ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МЕХАНИКА 2017. Т. 27. Вып. 4

УДК 517.925

© *И. А. Бизяев*

ИНВАРИАНТНАЯ МЕРА В ЗАДАЧЕ О КАЧЕНИИ ДИСКА ПО ПЛОСКОСТИ[1]

В работе исследуется динамика диска, катящегося по абсолютно шероховатой плоскости. Доказано, что уравнения движения обладают инвариантной мерой с непрерывной плотностью только в двух случаях: при динамически симметричном диске и диске со специальным распределением масс. В первом случае уравнения движения обладают двумя дополнительными интегралами и являются интегрируемыми в квадратурах по теореме Эйлера–Якоби. Во втором случае с помощью отображения Пуанкаре показано отсутствие дополнительных интегралов. В обоих случаях для любой области фазового пространства, переносимой потоком системы, ее объем, вычисленный с помощью плотности инвариантной меры, сохраняется. В неголономной механике известны как системы, допускающие инвариантную меру, так и системы, у которых она отсутствует.

Ключевые слова: неголономная механика, теорема Шварцшильда–Литтлвуда, многообразие падений, хаотическая динамика.

DOI: 10.20537/vm170407

Введение

Как было показано В. В. Козловым [7], в общем случае уравнения движения неголономной механики не обладают инвариантной мерой с непрерывной плотностью. Это приводит к тому, что в неголономных системах встречаются типичные для диссипативных систем эффекты, например, в фазовом пространстве может присутствовать странный аттрактор [5]. Тем не менее при определенных ограничениях на параметры системы могут выделяться случаи, в которых существует непрерывная инвариантная мера [10], и, следовательно, справедлива теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. В данной работе рассмотрен вопрос о существовании непрерывной инвариантной меры в задаче о качении по плоскости без проскальзывания диска с произвольным распределением масс.

Если диск является динамически симметричным, тогда уравнения движения обладают инвариантной мерой и являются интегрируемыми в квадратурах по теореме Эйлера – Якоби. Ее качественное поведение исследовалось во многих работах. Так, в работе [9], на основе анализа явных квадратур, показано, что в поле тяжести почти при всех начальных условиях диск не упадет на плоскость. Аналогичный результат был получен в [4], а именно показано, что наличие инвариантной меры (в следствие теоремы Шварцшильда – Литтлвуда) приводит к тому, что множество траекторий падения имеет нулевую меру. В [8] этот результат был получен уже для неинтегрируемой задачи о качении динамически симметричного тяжелого диска по наклонной плоскости. В работе [2] построена бифуркационная диаграмма для динамически симметричного диска в пространстве первых интегралов и доказано, что почти при всех начальных условиях траектории диска являются ограниченными.

Другой случай со специальным распределением масс диска был указан в работе [6]. В этой работе доказано, что уравнения движения диска обладают непрерывной инвариантной мерой только в динамически симметричном случае или со специальным распределением масс. Кроме того, во втором случае показано, что в системе отсутствуют дополнительные интегралы.

[1]Исследование выполнено в рамках государственного задания Минобрнауки России (1.2404.2017/4.6) и частично подержано фондом Д. Зимина «Династия».

МЕХАНИКА 2017. Т. 27. Вып. 4

§ 1. Уравнения движения

Рассмотрим качение диска по плоскости без проскальзывания. Выберем подвижную систему координат $Cx_1x_2x_3$, связанную с главными осями инерции диска. Пусть m — масса диска и $\mathbf{I} = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_1 + I_2)$ — его тензор инерции. В общем случае диск имеет форму эллипса с полуосями b_1 и b_2, а центр масс смещен относительно геометрического центра на вектор $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Условие отсутствия проскальзывания в точке контакта P представим в форме

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = 0,$$

где $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{v}$ — угловая скорость и скорость центра масс диска, а $\boldsymbol{r} = CP$ — вектор, направленный из центра масс диска в точку контакта (см. рис. 1).

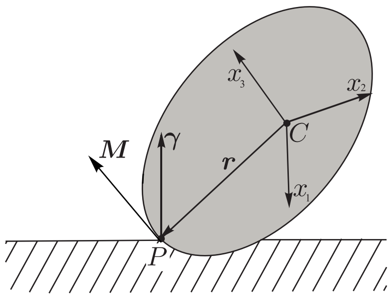

Рис. 1. Диск на плоскости

Угловой момент диска $\boldsymbol{M}$ относительно точки контакта выражается через угловую скорость следующим образом:

$$\boldsymbol{M} = \widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}, \quad \widetilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + m\boldsymbol{r}^2\mathbf{E} - m\boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{r},$$

где знак $\otimes$ обозначает тензорное произведение, то есть в матричной форме $\boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{r} = \|r_i r_j\|$. Вектор $\boldsymbol{r}$ выражается через нормаль к плоскости в точке контакта $\boldsymbol{\gamma}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{r} = -\frac{\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{(\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}} - \boldsymbol{a}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{diag}(b_1^2, b_2^2, 0).$$

Уравнения, описывающие эволюцию $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, имеют вид [1]

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}},\\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega},\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $U = U(\boldsymbol{\gamma})$ — потенциал внешних сил, зависящий от $\boldsymbol{\gamma}$. Например, при качении диска в поле тяжести

$$U = -m\mathrm{g}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\gamma}),$$

где g — ускорение свободного падения.

§ 2. Первые интегралы и инвариантная мера

Система (1.1) сохраняет энергию и обладает геометрическим интегралом

$$E = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{M}) + U, \quad \boldsymbol{\gamma}^2 = 1.$$

Таким образом, для интегрируемости системы (1.1) по теореме Эйлера–Якоби не хватает инвариантной меры и двух первых интегралов.

В случае если диск является симметричным (то есть $I_2 = I_1$, $b_2 = b_1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$), система (1.1) обладает стандартной инвариантной мерой ($\rho = \mathrm{const}$) и полем симметрий

$$\boldsymbol{u} = M_1\frac{\partial}{\partial M_2} - M_2\frac{\partial}{\partial M_1} + \gamma_1\frac{\partial}{\partial\gamma_2} - \gamma_2\frac{\partial}{\partial\gamma_1},$$

связанным с инвариантностью системы относительно вращения диска вокруг оси динамической симметрии (см. подробнее в [1]).

Кроме того, в этом случае существуют два линейных по моментам интеграла F_1 и F_2, которые можно представить в виде

$$F_k = c_1^k(\gamma_3)(\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2) + c_2^k(\gamma_3)M_3, \quad k = 1, 2,$$

где $c_1^k(\gamma_3)$, $c_2^k(\gamma_3)$ выражаются через комбинации обобщенных гипергеометрических функций [2]. Следовательно, в этом случае система (1.1) интегрируема по теореме Эйлера – Якоби.

В общем случае для системы (1.1) оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема 1. *Система* (1.1) *обладает инвариантной мерой* $\rho(\boldsymbol{\gamma})d\boldsymbol{M}d\boldsymbol{\gamma}$ *в двух случаях:*

— *диск является симметричным; в этом случае инвариантная мера имеет стандартную плотность* ($\rho = \mathrm{const}$)*;*

— *диск является уравновешенным* ($\boldsymbol{a} = 0$)*, и, кроме того, его полуоси и моменты инерции связаны между собой соотношением*

$$b_1^2 I_1^2 - b_2^2 I_2^2 + m b_1^2 b_2^2 (I_1 - I_2) = 0. \tag{2.1}$$

В этом случае $\rho(\boldsymbol{\gamma}) = (\det\widetilde{\mathbf{I}})^{\frac{1}{4}}$.

Во всех остальных случаях система (1.1) *не обладает инвариантной мерой с плотностью, зависящей только от* $\boldsymbol{\gamma}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим правые части системы (1.1) через $\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{M})$ и $\widetilde{\gamma}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{M})$ и представим ее в виде

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{M}), \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \widetilde{\gamma}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{M}).$$

Тогда уравнение Лиувилля для плотности инвариантной меры $\rho d\boldsymbol{M}d\boldsymbol{\omega}$ примет форму

$$\frac{1}{\rho}\left(\left(\frac{\partial\rho}{\partial\boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\gamma}\right) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\boldsymbol{M}}, \widetilde{\boldsymbol{M}}\right)\right) = -\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{M}}_i}{\partial\boldsymbol{M}_i},$$

здесь уже учтено, что $\sum\limits_i \frac{\partial\widetilde{\gamma}_i}{\partial\gamma_i} = 0$. Из (1.1) следует, что в правой части последнего уравнения стоит линейная однородная по $\boldsymbol{M}$ функция. Поэтому ее можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{M}}_i}{\partial\boldsymbol{M}_i} = (\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\omega}),$$

где вектор $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma})$ имеет довольно громоздкий вид, поэтому он здесь явно не приведен, хотя его не сложно вычислить при помощи любой системы аналитических вычислений, например *Maple* или *Mathematica*. С учетом найденного соотношения уравнение для инвариантной меры примет вид

$$\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\gamma}\right) + \left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\boldsymbol{M}}, \widetilde{\boldsymbol{M}}\right) + (\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\omega}) = 0. \tag{2.2}$$

В случае когда $\rho = \rho(\boldsymbol{\gamma})$, уравнение (2.2) сводится к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \ln \rho(\boldsymbol{\gamma}) \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\omega}\right) = 0.$$

Так как предыдущее соотношение должно выполняться при произвольных $\boldsymbol{\omega}$, то справедливо тождество

$$\boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \ln \rho(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma}).$$

Применив оператор дивергенции по переменным $\boldsymbol{\gamma}$ к обеим частям этого уравнения, а также домножив его скалярно на $\boldsymbol{\gamma}$, получим

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \chi_i}{\partial \gamma_i} = 0, \quad (\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\gamma}) = 0.$$

Выполнив непосредственные вычисления, можно показать, что указанные условия выполняются только в двух случаях, описанных в теореме. □

Замечание 1. В работе [3] было доказано отсутствие гладкой инвариантной меры (в отсутствие внешнего поля $U = 0$) при качении однородного эллипсоида по плоскости без проскальзывания.

Из теоремы Шварцшильда – Литтлвуда [4] следует, что в случае (2.1) множество траекторий падения имеет нулевую меру. Впервые этот случай со специальным распределением масс (2.1) был указан в работе [6].

Предыдущая теорема не затрагивает вопрос о наличии инвариантной меры с плотностью $\rho = \rho(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})$, поэтому в общем случае о вероятности падения диска ничего не известно. Более того, если гладкая инвариантная мера существует вблизи многообразий падений, но отсутствует глобально, множество траекторий падения по-прежнему будут иметь нулевую меру. Тем не менее в данном случае справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если система (1.1) при $U = 0$ допускает инвариантную меру $\rho_1(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) d\boldsymbol{M} d\boldsymbol{\gamma}$ с плотностью $\rho_1(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})$, аналитической в окрестности инвариантного многообразия $\boldsymbol{M} = 0$, то существует инвариантная мера вида $\rho_2(\boldsymbol{\gamma}) d\boldsymbol{M} d\boldsymbol{\gamma}$.*

Доказательство. Если в выражении (2.2) сделать замену $\rho = e^{\sigma(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})}$, то будет справедливо соотношение

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}\right) + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \boldsymbol{M}}, \widetilde{\boldsymbol{M}}\right) + (\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\omega}) = 0. \tag{2.3}$$

Далее, согласно предположению теоремы, $\sigma(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})$ разлагается в ряд

$$\sigma(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = \sigma_0(\boldsymbol{\gamma}) + \sum_i \sigma_i(\boldsymbol{\gamma}) M_i + \sum_{i,j} \sigma_{ij}(\boldsymbol{\gamma}) M_i M_j + O(|\boldsymbol{M}|^3).$$

Подставляя это разложение в соотношение (2.3) и учитывая, что $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ при $U = 0$ является однородной квадратичной функций по $\boldsymbol{M}$, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \sigma_0(\boldsymbol{\gamma}) \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\omega}\right) + O(|\boldsymbol{M}|^2) = 0.$$

Вследствие того, что функция ρ_1 задает плотность инвариантной меры, выражение в скобках обращается в нуль. Таким образом, положив $\rho_2(\gamma) = e^{\sigma_0(\gamma)}$, получим искомую инвариантную меру. □

Таким образом, в теореме 1 приведены все случаи, при которых в системе (1.1) при $U=0$ существует всюду непрерывная аналитическая инвариантная мера. Следует отметить, что в потенциальном поле (к примеру, в поле тяжести) $\boldsymbol{M}=0$ уже не является инвариантным многообразием, и, как следствие, доказать аналог теоремы 2 не удается.

Тем не менее численные эксперименты показывают, что в поле тяжести в системе (1.1) в общем случае встречаются различные притягивающие множества (аттракторы). Однако в случае, если диск является уравновешенным, притягивающих множеств обнаружить не удается.

Для диска, параметры которого удовлетворяют условию (2.1), для интегрируемости, по теореме Эйлера – Якоби, не хватает двух дополнительных интегралов. В следующем параграфе будет показано, что в общем случае они отсутствуют.

§ 3. Отсутствие дополнительных интегралов для диска со специальным распределением масс

Вопрос о наличии дополнительных интегралов, в случае если справедливо (2.1), исследуем с помощью отображения Пуанкаре. Подробно процедура построения отображения Пуанкаре описана в работе [1], отметим лишь, что в данном случае оно является трехмерным. Для его параметризации воспользуемся переменными Андуайе – Депри (L, G, H, l, g, h):

$$M_1=\sqrt{G^2-L^2}\sin l,\quad M_2=\sqrt{G^2-L^2}\cos l,\quad M_3=L,$$

$$\gamma_1=\left(\frac{H}{G}\sqrt{1-\left(\frac{L}{G}\right)^2}+\frac{L}{G}\sqrt{1-\left(\frac{H}{G}\right)^2}\cos g\right)\sin l+\sqrt{1-\left(\frac{H}{G}\right)^2}\sin g\cos l,$$

$$\gamma_2=\left(\frac{H}{G}\sqrt{1-\left(\frac{L}{G}\right)^2}+\frac{L}{G}\sqrt{1-\left(\frac{H}{G}\right)^2}\cos g\right)\cos l-\sqrt{1-\left(\frac{H}{G}\right)^2}\sin g\sin l,$$

$$\gamma_3=\left(\frac{H}{G}\right)\left(\frac{L}{G}\right)-\sqrt{1-\left(\frac{L}{G}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{H}{G}\right)^2}\cos g,$$

в которых можно выразить энергию $E=E(L, G, H, l, g)$.

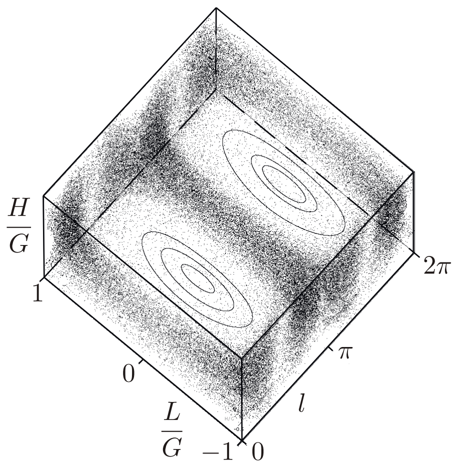

Рис. 2. Отображение Пуанкаре при фиксированных параметрах $m=1$, $b_1=3$, $b_2=1$, $I_1=2$, $I_2=3$, $g=1$, $E_0=8$

Фиксируя уровень энергии $E=E_0$ и выбирая секущую плоскость в виде $g=\frac{\pi}{2}$, получаем трехмерное отображение, индуцируемое последовательными пересечениями фазовой траектории с выбранной секущей плоскостью. Будем выводить отображение в переменных $(L/G, H/G, l)$ из соображений его компактности в силу того, что

$$\left|\frac{L}{G}\right| \leqslant 1, \qquad \left|\frac{H}{G}\right| \leqslant 1.$$

Наличие одного дополнительного интеграла приводит к тому, что траектории ложатся на двумерные инвариантные многообразия точечного отображения, а наличие двух дополнительных интегралов — к тому, что трехмерное пространство расслоено на инвариантные кривые.

Отображение Пуанкаре для системы (1.1) в поле тяжести и при фиксированных параметрах, удовлетворяющих соотношению (2.1), приведено на рис. 2. Как видим, в системе присутствует хаотическая траектория, которая занимает некоторую область отображения, не ложась ни на какую поверхность, что свидетельствует об отсутствии сразу двух дополнительных интегралов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mamaev I.S., Borisov A.V. Rolling of a rigid body on plane and sphere. Hierarchy of dynamics // Regular and Chaotic Dynamics. 2002. Vol. 7. No. 1. P. 177–200. DOI: 10.1070/RD2002v007n02ABEH000204
2. Borisov A.V., Mamaev I.S., Kilin A.A. Dynamics of rolling disk // Regular and Chaotic Dynamics. 2003. Vol. 8. No. 2. P. 201–212. DOI: 10.1070/RD2003v008n02ABEH000237
3. García-Naranjo L.C., Marrero J.C. Non-existence of an invariant measure for a homogeneous ellipsoid rolling on the plane // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. Vol. 18. No. 4. P. 372–379. DOI: 10.1134/S1560354713040047
4. Афонин А.А., Козлов В.В. Задача о падении диска, движущегося по горизонтальной плоскости // Известия РАН. Механика твердого тела. 1997. № 1. С. 7–13.
5. Борисов А.В., Мамаев И.С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // Успехи физических наук. 2003. Т. 173. № 4. С. 407–418. DOI: 10.3367/UFNr.0173.200304d.0407
6. Борисов А.В., Мамаев И.С., Бизяев И.А. Динамические системы с неинтегрируемыми связями: вакономная механика, субриманова геометрия и неголономная механика // Успехи математических наук. 2017. Т. 72. № 5. С. 3–62. DOI: 10.4213/rm9783
7. Козлов В.В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики. 1985. Т. 8. № 3. С. 85–107.
8. Козлов В.В. О движении диска по наклонной плоскости // Известия РАН. Механика твердого тела. 1996. № 5. С. 29–35.
9. Федоров Ю.Н. О качении диска по абсолютно шероховатой плоскости // Известия РАН. Механика твердого тела. 1987. № 4. С. 67–75.
10. Ярощук В.А. Интегральный инвариант в задаче о качении эллипсоида со специальными распределениями масс по неподвижной поверхности без проскальзывания // Известия РАН. Механика твердого тела. 1995. № 2. С. 54–57.

Поступила в редакцию 22.11.2017

Бизяев Иван Алексеевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра теоретической физики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: bizaev_90@mail.ru

I. A. Bizyaev

Invariant measure in the problem of a disk rolling on a plane

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 4, pp. 576–582 (in Russian).

Keywords: nonholonomic mechanics, Schwarzschild–Littlewood theorem, manifold of falls, chaotic dynamics.

MSC2010: 37J60

МЕХАНИКА 2017. Т. 27. Вып. 4

DOI: 10.20537/vm170407

This paper addresses the dynamics of a disk rolling on an absolutely rough plane. It is proved that the equations of motion have an invariant measure with continuous density only in two cases: a dynamically symmetric disk and a disk with a special mass distribution. In the former case, the equations of motion possess two additional integrals and are integrable by quadratures by the Euler–Jacobi theorem. In the latter case, the absence of additional integrals is shown using a Poincaré map. In both cases, the volume of any domain in phase space (calculated with the help of the density) is preserved by the phase flow. Nonholonomic mechanics is populated with systems both with and without an invariant measure.

REFERENCES

1. Mamaev I.S., Borisov A.V. Rolling of a rigid body on plane and sphere. Hierarchy of dynamics, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2002, vol. 7, no. 1, pp. 177–200. DOI: 10.1070/RD2002v007n02ABEH000204
2. Borisov A.V., Mamaev I.S., Kilin A.A. Dynamics of rolling disk, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2003, vol. 8, no. 2, pp. 201–212. DOI: 10.1070/RD2003v008n02ABEH000237
3. García-Naranjo L.C., Marrero J.C. Non-existence of an invariant measure for a homogeneous ellipsoid rolling on the plane, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2013, vol. 18, no. 4, pp. 372–379. DOI: 10.1134/S1560354713040047
4. Afonin A.A., Kozlov V.V. Problem of a falling motion of disk moving on a horizontal plane, *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela*, 1997, issue 1, pp. 7–13 (in Russian).
5. Borisov A.V., Mamaev I.S. Strange attractors in rattleback dynamics, *Physics-Uspekhi*, 2003, vol. 46, no. 4, pp. 393–403. DOI: 10.1070/PU2003v046n04ABEH001306
6. Borisov A.V., Mamaev I.S., Bizyaev I.A. Dynamical systems with non-integrable constraints: vaconomic mechanics, sub-Riemannian geometry, and non-holonomic mechanics, *Russian Mathematical Surveys*, 2017, vol. 72, issue 5. DOI: 10.1070/RM9783
7. Kozlov V.V. On the theory of integration of the equations of nonholonomic mechanics, *Uspekhi Mekhaniki*, 1985, vol. 8, no. 3, pp. 85–107 (in Russian).
8. Kozlov V.V. On motion of disk on an inclined plain, *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela*, 1996, issue 5, pp. 29–35 (in Russian).
9. Fedorov Yu.N. On disk rolling on absolutely rough surface, *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela*, 1987, issue 4, pp. 67–75 (in Russian).
10. Yaroshchuk V.A. Integral invariant in problem on rolling without sliding of ellipsoid with special mass distribution on fixed plane, *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela*, 1995, issue 2, pp. 54–57 (in Russian).

Received 22.11.2017

Bizyaev Ivan Alekseevich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Theoretical Physics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: bizaev_90@mail.ru