

УДК 517.977.5

© *И. Н. Кандоба, И. В. Козьмин, Д. А. Новиков*

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Обсуждаются вопросы построения допустимых управлений в одной задаче оптимального управления нелинейной динамической системой при наличии ограничений на ее текущее фазовое состояние. Рассматриваемая динамическая система описывает управляемое движение ракеты-носителя от точки старта до момента ее выхода на заданную околоземную эллиптическую орбиту. Задача заключается в построении программного управления, которое обеспечивает выведение ракетой-носителем на орбиту полезной нагрузки максимальной массы и выполнение дополнительных ограничений на текущее фазовое состояние системы. Дополнительные ограничения обусловлены необходимостью учитывать величины скоростного напора, углов атаки и скольжения при движении ракеты в плотных слоях атмосферы и осуществлять падение ее отделяемых частей в заданные районы на земной поверхности. Для ракет-носителей ряда классов такая задача равносильна нелинейной задаче быстрогодействия с фазовыми ограничениями. Предлагаются и численно исследуются два алгоритма построения в этой задаче допустимых управлений, обеспечивающих выполнение указанных дополнительных фазовых ограничений. Методологическую основу одного алгоритма составляет применение некоторого прогнозирующего управления, которое априори строится в задаче быстрогодействия без учета в ней дополнительных ограничений, а другого — использование специальных режимов управления. Приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: динамическая система, итерационный метод, нелинейная управляемая система, оптимальное управление, прогнозирующее управление, задача быстрогодействия, фазовые ограничения, допустимое управление.

DOI: [10.20537/vm180401](https://doi.org/10.20537/vm180401)

Введение

Приводятся результаты численного исследования одной прикладной задачи оптимального управления нелинейной динамической системой при наличии фазовых ограничений. Задача заключается в построении программного управления для ракеты-носителя, которое обеспечивает выведение на заданную околоземную эллиптическую орбиту полезной нагрузки максимальной массы и выполнение ряда ограничений на текущее фазовое состояние системы, описывающей управляемое движение ракеты. В частности, такая задача активно исследуется [1–3] на базе математической модели управляемого движения ракеты как материальной точки — ее центра масс. В такой модели движение ракеты в нормальном гравитационном поле описывается нелинейной динамической системой. В рамках этой модели, с учетом некоторых конструктивных особенностей ракет-носителей ряда типов, упомянутая задача оптимального управления может быть сформулирована [1] как задача быстрогодействия для нелинейной динамической системы с терминальными ограничениями.

В настоящей работе предлагаются алгоритмы построения в этой задаче быстрогодействия допустимых управлений при наличии дополнительных ограничений на текущее фазовое состояние системы. Здесь рассматриваются фазовые ограничения, которые вызваны необходимостью учитывать величину скоростного напора на отдельных атмосферных участках траектории движения ракеты-носителя, а также осуществлять падение отделяемых частей ракеты в заданные районы на земной поверхности.

Для случая детерминированной модели атмосферы предлагается алгоритм построения в исследуемой задаче допустимых управлений, которые обеспечивают выполнение ограничений на

произведения величины скоростного напора на значения углов атаки и скольжения на атмосферном участке траектории движения ракеты-носителя. Методологическую основу этого алгоритма составляет применение прогнозирующего управления [4], которое априори строится в исследуемой задаче без учета в ней этих динамических ограничений. Прогнозирующее управление используется для предсказания фазового состояния динамической системы в каждый следующий момент времени. В процедуре построения искомых управлений применяются результаты указанного прогноза с учетом специфики дополнительных ограничений. Близкий подход, базирующийся на методологии решения задач управления с поводьрем в рамках схемы Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [5, гл. 9], [6, гл. 3], был использован в [7] для построения допустимых управлений в задаче быстрогодействия для существенно более сложной нелинейной динамической системы.

Принимая во внимание содержательную сторону исследуемой задачи быстрогодействия, в качестве прогнозирующего управления целесообразно использовать управление, обеспечивающее выведение ракеты-носителя на заданную орбиту за время, близкое к минимальному. Такое управление может быть построено, например, с помощью описанных в [2, 3] алгоритмов.

Методология построения допустимых в исследуемой задаче управлений, обеспечивающих падение отделяемых частей ракеты в соответствующие им заданные районы, основана на последовательном применении на рассматриваемом промежутке времени двух управлений. Одним из них является некоторое допустимое в этой задаче управление, построенное без учета указанного условия, а другим — постоянное (константное) управление, действующее на определенной части рассматриваемого промежутка.

Предлагаемые в настоящей работе алгоритмы могут быть эффективно применены для исследования задач управления для ракет-носителей некоторых типов. При этом параметры математической модели управляемого движения конкретного типа ракеты могут принимать значения из ограниченных диапазонов, соответствующих условиям ее реальных пусков.

§ 1. Математическая модель управляемого движения ракеты-носителя

Рассмотрим нелинейную динамическую систему, описывающую движение центра масс ракеты-носителя в нормальном гравитационном поле от точки старта до момента выхода носителя на заданную околоземную эллиптическую орбиту. Движение центра масс ракеты-носителя на промежутке $[t_s, t_f]$ в некоторой инерциальной прямоугольной системе координат описывается [1] уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = W(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \vartheta, \psi), \quad \dot{m} = -\mu, \quad \dot{\vartheta} = u_1, \quad \dot{\psi} = u_2, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ — положение и скорость центра масс ракеты-носителя; $W(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \vartheta, \psi)$ — ускорение, которое задается суммой составляющих, определяемых реактивными, аэродинамическими и гравитационными силами; m — масса ракеты-носителя; μ — заданная положительная функция, описывающая расход топлива двигательной установки; ϑ, ψ — углы тангажа и рыскания, которые определяют пространственную ориентацию строительной оси ракеты; t_s — момент начала движения; t_f — момент выхода ракеты-носителя на заданную орбиту.

В качестве управления $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ используются скорости u_1 и u_2 изменения углов тангажа ϑ и рыскания ψ соответственно:

$$|u_1| \leq u_1^{\max}, \quad |u_2| \leq u_2^{\max}. \quad (1.2)$$

В момент времени t_s для системы (1.1) задаются начальные условия

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}(t_s), \quad \mathbf{v}_s = \mathbf{v}(t_s), \quad m_s = m(t_s), \quad \vartheta_s = \vartheta(t_s), \quad \psi_s = \psi(t_s). \quad (1.3)$$

Ракета-носитель должна быть выведена на заданную околоземную эллиптическую орбиту с требуемой точностью, то есть должны быть выполнены терминальные ограничения

$$\begin{aligned} |i - \bar{i}| &\leq \bar{\Delta}_i, \quad |\Omega - \bar{\Omega}| \leq \bar{\Delta}_\Omega, \\ |h_{\min} - \bar{h}_{\min}| &\leq \bar{\Delta}_{h_{\min}}, \quad |h_{\max} - \bar{h}_{\max}| \leq \bar{\Delta}_{h_{\max}}, \\ |\omega - \bar{\omega}| &\leq \bar{\Delta}_\omega, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где наклонение плоскости орбиты i , долгота восходящего узла Ω , минимальная высота орбиты h_{\min} , максимальная высота орбиты h_{\max} , аргумент перигея ω — параметры, определяющие оскулирующую эллиптическую орбиту. Здесь через \bar{i} , $\bar{\Omega}$, \bar{h}_{\max} , \bar{h}_{\min} , $\bar{\omega}$ обозначены значения соответствующих параметров заданной орбиты выведения, а через $\bar{\Delta}_i$, $\bar{\Delta}_\Omega$, $\bar{\Delta}_{h_{\max}}$, $\bar{\Delta}_{h_{\min}}$, $\bar{\Delta}_\omega$ — допустимые отклонения от этих параметров.

К управляемому движению ракеты предъявляется ряд дополнительных требований. Эти требования обуславливают наличие ограничений на текущее фазовое состояние системы (1.1). В частности, требуется, чтобы

$$|\vartheta(t)| \leq \vartheta^{\max}, \quad |\psi(t)| \leq \psi^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f]. \quad (1.5)$$

Необходимо построить программное управление \mathbf{u} , то есть кусочно-непрерывную¹ вектор-функцию $\mathbf{u}(t)$ ($t \in [t_s, t_f]$), которая удовлетворяет условию (1.2) и обеспечивает выведение на заданную орбиту максимальной массы ракеты-носителя с выполнением всех фазовых ограничений. Поскольку ее масса m не зависит от управления и является монотонно убывающей функцией времени, то эта задача сводится к следующей задаче быстрогодействия.

Задача 1. Для управляемой системы (1.1) с заданными начальными условиями (1.3) найти программное управление \mathbf{u} , которое минимизирует значение функционала $J[\mathbf{u}(\cdot)] = t_f$ и удовлетворяет ограничениям (1.2). При этом должны быть выполнены условия (1.4) на параметры орбиты, а также ограничения (1.5).

Управления, удовлетворяющие в задаче 1 всем требованиям, кроме условия оптимальности, будем называть допустимыми в этой задаче.

§ 2. Построение допустимых в задаче быстрогодействия управлений при наличии дополнительных фазовых ограничений

В задаче 1 на текущее фазовое состояние нелинейной динамической системы (1.1) могут накладываться дополнительные ограничения. Появление этих ограничений обуславливается следующими обстоятельствами. Во-первых, на траектории движения ракеты-носителя существуют отдельные атмосферные участки, на которых требуется учитывать величину скоростного напора. Во-вторых, необходимо осуществлять падение отделяемых частей ракеты в соответствующие им заданные районы на земной поверхности. Ниже описываются алгоритмы построения в задаче 1 допустимых управлений при наличии в ней указанных дополнительных фазовых ограничений.

Алгоритм построения допустимых в задаче быстрогодействия управлений с учетом динамических ограничений

Конструктивные особенности ракет-носителей ряда типов обуславливают необходимость при движении ракеты в плотных слоях атмосферы обеспечивать выполнение некоторых динамических ограничений. Эти ограничения могут накладываться, например, на величины скоростного напора $q(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\rho(\|\mathbf{x}\|)\|\mathbf{V}\|^2$, углов атаки α и скольжения β [8, гл. 1]. Здесь $\rho(\|\mathbf{x}\|)$ — плотность воздуха в точке \mathbf{x} ; $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_w)$ — вектор относительной скорости ракеты [9], где $\mathbf{v}_w = \mathbf{v}_w(\mathbf{x})$ — скорость систематического ветра.

В частности [10], для некоторых типов ракет-носителей легкого класса требуется, чтобы величины скоростного напора q , углов атаки α и скольжения β на определенном промежут-

¹В современной теории управления широко используются классы обобщенных и измеримых обычных управлений. В силу линейности системы (1.1) по управлению и выпуклости геометрических ограничений (1.2) обобщенные управления в данном исследовании не потребуются. Учитывая свойства реальных функций, входящих в правые части дифференциальных уравнений (1.1), а также алгоритмические аспекты данной работы, достаточно ограничиться классом кусочно-непрерывных (более того, кусочно-постоянных) управлений.

ке $[t^{(n)}, t^{(k)}] \subseteq [t_s, t_f]$ атмосферного участка траектории движения ракеты удовлетворяли неравенствам

$$\begin{aligned} |q(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))\alpha(t)| &\leq \bar{q}_{\alpha\beta}, \\ |q(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))\beta(t)| &\leq \bar{q}_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad t \in [t^{(n)}, t^{(k)}], \quad (2.1)$$

где $\bar{q}_{\alpha\beta}$ — предельно допустимое значение модуля произведения величины скоростного напора на угол атаки (скольжения).

Рассмотрим случай детерминированной математической модели атмосферы. Кроме того, будем считать, что в этой модели функции $\rho = \rho(\|\mathbf{x}\|)$ и $\mathbf{v}_w = \mathbf{v}_w(\mathbf{x})$ непрерывны.

Для построения в задаче 1 допустимого управления $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ ($t \in [t_s, t_f]$), которое обеспечивает на промежутке $[t^{(n)}, t^{(k)}]$ выполнение дополнительных фазовых ограничений (2.1), предлагается алгоритм, в основе которого лежит процедура последовательного прогнозирования фазового состояния системы (1.1) в каждый следующий момент времени. Этот прогноз осуществляется с помощью некоторых допустимых в задаче 1 управлений, которые определяются фазовым состоянием системы (1.1) в соответствующий текущий момент времени. Далее эти управления будем называть прогнозирующими.

Такая процедура реализуется следующим образом. Рассмотрим в качестве прогнозирующего некоторое допустимое в задаче 1 управление \mathbf{u} , которое определяется фазовым состоянием $X(t^{(n)})$ системы (1.1) в момент времени $t^{(n)}$ и действует на промежутке $[t^{(n)}, t_f]$. Здесь $X = (\mathbf{x}^\top, \mathbf{v}^\top, m, \vartheta, \psi)^\top \in \mathbb{R}^9$. Затем на $[t^{(n)}, t^{(k)}]$ задается сетка моментов времени $t^{(n)} = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = t^{(k)}$, $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$, $i = 0, 1, \dots, N-1$. После чего выполняется итерационная по t_i ($i = 0, 1, \dots, N-1$) процедура, на каждом шаге которой в текущий момент времени t_i выполняются следующие операции.

1. С помощью заданного прогнозирующего управления \mathbf{u} система (1.1) переводится из текущего фазового состояния $X(t_i)$ в состояние $X(t_{i+1})$. Если фазовое состояние $X(t_{i+1})$ системы (1.1) удовлетворяет ограничениям (2.1), то искомое управление $\tilde{\mathbf{u}}$, действующее на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$, задается управлением \mathbf{u} : $\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t)$ ($t \in [t_i, t_{i+1}]$). После чего осуществляется переход к следующей итерации.

В противном случае выполняются следующие операции.

2. Для $X(t_{i+1})$ вычисляются значения $q_{i+1} = q(\mathbf{x}(t_{i+1}), \mathbf{v}(t_{i+1}))$, $\Theta_{i+1} = \Theta(\mathbf{x}(t_{i+1}), \mathbf{v}(t_{i+1}))$ и $\sigma_{i+1} = \sigma(\mathbf{x}(t_{i+1}), \mathbf{v}(t_{i+1}))$ ($\sigma_{i+1} \in [0, \frac{\pi}{2})$) величин скоростного напора q , углов тангажа $\Theta = \arctan\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ и рыскания $\sigma = -\arctan\left(\frac{V_3}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}\right)$ относительной скорости $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)^\top$. Используя неравенства (2.1), для величины q_{i+1} определяются максимально-допустимые абсолютные значения $\bar{\alpha}_{i+1}$ и $\bar{\beta}_{i+1}$ углов атаки α и скольжения β в момент времени t_{i+1} :

$$\bar{\alpha}_{i+1} = \frac{\bar{q}_{\alpha\beta}}{q_{i+1}}, \quad \bar{\beta}_{i+1} = \frac{\bar{q}_{\alpha\beta}}{q_{i+1}}.$$

3. На прямоугольнике $\Lambda = [-\bar{\alpha}_{i+1}, \bar{\alpha}_{i+1}] \times [-\bar{\beta}_{i+1}, \bar{\beta}_{i+1}] \subseteq \mathbb{R}^2$ (или некотором его подмножестве) определяются функции $\vartheta^p = \vartheta^p(\alpha, \beta)$ и $\psi^p = \psi^p(\alpha, \beta)$. Для величин q_{i+1} , Θ_{i+1} и σ_{i+1} значения ϑ^p и ψ^p этих функций задают прогнозируемые значения углов тангажа ϑ и рыскания ψ соответственно при допустимых значениях углов атаки α и скольжения β в момент времени t_{i+1} . Известный [11, 12] математический аппарат позволяет получить соотношения, связывающие значения углов ϑ , ψ , Θ , σ , α и β . Подстановка в них величин Θ_{i+1} и σ_{i+1} приводит к следующим двум равенствам:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= -\cos(\sigma_{i+1}) \sin(\Theta_{i+1} - \vartheta) / \cos(\beta), \\ \sin \beta &= \sin(\psi) \cos(\sigma_{i+1}) \cos(\Theta_{i+1} - \vartheta) - \cos(\psi) \sin(\sigma_{i+1}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тогда из первого в (2.2) равенства

$$y(\alpha, \beta) = \frac{\sin(\alpha) \cos(\beta)}{\cos(\sigma_{i+1})}, \quad (2.3)$$

где $y(\alpha, \beta) = \sin(\vartheta(\alpha, \beta) - \Theta_{i+1})$. Второе в (2.2) равенство представимо в виде квадратичного уравнения относительно $z(\alpha, \beta) = \cos(\psi(\alpha, \beta))$, которое имеет два корня:

$$z^{\pm}(\alpha, \beta) = -\frac{\sin(\sigma_{i+1}) \sin(\beta) \pm |\cos(\alpha) \cos(\beta)| \sqrt{D(\alpha, \beta)}}{1 - \sin^2(\alpha) \cos^2(\beta)},$$

где

$$D(\alpha, \beta) = \cos^2(\sigma_{i+1}) - \sin^2(\alpha) \cos^2(\beta). \quad (2.4)$$

С помощью соотношений (2.3), (2.4) на Λ формально определяются четыре непрерывные функции $y = y(\alpha, \beta)$, $z^+ = z^+(\alpha, \beta)$, $z^- = z^-(\alpha, \beta)$ и $D = D(\alpha, \beta)$. Легко проверить, что для $\sigma_{i+1} \in (0, \frac{\pi}{2})$ величины $y(0, 0)$, $D(0, 0)$ и $z^-(0, 0)$ удовлетворяют неравенствам

$$|y(0, 0)| < 1, \quad D(0, 0) > 0, \quad |z^-(0, 0)| < 1.$$

При этом также несложно убедиться, что если $\sigma_{i+1} = 0$, то $y(0, 0) = 0$, $D(0, 0) = 1$ и $|z^-(\alpha, \beta)| = |\cos(\beta)| \sqrt{\frac{1 - \sin^2(\alpha)}{1 - \cos^2(\beta) \sin^2(\alpha)}} \leq 1 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \Lambda$.

Тогда из непрерывности функций $y = y(\alpha, \beta)$, $z^- = z^-(\alpha, \beta)$ и $D = D(\alpha, \beta)$ следует, что существует такая замкнутая окрестность $\Lambda^{(0)} \subseteq \Lambda$ точки $(0, 0)$, в которой для $\sigma_{i+1} \in [0, \frac{\pi}{2})$ указанные функции удовлетворяют условиям

$$|y(\alpha, \beta)| \leq 1, \quad D(\alpha, \beta) \geq 0, \quad |z^-(\alpha, \beta)| \leq 1 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \Lambda^{(0)}. \quad (2.5)$$

Таким образом, в силу (2.5), на множестве $\Lambda^{(0)}$ значения функций y и z^- корректно задают соответствующие им прогнозируемые значения углов тангажа $\vartheta^p(\alpha, \beta) = \Theta_{i+1} + \arcsin(y(\alpha, \beta))$ и рыскания $\psi^p(\alpha, \beta) = \arccos(z^-(\alpha, \beta))$.

4. С учетом всех ограничений в задаче 1 определяются допустимые экстремальные значения $\tilde{\vartheta}^{\min}$, $\tilde{\vartheta}^{\max}$ и $\tilde{\psi}^{\min}$, $\tilde{\psi}^{\max}$ углов тангажа ϑ и рыскания ψ в момент времени t_{i+1} .

Пусть

$$\underline{\vartheta}^p = \min_{(\alpha, \beta) \in \Lambda^{(0)}} \vartheta^p(\alpha, \beta), \quad \overline{\vartheta}^p = \max_{(\alpha, \beta) \in \Lambda^{(0)}} \vartheta^p(\alpha, \beta),$$

$$\underline{\psi}^p = \min_{(\alpha, \beta) \in \Lambda^{(0)}} \psi^p(\alpha, \beta), \quad \overline{\psi}^p = \max_{(\alpha, \beta) \in \Lambda^{(0)}} \psi^p(\alpha, \beta),$$

$$\underline{\vartheta} = \vartheta(t_i) - u_1^{\max} \Delta t_i, \quad \overline{\vartheta} = \vartheta(t_i) + u_1^{\max} \Delta t_i,$$

$$\underline{\psi} = \psi(t_i) - u_2^{\max} \Delta t_i, \quad \overline{\psi} = \psi(t_i) + u_2^{\max} \Delta t_i.$$

Учитывая ограничения (1.2) и (1.5), если

$$[\underline{\vartheta}, \overline{\vartheta}] \cap [\underline{\vartheta}^p, \overline{\vartheta}^p] \cap [-\vartheta^{\max}, \vartheta^{\max}] \neq \emptyset, \quad [\underline{\psi}, \overline{\psi}] \cap [\underline{\psi}^p, \overline{\psi}^p] \cap [-\psi^{\max}, \psi^{\max}] \neq \emptyset,$$

то

$$\tilde{\vartheta}^{\min} = \max\{\underline{\vartheta}, -\vartheta^{\max}, \underline{\vartheta}^p\}, \quad \tilde{\vartheta}^{\max} = \min\{\overline{\vartheta}, \vartheta^{\max}, \overline{\vartheta}^p\};$$

$$\tilde{\psi}^{\min} = \max\{\underline{\psi}, -\psi^{\max}, \underline{\psi}^p\}, \quad \tilde{\psi}^{\max} = \min\{\overline{\psi}, \psi^{\max}, \overline{\psi}^p\}.$$

В противном случае итерационная процедура прерывается и формулируется вывод о невозможности на основе прогнозирующего управления \mathbf{u} построить на $[t^{(n)}, t^{(k)})$ с помощью данного алгоритма допустимое в задаче 1 управление $\tilde{\mathbf{u}}$, которое на этом промежутке обеспечивает выполнение ограничений (2.1) для заданного значения величины $\bar{q}_{\alpha\beta}$.

5. Строится множество $\tilde{\Lambda}$ элементов $(\alpha, \beta) \in \Lambda^{(0)}$, определяющих допустимые пары значений углов атаки и скольжения в момент времени t_{i+1} . Пусть

$$\Lambda^+ = \{(\alpha, \beta) \in \Lambda^{(0)} \mid \tilde{\vartheta}^{\min} \leq \vartheta^p(\alpha, \beta) \leq \tilde{\vartheta}^{\max}, \quad \tilde{\psi}^{\min} \leq \psi^p(\alpha, \beta) \leq \tilde{\psi}^{\max}\}.$$

Тогда $\tilde{\Lambda}$ определяется как множество элементов $(\alpha, \beta) \in \Lambda^+$, для которых в момент времени t_{i+1} фазовое состояние $X(t_{i+1} | \mathbf{u}^+(\cdot | \alpha, \beta))$ системы (1.1) удовлетворяет ограничениям (2.1), где $X(t_{i+1} | \mathbf{u}^+(\cdot | \alpha, \beta))$ — состояние, в которое система (1.1) переводится из текущего состояния $X(t_i)$ с помощью управления $\mathbf{u}^+(t | \alpha, \beta)$, действующего на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$. Здесь управление $\mathbf{u}^+(t | \alpha, \beta) \equiv (u_1^+(t, \alpha, \beta), u_2^+(t, \alpha, \beta))$ задается формулами

$$u_1^+(t, \alpha, \beta) = (\vartheta^p(\alpha, \beta) - \vartheta(t_i)) / \Delta t_i, \quad u_2^+(t, \alpha, \beta) = (\psi^p(\alpha, \beta) - \psi(t_i)) / \Delta t_i. \quad (2.6)$$

В случае если $\Lambda^+ = \emptyset$ или $\tilde{\Lambda} = \emptyset$, то итерационная процедура прерывается и формулируется приведенный выше вывод о невозможности на основе прогнозирующего управления \mathbf{u} построить на $[t^{(n)}, t^{(k)}]$ с помощью данного алгоритма допустимое в задаче 1 управление $\tilde{\mathbf{u}}$, которое на этом промежутке обеспечивает выполнение ограничений (2.1) для заданного значения величины $\bar{q}_{\alpha\beta}$.

6. Искомое управление $\tilde{\mathbf{u}}(t) = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t))$, действующее на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$, строится следующим образом. Пусть

$$(\alpha^*, \beta^*) = \text{Arg} \left\{ \min_{(\alpha, \beta) \in \tilde{\Lambda}} F(\alpha, \beta) \right\}, \quad (2.7)$$

где

$$F(\alpha, \beta) = \|\mathbf{x}(t_{i+1} | \mathbf{u}^+(\cdot | \alpha, \beta)) - \mathbf{x}(t_{i+1} | \mathbf{u}(\cdot))\|^2.$$

Тогда

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}^+(t | \alpha^*, \beta^*), \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \quad (2.8)$$

7. С помощью управления $\tilde{\mathbf{u}}$ система (1.1) переводится из текущего фазового состояния $X(t_i)$ в состояние $X(t_{i+1})$ в момент времени t_{i+1} . После чего t_{i+1} рассматривается в качестве начального момента времени для динамической системы (1.1). В этот момент времени начальные условия (1.3) для этой системы инициализируются значениями соответствующих компонент ее состояния $X(t_{i+1})$. Затем на промежутке $[t_{i+1}, t_f]$ рассматривается аналогичная задаче 1 вспомогательная задача оптимального управления. В этой задаче строится некоторое допустимое управление \mathbf{u} , которое применяется в качестве прогнозирующего на следующей итерации.

При успешном завершении итерационной процедуры искомое управление $\tilde{\mathbf{u}}$ на промежутке $[t^{(k)}, t_f]$ задается либо текущим прогнозирующим управлением $\mathbf{u}(t)$ ($t \in [t^{(k)}, t_f]$), либо другим допустимым в задаче 1 управлением, определяемым фазовым состоянием системы (1.1) в момент времени $t^{(k)}$.

Как показывают приведенные ниже результаты численного моделирования, с помощью этой процедуры на основе некоторых прогнозирующих управлений \mathbf{u} удается построить допустимые в задаче 1 управления $\tilde{\mathbf{u}}$, которые на промежутке $[t^{(n)}, t^{(k)}]$ обеспечивают выполнение дополнительных ограничений (2.1) на текущее фазовое состояние системы (1.1) при значениях $\bar{q}_{\alpha\beta}$, не меньших некоторой величины $\bar{q}_{\alpha\beta}^{\min}(\mathbf{u}, t^{(n)}, t^{(k)})$.

Вообще говоря, для построения управления $\tilde{\mathbf{u}}$ на каждом элементарном промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ с помощью описанной выше методологии достаточно прогнозировать только величину скоростного напора q и значения Θ и σ углов тангажа и рыскания относительной скорости \mathbf{V} в момент времени t_{i+1} . Этот прогноз может быть осуществлен, например, методами экстраполяции значений перечисленных величин по некоторой предыстории движения системы (1.1). В предлагаемом алгоритме процедура прогнозирования может быть реализована с помощью оптимальных

в задаче 1 управлений, используемых в качестве прогнозирующих фазовое состояние системы (1.1) в каждый следующий момент времени t_{i+1} . В этом случае может быть достигнута основная цель данного исследования — построение в задаче 1 управления, обеспечивающего выведение ракеты-носителя на заданную орбиту за время, близкое к минимальному, с учетом дополнительных фазовых ограничений (2.1). Кроме того, для построения управления \tilde{u} в предложенной процедуре используется методология экстремального сдвига (см. [5, гл. 9]). Эта методология реализуется с помощью выражений (2.7), (2.8). Ее применение оправдано тогда, когда в качестве прогнозирующих используются оптимальные в задаче 1 управления. Таким образом, предпринимается попытка удержать фазовую траекторию динамической системы (1.1) вблизи ее поводыря [7] — траектории системы, реализующейся с помощью текущего оптимального в задаче 1 управления.

Алгоритмы построения допустимых в задаче быстрогодействия управлений, обеспечивающих падение отделяемых частей носителя в заданные районы

Рассмотрим вопросы построения в задаче 1 допустимых управлений, с помощью которых осуществляется падение отделяемых частей ракеты в соответствующие им заданные районы на земной поверхности. Это условие приводит к возникновению в задаче 1 дополнительных фазовых ограничений, которые могут быть заданы с помощью неравенств

$$r(\hat{t}_f, \hat{x}(\hat{t}_f)) \leq \hat{\varepsilon}, \quad (2.9)$$

где $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$ — вектор координат центра масс отделяемой части в математической модели ее неуправляемого баллистического спуска, \hat{t}_f — момент времени падения отделяемой части на Землю, r — расстояние от центра масс отделяемой части до центра заданного для нее района падения. Здесь разрешенный район падения отделяемой части считается круговым и задается тремя параметрами: широта, долгота, $\hat{\varepsilon}$ (допустимое отклонение точки падения отделяемой части от центра района).

Как отмечалось выше, допустимые в задаче 1 управления, обеспечивающие выполнение дополнительных ограничений (2.9), предлагается строить в результате последовательного применения двух управлений на некотором промежутке времени, предшествующем сбросу отделяемой части. Во-первых, допустимого в этой задаче управления, построенного без учета ограничений (2.9). И, во-вторых, постоянного управления, действующего на определенной части указанного промежутка. Учитывая, что задача 1 является экстремальной, в такой схеме целесообразно использовать оптимальные (или субоптимальные) в задаче 1 управления. Далее такие управления для краткости будут называться базовыми и обозначаться через u^b .

Для реализации описанной выше схемы разработано два алгоритма, в основе которых лежит общая идея. Суть этой идеи заключается в стремлении применять для выведения ракеты-носителя базовое управление u^b в «неприкосновенном» виде на максимально больших промежутках времени с минимальным числом переключений на специальные режимы управления, обеспечивающие падение отделяемых частей в заданные районы. Специальный режим управления реализуется с помощью постоянного (константного) управления \bar{u} , предназначенного для разворота ракеты-носителя «в сторону» района падения очередной отделяемой части и действующего на промежутке времени минимальной длины, достаточной для выполнения ограничения (2.9).

Процедура первого алгоритма выполняется следующим образом. В определенный момент времени t_1 перед сбросом первой отделяемой части или в момент t_1 непосредственно после сброса очередной отделяемой части начальные условия (1.3) для системы (1.1) инициализируются ее фазовым состоянием, реализующимся в момент времени t_1 . После чего для системы (1.1) строится базовое управление u^b , действующее от t_1 до выхода ракеты-носителя на заданную орбиту. Затем на известном промежутке времени от t_1 до момента t_2 сброса очередной отделяемой части искомое управление строится так. Промежуток $[t_1, t_2)$ делится на две части. На его первой части, промежутке $[t_1, t^*)$, действует текущее базовое управление u^b . Затем происходит

переключение базового управления на постоянное $\bar{\mathbf{u}}$, которое действует до момента t_2 сброса отделяемой части. Таким образом, допустимое в задаче 1 управление $\mathbf{u}(t)$ ($t \in [t_1, t_2)$), обеспечивающее выполнение в этой задаче дополнительных ограничений (2.9), предлагается строить в следующем виде:

$$\mathbf{u}^{bc}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}^b(t|\mathbf{x}(t_1)), & t \in [t_1, t^*), \\ \bar{\mathbf{u}}(t), & t \in [t^*, t_2). \end{cases} \quad (2.10)$$

Здесь момент t^* переключения управления с базового на постоянное и значения двух констант (значений компонент постоянного управления $\bar{\mathbf{u}}$) находятся из следующих условий. Во-первых, к моменту t_2 сброса очередной отделяемой части система (1.1) должна быть переведена с помощью управления \mathbf{u}^{bc} в такое фазовое состояние, которое обеспечивает неуправляемый баллистический спуск сбрасываемой отделяемой части ракеты в заданный район. Во-вторых, длина $t_2 - t^*$ промежутка $[t^*, t_2)$, на котором действует постоянное управление $\bar{\mathbf{u}}$, должна быть минимальна.

Отличие второго алгоритма от первого заключается в том, что с указанного выше момента времени t_1 сначала действует постоянное управление $\bar{\mathbf{u}}$, затем в некоторый момент t^* происходит переключение этого постоянного управления на базовое \mathbf{u}^b , которое определяется фазовым состоянием системы (1.1) в момент времени t^* . В этом случае искомое управление $\mathbf{u}(t)$ ($t \in [t_1, t_2)$) имеет следующую структуру:

$$\mathbf{u}^{cb}(t) = \begin{cases} \bar{\mathbf{u}}(t), & t \in [t_1, t^*), \\ \mathbf{u}^b(t|\mathbf{x}(t^*)), & t \in [t^*, t_2). \end{cases} \quad (2.11)$$

В общем случае выбор варианта структуры ((2.10) или (2.11)) допустимого в задаче 1 управления $\mathbf{u}(t)$ ($t \in [t_1, t_2)$), при наличии в этой задаче ограничений (2.9), зависит от реализующихся с помощью управлений \mathbf{u}^{bc} и \mathbf{u}^{cb} значений функционала J , т.е. времени выведения ракеты-носителя на заданную орбиту. Естественно считать более предпочтительным то управление, которое обеспечивает меньшее значение этой величины. В случае когда в задаче 1, кроме ограничений (2.9) на промежутке $[t_1, t_2)$, необходимо учитывать и ограничения (2.1) на величины произведений скоростного напора на углы атаки и скольжения, то ответ на вопрос о таком выборе уже не столь очевиден. Его можно получить, опираясь на результаты численного моделирования.

Остановимся на вопросе построения базовых управлений \mathbf{u}^b на промежутке $[t_0, t_f]$ ($t_0 \geq t_s$), включающем атмосферный участок траектории движения ракеты и содержащем точки сброса ее отделяемых частей. Этот промежуток представим в виде $[t_0, t_f] = [t_0, t_{\text{atm}}] \cup [t_{\text{atm}}, t_f]$, где t_{atm} — момент времени, начиная с которого в математической модели (1.1)–(1.3) управляемого движения ракеты-носителя влиянием атмосферы можно пренебречь: $W_A(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \vartheta, \psi) = 0$ ($t \in [t_{\text{atm}}, t_f]$), где W_A — аэродинамическая составляющая ускорения W в системе (1.1).

В [2] предложен метод построения базового управления \mathbf{u}^b на завершающем безатмосферном участке траектории движения ракеты-носителя после сброса всех ее отделяемых частей. Этот метод базируется на декомпозиции движения ракеты на три его составляющих — боковое, вертикальное и горизонтальное движения. Такая декомпозиция позволяет свести решение исходной задачи быстрогодействия к последовательному решению более простых, вспомогательных задач оптимального управления для бокового и вертикального движений. Эмпирически показано [1], что управление \mathbf{u}^b , построенное с помощью этого метода, на завершающем участке траектории движения ракеты-носителя обеспечивает его выведение на заданную орбиту за время, близкое к минимальному.

Существенной трудностью, возникающей при попытке применить предложенный в [2] метод построения управления \mathbf{u}^b на промежутке, включающем атмосферный участок $[t_0, t_{\text{atm}}]$, является зависимость аэродинамического ускорения $W_A(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \vartheta, \psi)$ от скорости \mathbf{v} в уравнениях системы (1.1). Это обстоятельство не позволяет реализовать на интервале $[t_0, t_{\text{atm}}]$ применяемую в [2] упомянутую декомпозицию общего движения ракеты. Эта проблема может быть

решена при некоторых допущениях, адекватных условиям реального пуска ракеты-носителя. Предположим, что влияние аэродинамического ускорения W_A на приближенное решение задачи 1 с помощью базового управления \mathbf{u}^b достаточно мало. Если им пренебречь на промежутке $[t_0, t_{\text{atm}})$, то удастся, используя описанную в [2] методологию, построить на $[t_0, t_f]$ базовое управление \mathbf{u}^b с учетом скачкообразного изменения значений массы ракеты-носителя и величины тяги ее двигательной установки в моменты сброса отделяемых частей. Для этого оказывается достаточным в предложенной в [2] процедуре построения базового управления \mathbf{u}^b при интегрировании системы (1.1) разбить текущий промежуток времени на подынтервалы. Границы подынтервалов задаются с помощью точек разрыва функций массы ракеты-носителя и тяги ее двигателей. Затем все возникающие в указанной процедуре интегралы можно вычислять в виде суммы соответствующих такому разбиению слагаемых.

Результаты численного моделирования показывают следующее. Пусть \mathbf{u}^b — базовое управление, которое построено на промежутке $[t_0, t_f] = [t_0, t_{\text{atm}}) \cup [t_{\text{atm}}, t_f]$ описанным выше способом. Значения параметров математической модели (1.1)–(1.3) соответствуют условиям реальных пусков ракеты-носителя. Использование управления \mathbf{u}^b при интегрировании системы (1.1) с учетом аэродинамического ускорения W_A приводит к результатам, которые отличаются от полученных с помощью этого же управления, но без учета W_A , на величины, соизмеримые с методической погрешностью. Это является эмпирическим подтверждением справедливости гипотезы о незначительности влияния аэродинамического ускорения W_A на результат работы алгоритма построения базового управления \mathbf{u}^b при численном моделировании управляемого движения ракеты-носителя для условий реального пуска.

Кроме того, для построения базовых управлений на промежутке $[t_0, t_f]$ может быть использован метод, предложенный в [3]. Этот метод основан на решении серии специальных вспомогательных задач оптимального управления на фиксированных промежутках времени. В этой серии с определенным шагом для каждой очередной задачи уменьшается правый конец соответствующего ей промежутка. Процесс завершается, когда не удается найти решение текущей вспомогательной задачи оптимального управления. Здесь для решения каждой вспомогательной задачи предложено использовать различные методы спуска в пространстве управлений, например метод сопряженных градиентов.

Как показывают результаты вычислительных экспериментов, описанный в [3] метод является крайне чувствительным к выбору начального приближения в процедуре спуска и его численная реализация связана со значительно большими вычислительными затратами по сравнению с методом, предложенным в [2].

§ 3. Результаты численного моделирования

Численное моделирование в задаче 1 проводилось для одного из типов легких двухступенчатых ракет-носителей. Моделировался процесс выведения этой ракеты-носителя на некоторую заданную околоземную эллиптическую орбиту с космодрома Байконур. Для построения детерминированной математической модели атмосферы использовался отраслевой стандарт [13].

Дополнительные ограничения (2.1) и (2.9) на текущее фазовое состояние системы (1.1) задавались на промежутке времени $[\theta, \tau_1)$ атмосферного участка траектории движения ракеты. Здесь $\theta > t_s$ — момент времени окончания действия управления заданной структуры, которое задает специальный режим движения ракеты на начальном атмосферном участке ее траектории; τ_1 — момент отделения первой ступени ракеты. Результаты численного моделирования показывают, что для используемых исходных данных (технические параметры ракеты-носителя, термодинамические характеристики атмосферы) значения моментов времени θ и τ_1 составляют 176.7 с и 240.7 с соответственно.

Для численной апробации описанных в § 2 алгоритмов построения допустимых в задаче 1 управлений, обеспечивающих на $[\theta, \tau_1)$ выполнение дополнительных фазовых ограничений (2.1) или/и (2.9), были использованы базовые управления \mathbf{u}^b . Для построения управлений \mathbf{u}^b на промежутках времени, включающих атмосферный участок траектории движения ракеты и содержащих точки сброса ее отделяемых частей, применялась описанная выше методология.

Работоспособность приведенного в § 2 алгоритма построения допустимых в задаче 1 управлений $\tilde{\mathbf{u}}$, обеспечивающих на промежутке $[\theta, \tau_1]$ выполнение дополнительных ограничений (2.1), исследовалась в рамках следующего вычислительного эксперимента. Искомые управления $\tilde{\mathbf{u}}$ строились для различных значений величины $\bar{q}_{\alpha\beta}$ в правых частях неравенств (2.1). Результаты численного моделирования показывают, что для рассматриваемого типа ракеты-носителя с помощью этого алгоритма удастся построить управления $\tilde{\mathbf{u}}$, когда значение величины $\bar{q}_{\alpha\beta}$ не менее $29 \frac{\text{кН}\cdot\text{с}}{\text{М}^2}$.

На рис. 1 представлены графики функций $Q_\alpha(t|\mathbf{u}) = |q(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))\alpha(t)|$, $t \in [\theta, \tau_1]$. Эти функции описывают динамику абсолютных значений произведения величин скоростного напора на углы атаки, реализующихся для допустимых в задаче 1 управлений \mathbf{u} . Пунктирной линией на рис. 1 отображен график функции $Q_\alpha(t|\mathbf{u}^b)$, где управление $\mathbf{u}^b(t) = \mathbf{u}^b(t|X(\theta))$ ($t \in [\theta, t_f]$) определяется фазовым состоянием $X(\theta)$ системы (1.1) в момент времени θ и в задаче 1 строится без учета ограничений (2.1). Сплошной линией на рис. 1 отображен график функции $Q_\alpha(t|\tilde{\mathbf{u}})$. Тонкой горизонтальной пунктирной линией на этом рисунке отмечено значение величины $\bar{q}_{\alpha\beta}$.

На рис. 2 представлены графики первых компонент управлений \mathbf{u}^b и $\tilde{\mathbf{u}}$ соответственно. На этом рисунке пунктирной линией отображен график первой компоненты управления \mathbf{u}^b , сплошной линией — управления $\tilde{\mathbf{u}}$. Вторые компоненты указанных управлений имеют похожие структуры.

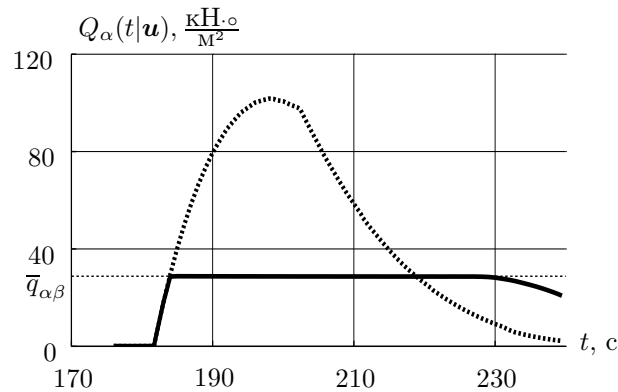


Рис. 1. Графики функций $Q_\alpha(t|\mathbf{u}^b)$ (пунктирная линия) и $Q_\alpha(t|\tilde{\mathbf{u}})$ (сплошная линия), $t \in [\theta, \tau_1]$.
 $\bar{q}_{\alpha\beta} = 29 \frac{\text{кН}\cdot\text{с}}{\text{М}^2}$

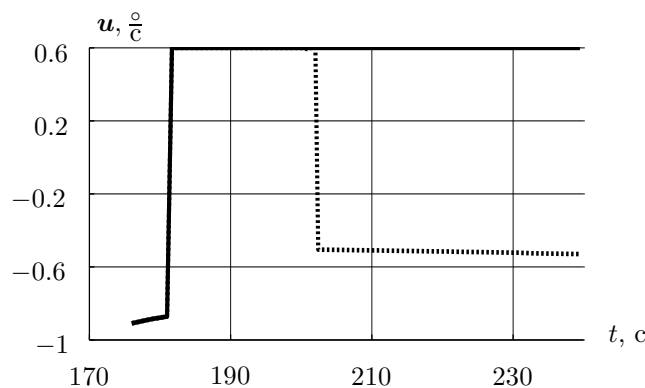


Рис. 2. Графики первых компонент управлений $\mathbf{u}^b(t)$ (пунктирная линия) и $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ (сплошная линия), $t \in [\theta, \tau_1]$

В задаче 1 для рассматриваемого типа ракеты-носителя время выведения $t_f(\mathbf{u}^b)$ на заданную орбиту с помощью управления \mathbf{u}^b составило 513.96 с. А с помощью управления $\tilde{\mathbf{u}}$, построенного для значения $29 \frac{\text{кН}\cdot\text{с}}{\text{М}^2}$ величины $\bar{q}_{\alpha\beta}$ в ограничениях (2.1), это время $t_f(\tilde{\mathbf{u}})$ составило 519.66 с

Таблица 1. Время выведения ракеты-носителя на заданную орбиту для различных управлений и значений величины $\bar{q}_{\alpha\beta}$. Сравнение с базовым управлением: $t_f(\mathbf{u}^b) = 513.96$ с

$\bar{q}_{\alpha\beta}, \frac{\text{кН}\cdot\text{с}}{\text{М}^2}$	$t_f(\tilde{\mathbf{u}}), \text{ с}$	$\Delta t_f(\tilde{\mathbf{u}}), \text{ с}$	$t_f(\tilde{\mathbf{u}}^0), \text{ с}$	$\Delta t_f(\tilde{\mathbf{u}}^0), \text{ с}$
30	518,73	4,77	516,05	2,09
40	516,90	2,94	515,08	1,12
50	518,80	4,84	514,74	0,78
60	514,80	0,84	514,36	0,40
70	516,83	2,87	514,16	0,20
80	517,10	3,14	514,05	0,09
90	514,42	0,46	513,99	0,03
100	516,12	2,16	513,97	0,01

(на 5.7 с больше). В таблице 1 приведены результаты численного моделирования, которые были получены для различных управлений $\tilde{\mathbf{u}}$ и значений величины $\bar{q}_{\alpha\beta}$. Эти данные отражают зависимость значения времени $t_f(\tilde{\mathbf{u}})$ от величины $\bar{q}_{\alpha\beta}$ в ограничениях (2.1). Здесь через $\Delta t_f(\tilde{\mathbf{u}})$ обозначена разность $t_f(\tilde{\mathbf{u}}) - t_f(\mathbf{u}^b)$.

Нетрудно заметить (см. таблицу 1), что при ослаблении ограничений (2.1) (при увеличении значения величины $\bar{q}_{\alpha\beta}$) наблюдается тенденция к уменьшению времени $t_f(\tilde{\mathbf{u}})$ выведения ракеты-носителя на орбиту с помощью управления $\tilde{\mathbf{u}}$. Это объясняется тем, что чем менее жесткие ограничения (2.1) накладываются на фазовое состояние системы (1.1), тем реже приходится прибегать к коррекции (2.6)–(2.8) текущего базового управления \mathbf{u}^b , используемого в качестве прогнозирующего в описанной в § 2 итерационной процедуре построения управления $\tilde{\mathbf{u}}$.

Здесь следует отметить, что полный отказ от переинициализации прогнозирующего базового управления \mathbf{u}^b (см. операцию 7 итерационной процедуры) при ослаблении ограничений (2.1) также приводит к уменьшению времени $t_f(\tilde{\mathbf{u}}^0)$ выведения ракеты-носителя, где через $\tilde{\mathbf{u}}^0$ обозначено управление, построенное с помощью такого варианта указанной процедуры, а $\Delta t_f(\tilde{\mathbf{u}}^0) = t_f(\tilde{\mathbf{u}}^0) - t_f(\mathbf{u}^b)$ (см. таблицу 1). Но при численной реализации этого варианта может возникнуть следующая проблема. На какой-либо итерации процедуры текущее базовое управление может оказаться недопустимым в задаче 1 для того фазового состояния системы (1.1), в которое она переводится с помощью управления $\tilde{\mathbf{u}}$, построенного с помощью соотношений (2.6)–(2.8). Однако следует отметить, что в случае возникновения этой трудности она может быть преодолена с помощью упомянутой выше переинициализации текущего прогнозирующего базового управления \mathbf{u}^b . Как показывают результаты численного моделирования (см. таблицу 1), указанный вариант итерационной процедуры построения управления $\tilde{\mathbf{u}}^0$, обеспечивающего на промежутке $[\theta, \tau_1]$ выполнение ограничений (2.1), с практической точки зрения является более предпочтительным.

В [10, 14, 15] предложены другие подходы к построению допустимых управлений в задачах оптимального выведения ракет-носителей с учетом фазовых ограничений (2.1). Предлагаемые в [10, 14] методы основаны на принципе максимума Л. С. Понтрягина. В [15] описывается подход, базирующийся на математическом аппарате выпуклого программирования. В указанных работах используются некоторые предположения, упрощающие исследуемые задачи. Такие предположения позволяют авторам довести предлагаемые методы до численно реализуемых процедур. В частности, в [10, 14] рассматривается движение ракеты-носителя в центральном гравитационном поле. В [15] используется линеаризация некоторых нелинейных конструкций, позволяющая затем трансформировать задачу оптимального управления в задачу выпуклого программирования. Во всех указанных выше работах ограничения (2.1) не накладываются на угол скольжения в предположении, что он равен нулю. Кроме того, авторами этих работ используются некоторые конструктивные особенности рассматриваемых ракет-носителей кон-

Таблица 2. Значения величины Δt_f для заданного набора альтернативных районов падения первой ступени ракеты-носителя

$X_1, \text{ км}$	$Y_1, \text{ км}$									
		-40	-30	-20	-10	0	10	20	30	40
10		-0,135	-0,137	-0,294	-0,613	-0,805	-1,081	—	—	—
0		-0,035	0,799	0,509	0,263	-0,023	-0,306	-0,601	-0,984	-1,065
-10		-0,347	-0,047	0,379	0,31	0,211	0,066	-0,152	-1,011	-0,597
-20		0,321	1,257	1,159	1,038	0,888	0,73	0,546	0,314	-0,561
-30		0,747	0,274	0,748	0,713	0,64	0,535	0,391	0,196	-0,429
-40		0,612	0,604	0,6	0,599	0,533	1,532	1,034	1,107	-0,439

кретных типов.

Рассмотрим результаты численного моделирования для случая, когда искомое допустимое в задаче 1 управление должно обеспечивать на промежутке $[\theta, \tau_1)$ выполнение фазовых ограничений (2.1) и (2.9). Здесь ограничения (2.9) отражают необходимость осуществить падение в заданный район на земной поверхности первой ступени, отделяемой от ракеты в момент времени τ_1 .

В целях проверки работоспособности предложенных алгоритмов построения управлений \tilde{u}^{bc} и \tilde{u}^{cb} и их сравнения по времени выведения ракеты-носителя на заданную орбиту был проведен следующий вычислительный эксперимент. Центр кругового района падения задавался точкой падения первой ступени ракеты, фазовая траектория движения которой строилась с помощью базового управления u^b , определяемого фазовым состоянием системы (1.1) в момент времени θ . В окрестности центра таким образом заданного района падения первой ступени был построен набор центров альтернативных круговых районов падения того же радиуса $\hat{\varepsilon}$. Координаты центров этих альтернативных районов задавались в следующей системе координат: центр O_1 этой системы координат расположен в центре заданного района падения; ось O_1X_1 направлена на север и лежит в плоскости, касательной к земной поверхности в центре заданного района; ось O_1Z_1 направлена вверх и перпендикулярна плоскости, касательной к земной поверхности в центре заданного района; ось O_1Y_1 дополняет систему координат $O_1X_1Y_1Z_1$ до левой тройки и направлена на восток.

Абсциссы X_1 центров альтернативных районов падения в плоскости $O_1X_1Y_1$ этой системы координат варьировалась в пределах от -40 км до 10 км с шагом 10 км. Ордината Y_1 — от -40 км до 40 км с таким же шагом. Для каждого таким образом построенного альтернативного района численно моделировалось движение ракеты-носителя как с помощью управления \tilde{u}^{bc} , так и с помощью управления \tilde{u}^{cb} .

В ячейках таблицы 2 приводятся значения величины $\Delta t_f = t_f^{cb} - t_f^{bc}$, где t_f^{cb} — время выхода ракеты-носителя на заданную орбиту с помощью управления \tilde{u}^{cb} ; t_f^{bc} — время ее выхода на орбиту с помощью управления \tilde{u}^{bc} .

Приведенные в таблице 2 данные не позволяют выделить очевидные преимущества одного из управлений \tilde{u}^{bc} и \tilde{u}^{cb} перед другим по времени выведения ракеты-носителя на заданную орбиту. Однако результаты численного моделирования показывают следующее.

Во-первых, с помощью управления \tilde{u}^{bc} удастся в задаче 1 удовлетворить ограничениям (2.1) для существенно меньших значений величины $\bar{q}_{\alpha\beta}$.

Во-вторых, в отличие от \tilde{u}^{cb} управление \tilde{u}^{bc} удастся построить как допустимое в задаче 1 для значительно большего числа вариантов расположения альтернативного района падения первой ступени ракеты-носителя. В частности (см. таблицу 2), в задаче 1 допустимое управление \tilde{u}^{cb} , в отличие от \tilde{u}^{bc} , построить не удастся для центров альтернативных районов, абсцисса X_1 которых превышает 10 км.

В третьих, построение управления \tilde{u}^{cb} требует существенно больших вычислительных ресурсов. Так, среднее время расчета одной траектории движения ракеты-носителя от точки

старта до момента его выхода на заданную орбиту в задаче 1 с помощью управления \tilde{u}^{bc} составило 31 с, а с помощью управления \tilde{u}^{cb} — 783 с.

Численное моделирование проводилось с помощью пакета прикладных программ «Программный комплекс Старт Орбита Ракета-Носитель (СтО-РН)» (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017662091) в центре коллективного пользования Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН «Суперкомпьютерный центр ИММ УрО РАН».

Заключение

Результаты численного моделирования с использованием реальных данных свидетельствуют о применимости предложенных в работе подходов к построению допустимых управлений в рассматриваемой задаче быстродействия для нелинейной динамической системы, которые обеспечивают выполнение дополнительных фазовых ограничений на локальных промежутках времени.

Используемая в работе методология прогнозирующих управлений хорошо себя зарекомендовала при решении многих прикладных задач (см., например, [16]), в том числе и задач управления, возникающих в ракетно-космической отрасли [17–19].

В настоящей работе рассмотрен случай детерминированной математической модели атмосферы. В случае же, когда значения параметров атмосферы могут варьироваться в некоторых заданных диапазонах, для построения в исследуемой задаче допустимых управлений с учетом упомянутых выше дополнительных фазовых ограничений можно воспользоваться математическим аппаратом теории дифференциальных игр в формализации Н. Н. Красовского [5]. Эффективность такого подхода подтверждается известным опытом [20] исследования задачи управления посадкой самолета в условиях ветровых возмущений без фазовых ограничений, в которой ветровая нагрузка рассматривается как неопределенная помеха, принимающая значения в заданном диапазоне. Как представляется, математическая постановка подобной задачи управления ракетой-носителем на атмосферном участке ее движения и разработка методов ее решения с использованием теории дифференциальных игр являются перспективными направлениями дальнейших исследований.

Предложенный в настоящей работе подход к построению допустимых в рассматриваемой задаче управлений, обеспечивающих падение отделяемых частей ракеты-носителя в заданные районы, может оказаться достаточно эффективным при выведении носителя не просто на заданную эллиптическую орбиту, а в ее фиксированные точки, принадлежащие определенной части орбиты. Изучение этого вопроса является одним из направлений будущих исследований.

Приведенные в настоящей работе результаты частично представлены на конференции Международной федерации по автоматическому управлению — 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization, Yekaterinburg (CAO 2018), October 15–19, 2018.

Авторы признательны своим коллегам, сотрудникам отдела управляемых систем и отдела динамических систем Института математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, за полезные обсуждения и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Думшева Т.Д., Костоусов В.Б., Костоусова Е.К., Починский В.И. Исследование задачи оптимального вывода полезной нагрузки на заданную эллиптическую орбиту // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 57–65.
2. Мазгалин Д.В. Построение способа управления ракетой-носителем при использовании в качестве управления программных угловых скоростей разворотов // Информационно-управляющие системы. 2010. № 3. С. 21–28.
3. Костоусова Е.К., Починский В.И. О задачах выведения ракеты-носителя на заданные эллиптические орбиты // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 3. С. 201–216.

4. Camacho E.F., Bordons C. Model predictive control. London: Springer, 2007. xxii+405 p.
DOI: [10.1007/978-0-85729-398-5](https://doi.org/10.1007/978-0-85729-398-5)
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 520 с.
7. Кандоба И.Н., Козьмин И.В. Об управлении нелинейной динамической системой в задаче быстрого действия с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 150–162. DOI: [10.21538/0134-4889-2016-22-2-150-162](https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-2-150-162)
8. Лазарев Ю.Н. Управление траекториями аэрокосмических аппаратов. Самара: Самарский научный центр РАН, 2007. 274 с.
9. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973. 615 с.
10. Lu P., Pan B. Highly constrained optimal launch ascent guidance // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2010. Vol. 33. No. 2. P. 404–414. DOI: [10.2514/1.45632](https://doi.org/10.2514/1.45632)
11. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика летательных аппаратов. М.: Наука, 1982. 352 с.
12. Апазов Р.Ф., Сытин О.Г. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. М.: Наука, 1987. 440 с.
13. ОСТ 92–5165–92. Ракеты и ракеты-носители. Методика задания горизонтальной скорости ветра и термодинамических параметров атмосферы в районе полигона Байконур в диапазоне высот 0–120 км. М., 1992.
14. Dukeman G.A. Atmospheric ascent guidance for rocket-powered launch vehicles // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. AIAA, 2002. DOI: [10.2514/6.2002-4559](https://doi.org/10.2514/6.2002-4559)
15. Cheng X., Li H., Zhang R. Efficient ascent trajectory optimization using convex models based on the Newton–Kantorovich/Pseudospectral approach // Aerospace Science and Technology. 2017. Vol. 66. P. 140–151. DOI: [10.1016/j.ast.2017.02.023](https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.02.023)
16. Qin S.J., Badgwell T.A. A survey of industrial model predictive control technology // Control Engineering Practice. 2003. Vol. 11. Issue 7. P. 733–764. DOI: [10.1016/S0967-0661\(02\)00186-7](https://doi.org/10.1016/S0967-0661(02)00186-7)
17. Saponara M., Barrena V., Bemporad A., Hartley E.N., Maciejowski J., Richards A., Tramutola A., Trodden P. Model predictive control application to spacecraft rendezvous in Mars sample return scenario // Progress in Flight Dynamics, Guidance, Navigation, Control, Fault Detection, and Avionics. 2013. Vol. 6. P. 137–158. DOI: [10.1051/eucass/201306137](https://doi.org/10.1051/eucass/201306137)
18. Pascucci C.A., Bemporad A., Bennani S., Rotunno M. Embedded MPC for space applications // Proceedings of the 2nd IAA Conference on Dynamics and Control of Space Systems. 2014. P. 1587–1596.
19. Guiggiani A., Kolmanovsky I.V., Patrinos P., Bemporad A. Constrained model predictive control of spacecraft attitude with reaction wheels desaturation // 2015 European Control Conference (ECC). 2015. P. 1382–1387. DOI: [10.1109/ECC.2015.7330731](https://doi.org/10.1109/ECC.2015.7330731)
20. Ганебный С.А., Пацко В.С., Пятко С.Г. Управление самолетом на посадке в условиях ветрового возмущения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 73–91.

Поступила в редакцию 14.11.2018

Кандоба Игорь Николаевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел прикладных проблем управления, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;

доцент, кафедра вычислительной математики, Институт естественных наук и математики, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620026, Россия, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 48.

E-mail: kandoba@imm.uran.ru

Козьмин Иван Викторович, научный сотрудник, отдел прикладных проблем управления, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;

инженер, кафедра прикладной математики, Уральский энергетический институт, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5.

E-mail: ikozmin@imm.uran.ru

Новиков Дмитрий Александрович, математик первой категории, отдел прикладных проблем управления, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

E-mail: ya.novikovdmitry@yandex.ru

I. N. Kandoba, I. V. Koz'min, D. A. Novikov

Numerical investigation of a nonlinear time-optimal problem

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 4, pp. 429–444 (in Russian).

Keywords: dynamic system, iterative method, nonlinear control system, optimal control, predictive control, time-optimal control, phase constraints, admissible control.

MSC2010: 49N90, 93C15

DOI: [10.20537/vm180401](https://doi.org/10.20537/vm180401)

The questions of constructing admissible controls in a problem of optimal control of a nonlinear dynamic system under constraints on its current phase state are discussed. The dynamic system under consideration describes the controlled motion of a carrier rocket from the launching point to the time when the carrier rocket enters a given elliptic earth orbit. The problem consists in designing a program control for the carrier rocket that provides the maximal value of the payload mass led to the given orbit and the fulfillment of a number of additional restrictions on the current phase state of the dynamic system. The additional restrictions are due to the need to take into account the values of the dynamic velocity pressure, the attack and slip angles when the carrier rocket moves in dense layers of the atmosphere. In addition it is required to provide the fall of detachable parts of the rocket into specified regions on the earth surface. For carrier rockets of some classes, such a problem is equivalent to a nonlinear time-optimal problem with phase constraints. Two algorithms for constructing admissible controls ensuring the fulfillment of additional phase constraints are suggested. The numerical analysis of these algorithms is performed. The methodological basis of one algorithm is the application of some predictive control, which is constructed without taking into account the constraints above. Another algorithm is based on special control modes. The results of numerical modeling are presented.

REFERENCES

1. Dumsheva T.D., Kostousov V.B., Kostousova E.K., Pochinskii V.I. On a problem of optimal putting a payload into a given elliptic orbit, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 57–65 (in Russian).
2. Mazgalin D.V. Designing a method to control carrier rocket when angular velocity of rotation is used as a control program, *Informatsionno-Upravlyayushchie Sistemy*, 2010, no. 3, pp. 21–28 (in Russian).
3. Kostousova E.K., Pochinskii V.I. On problems of putting a carrier rocket into specified elliptic orbits, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 3, pp. 201–216 (in Russian).
4. Camacho E.F., Bordons C. *Model predictive control*, London: Springer, 2007, xxii+405 p.
DOI: [10.1007/978-0-85729-398-5](https://doi.org/10.1007/978-0-85729-398-5)
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988, xi+517 p.
6. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi: zadacha o minimume garantirovannogo rezul'tata* (Control of the dynamic system: the problem of the minimum of guaranteed result), Moscow: Nauka, 1985, 520 p.
7. Kandoba I.N., Koz'min I.V. On the control of a nonlinear dynamic system in a time-optimal problem with state constraints, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 299, suppl. 1, pp. 75–87.
DOI: [10.1134/S0081543817090103](https://doi.org/10.1134/S0081543817090103)
8. Lazarev Yu.N. *Upravlenie traektoriyami aerokosmicheskikh apparatov* (Aerospace trajectory control), Samara: Samara Science Centre of the Russian Academy of Sciences, 2007, 274 p.
9. Lebedev A.A., Chernobrovkin L.S. *Dinamika poleta bespilotnykh letatel'nykh apparatov* (Flight dynamics of unmanned aerial vehicles), Moscow: Mashinostroenie, 1973, 615 p.
10. Lu P., Pan B. Highly constrained optimal launch ascent guidance, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2010, vol. 33, no. 2, pp. 404–414. DOI: [10.2514/1.45632](https://doi.org/10.2514/1.45632)
11. Sikharulidze Yu.G. *Ballistika letatel'nykh apparatov* (Ballistics of aircrafts), Moscow: Nauka, 1982, 352 p.

12. Apazov R.F., Sytin O.G. *Metody proektirovaniya nositelei i sputnikov Zemli* (Methods for designing carriers and satellites of the Earth), Moscow: Nauka, 1987, 440 p.
13. *OST 92–5165–92. Rakety i rakety-nositeli. Metodika zadaniya gorizontal'noi skorosti vetra i termodinamicheskikh parametrov atmosfery v raione poligona Baikonur v diapazone vysot 0–120 km* (Industry standard 92–5165–92. Missiles and launch vehicles. The method for setting the horizontal wind speed and thermodynamic parameters of the atmosphere in the area of the Baikonur polygon in the heights range 0–120 km). Moscow, 1992, 94 p.
14. Dukeman G.A. Atmospheric ascent guidance for rocket-powered launch vehicles, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, AIAA, 2002. DOI: [10.2514/6.2002-4559](https://doi.org/10.2514/6.2002-4559)
15. Cheng X., Li H., Zhang R. Efficient ascent trajectory optimization using convex models based on the Newton–Kantorovich/Pseudospectral approach, *Aerospace Science and Technology*, 2017, vol. 66, pp. 140–151. DOI: [10.1016/j.ast.2017.02.023](https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.02.023)
16. Qin S.J., Badgwell T.A. A survey of industrial model predictive control technology, *Control Engineering Practice*, 2003, vol. 11, issue 7, pp. 733–764. DOI: [10.1016/S0967-0661\(02\)00186-7](https://doi.org/10.1016/S0967-0661(02)00186-7)
17. Saponara M., Barrera V., Bemporad A., Hartley E.N., Maciejowski J., Richards A., Tramutola A., Trodden P. Model predictive control application to spacecraft rendezvous in Mars sample return scenario, *Progress in Flight Dynamics, Guidance, Navigation, Control, Fault Detection, and Avionics*, 2013, vol. 6, pp. 137–158. DOI: [10.1051/eucass/201306137](https://doi.org/10.1051/eucass/201306137)
18. Pascucci C.A., Bemporad A., Bennani S., Rotunno M. Embedded MPC for space applications, *Proceedings of the 2nd IAA Conference on Dynamics and Control of Space Systems*, 2014, pp. 1587–1596.
19. Guiggiani A., Kolmanovsky I.V., Patrinos P., Bemporad A. Constrained model predictive control of spacecraft attitude with reaction wheels desaturation, *2015 European Control Conference (ECC)*, 2015, pp. 1382–1387. DOI: [10.1109/ECC.2015.7330731](https://doi.org/10.1109/ECC.2015.7330731)
20. Ganebny S.A., Patsko V.S., Pyatko S.G. Aircraft landing control under wind disturbances, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 112–130. DOI: [10.1134/S0081543810050093](https://doi.org/10.1134/S0081543810050093)

Received 14.11.2018

Kandoba Igor' Nikolaevich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Applied Control Problems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Associate Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, ul. Kuibysheva, 48, Yekaterinburg, 620026, Russia.
E-mail: kandoba@imm.uran.ru

Koz'min Ivan Viktorovich, Researcher, Department of Applied Control Problems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Engineer, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, ul. S. Kovalevskoi, 5, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: ikozmin@imm.uran.ru

Novikov Dmitrii Aleksandrovich, Mathematician of the First Category, Department of Applied Control Problems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: ya.novikovdmitry@yandex.ru