moscow State University, 1990.
7. Zaitsev V.A. Lyapunov reducibility and stabilization of nonstationary systems with an observer, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, issue 3, pp. 437–447. DOI: 10.1134/S0012266110030122
8. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control, *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 1960, vol. 5, no. 1, pp. 102–119.
9. Zaitsev V.A. Criteria for uniform complete controllability of a linear system, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2015, vol. 25, issue 2, pp. 157–179 (in Russian). DOI: 10.20537/vm150202
10. Tonkov E.L. A criterion of uniform controllability and stabilization of a linear recurrent system, *Differ. Uravn.*, 1979, vol. 15, no. 10, pp. 1804–1813 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de3820
11. Zaitsev V.A. Global attainability and global reducibility of two-dimensional and three-dimensional linear control systems with constant coefficients, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika*, 2003, no. 1, pp. 31–62 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=22419350
12. Makarov E.K., Popova S.N. *Upravlyaemost' asimptoticheskikh invariantov nestatsionarnykh lineinykh sistem* (Controllability of asymptotic invariants of non-stationary linear systems), Minsk: Belarus. Navuka, 2012, 407 p.
13. Kozlov A.A., Ints I.V. On uniform global attainability of two-dimensional linear systems with locally integrable coefficients, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 178–192 (in Russian). DOI: 10.20537/vm170203
14. Kozlov A.A., Ints I.V. On the global Lyapunov reducibility of two-dimensional linear systems with locally integrable coefficients, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, issue 6, pp. 699–721. DOI: 10.1134/S0012266116060021
15. Zaitsev V.A., Tonkov E.L. Attainability, compatibility and V.M. Millionshchikov's method of rotations, *Russian Mathematics*, 1999, vol. 43, no. 2, pp. 42–52. https://zbmath.org/?q=an:1049.93504
16. Makarov E.K., Popova S.N. Global controllability of central exponents of linear systems, *Russian Mathematics*, 1999, vol. 43, no. 2, pp. 56–63. https://zbmath.org/?q=an:1049.93505

17. Makarov E.K., Popova S.N. The global controllability of a complete set of Lyapunov invariants for two-dimensional linear systems, *Differential Equations*, 1999, vol. 35, no. 1, pp. 97–107. https://zbmath.org/?q=an:0942.34054
18. Popova S.N. Global controllability of the complete set of Lyapunov invariants of periodic systems, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, issue 12, pp. 1713–1723. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000023551.43484.e5
19. Popova S.N. Global reducibility of linear control systems to systems of scalar type, *Differential Equations*, 2004, vol. 40, issue 1, pp. 43–49. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000028712.20518.1c
20. Kozlov A.A., Makarov E.K. On the control of Lyapunov exponents of linear systems in the nondegenerate case, *Differential Equations*, 2007, vol. 43, issue 5, pp. 636–642. DOI: 10.1134/S0012266107050072
21. Popova S.N. On the global controllability of Lyapunov exponents for linear systems, *Differential Equations*, 2007, vol. 43, issue 8, pp. 1072–1078. DOI: 10.1134/S0012266107080058
22. Kozlov A.A. A control procedure for total set of Lyapunov invariants for linear systems in nondegenerate case, *Trudy Inst. Mat.*, 2007, vol. 15, no. 2, pp. 33–37 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/timb95
23. Kozlov A.A. On the control of Lyapunov exponents of two-dimensional linear systems with locally integrable coefficients, *Differential Equations*, 2008, vol. 44, issue 10, pp. 1375–1392. DOI: 10.1134/S0012266108100042
24. Kozlov A.A., Burak A.D. About control over characteristic exponents of three-dimensional linear differential systems with a discontinuous and fast oscillated coefficients, *Vest. Vitseb. Dzyarzh. Univ.*, 2013, no. 5 (77), pp. 11–31 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=20411094
25. Kozlov A.A., Ints I.V., Burak A.D. Global controllability of separate asymptotic invariants of two-dimensional linear systems with locally integrable coefficients, *Vestsi Nats. Akad. Navuk Belarusi, Ser. Fiz.-Mat. Navuk, Suppl.*, 2014, pp. 37–45 (in Russian).
26. Babiarz A., Czornik A., Niezabitowski M. On the number of upper Bohl exponents for diagonal discrete time-varying linear system, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2015, vol. 429, no. 1, pp. 337–353. DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.04.022
27. Zaitsev V.A. Uniform global attainability and global Lyapunov reducibility of linear control systems in the Hessenberg form, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, issue 5, pp. 677–682. DOI: 10.1007/s10958-018-3768-2
28. Bogdanov Yu.S. On asymptotically equivalent linear differential systems, *Differ. Uravn.*, 1965, vol. 1, no. 6, pp. 707–716 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de8686
29. Izobov N.A. Linear systems of ordinary differential equations, *Journal of Soviet Mathematics*, 1976, vol. 5, issue 1, pp. 46–96. DOI: 10.1007/BF01091661
30. Persidski K.P. On stability of motion in the first aproximation, *Matematicheskii Sbornik*, 1933, vol. 40, no. 3, pp. 284–293 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/msb6785
31. Zaitsev V.A. To the theory of stabilization of control systems, *Dr. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation*, Izhevsk, 2015, 293 p. (In Russian).
32. Makarov E.K. On the discreteness of asymptotic invariants of linear differential systems, *Differential Equations*, 1998, vol. 34, issue 10, pp. 1323–1331. https://zbmath.org/?q=an:1017.34039

Received 06.09.2018

Kozlov Aleksandr Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Higher Mathematics, Polotsk State University, ul. Blokhina, 29, Novopolotsk, 211440, Belarus.
E-mail: kozlovaa@tut.by

Burak Aleksei Dmitrievich, Master Student, Polotsk State University, ul. Blokhina, 29, Novopolotsk, 211440, Belarus.
E-mail: burakad@inbox.ru