

УДК 519.6

© А. Г. Ченцов, А. А. Ченцов, А. М. Григорьев

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МАРШРУТИЗАЦИИ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В РАДИАЦИОННЫХ ПОЛЯХ¹

Рассматривается задача маршрутизации перемещений с ограничениями и усложненными функциями стоимости. Предполагается, что объекты посещения суть мегаполисы (непустые конечные множества), при посещении которых должны выполняться некоторые работы, именуемые далее внутренними. По постановке задачи имеются ограничения в виде условий предшествования. Стоимость перемещений зависит от списка заданий, которые не выполнены на момент перемещения. Ситуация такого рода возникает, в частности, при аварийных ситуациях, связанных с работой АЭС и подобных происходящим в Чернобыле и Фукусиме. Речь идет об утилизации источников радиоактивного излучения, осуществляемой последовательно во времени; в этом случае исполнитель находится под воздействием источников, которые не были демонтированы на момент соответствующего перемещения. За счет этого в функциях стоимости, оценивающих воздействие радиации на исполнителя, возникает зависимость от списка невыполненных заданий. Последние состоят в том или ином варианте выключения соответствующего источника. В настоящем исследовании излагается подход к решению данной задачи параллельным алгоритмом, реализуемым на суперкомпьютере «УРАН».

Ключевые слова: динамическое программирование, маршрут, условия предшествования, параллельный алгоритм.

DOI: [10.20537/vm170405](https://doi.org/10.20537/vm170405)**§ 1. Введение**

Статья посвящена исследованию важного класса задач дискретной оптимизации, а именно: задач, связанных с многократными перемещениями при наличии ограничений. Прототипом рассматриваемой ниже постановки является известная NP-трудная задача коммивояжера (TSP); см. [1, гл. 3]. Напомним некоторые исследования в области TSP: [2–10]. В прикладных задачах возникают, однако, существенные особенности в сравнении с TSP. Это касается, в частности, постановок, связанных со снижением облучаемости персонала АЭС при выполнении работ, связанных с утилизацией источников радиоактивного облучения. Типичной особенностью здесь является зависимость от списка заданий, которые не были выполнены на момент соответствующего перемещения: светят те и только те источники, которые на данный момент не были демонтированы. Существуют и другие приложения [11–13]. Другая особенность, возникающая, например, в известной задаче о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации, состоит в наличии условий предшествования, обязывающих выполнять одни задания после других; некоторые задания при этом группируются в упорядоченные пары (УП); требуется при этом для каждой такой УП посещать первый ее элемент ранее второго. Наконец, в отличие от TSP в прикладных задачах объектами посещения нередко являются не города (как в TSP), а мегаполисы, что отвечает возможной многовариантности самих перемещений. Последнее обстоятельство приводит к двухуровневым решениям задачи: выделяются этап нумерации мегаполисов посредством назначения перестановки индексов, то есть собственно маршрута, и этап выбора трассы движения по маршруту, то есть варианта перемещений по занумерованным мегаполисам. Данная логика, приводящая к двухуровневой задаче оптимизации, изложена в [14], а применение в атомной энергетике методов, разработанных в [14], обсуждается в [15, 16].

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-11-00109).

В числе других приложений теоретических конструкций [14] отметим задачи, возникающие в машиностроении и связанные с листовой резкой деталей на машинах с ЧПУ; см. [17–21]. Можно указать и другие приложения.

В настоящем исследовании мы ориентируемся на применение весьма общей процедуры динамического программирования (ДП), которая по своей сути является последовательной. Тем не менее в [22–24] предложена и теоретически обоснована схема независимых вычислений слов функции Беллмана, определяющая гипотетическую процедуру построения оптимального решения. В [25] данная схема применена при построении параллельного алгоритма для МВС в задаче курьера [4–6] (задача, в которой каждый мегаполис включает ровно один город); исследовалась общая постановка с матрицей затрат, допускающей зависимость от списка заданий. В настоящей работе в духе построений [22–24] рассматривается модель, ориентированная на применение в атомной энергетике и использующая мегаполисы. Речь идет о последовательном демонтаже излучающих элементов, для каждого из которых варианты приближения к источнику (для последующего его демонтажа) и покидание зоны его интенсивного воздействия (ближней зоны) ограничены непустым конечным множеством. Точки данного множества образуют, в своей совокупности, соответствующий мегаполис. Данный мегаполис можно, в частности, рассматривать в виде дискретизации границы ближней зоны источника (сама данная граница — континуальное множество). Упомянутая дискретизация может потребоваться по соображениям вычислительной реализации (в противном случае возникает дискретно-непрерывная задача нелинейного программирования, осложненная к тому же ограничениями в виде условий предшествования). В других случаях модель, использующая мегаполисы, может потребоваться в связи с возможными затруднениями в передвижении, связанными с теми или иными разрушениями, естественными для аварийных ситуаций типа Чернобыля и Фукусимы.

§ 2. Постановка и обсуждение задачи

Отметим сначала некоторые общие понятия и обозначения, используемые ниже. Через \triangleq обозначаем равенство по определению. Семейством называем множество, элементами которого являются множества. Через \mathbb{R} обозначаем вещественную прямую, $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\}$, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0; 1; 2; \dots\}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}$. Для $p \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{N}_0$ полагаем $\overline{p, q} \triangleq \{t \in \mathbb{N}_0 \mid (p \leq t) \& (t \leq q)\}$. Для каждой упорядоченной пары УП $z = (a, b)$ произвольных объектов a и b через $\text{pr}_1(z)$ и $\text{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z : $\text{pr}_1(z) = a$, $\text{pr}_2(z) = b$. Если x — объект, то $\{x\}$ есть одноэлементное множество, содержащее x . Для произвольных объектов a, b и c , как обычно [26, с. 17], полагаем $(a, b, c) \triangleq ((a, b), c)$, получая триплет в виде УП специального вида. Для трех произвольных множеств A, B и C , следуя [26, с. 17], имеем $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$, а потому при $\mu \in A \times B$ и $\nu \in C$ реализуется $(\mu, \nu) \in A \times B \times C$.

Через $\mathcal{R}_+[S]$ обозначаем множество всех функций, действующих из непустого множества S в \mathbb{R}_+ , то есть множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на S .

Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) H , то есть булеан H ; $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\emptyset\}$, а $\text{Fin}(H)$ есть семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$. Если H — конечное множество, то $\text{Fin}(H) = \mathcal{P}'(H)$. Непустому конечному множеству K сопоставляется его мощность $|K| \in \mathbb{N}$ (количество элементов) и (непустое) множество $(\text{bi})[K]$ всех биекций [27, с. 87] множества $1, |K| = \{j \in \mathbb{N} \mid j \leq |K|\}$ на K ; кроме того, $|\emptyset| \triangleq 0$. Перестановкой непустого множества T называется [27, с. 87] всякая биекция T на себя; если α — перестановка T , то определена перестановка α^{-1} множества T , обратная к α : $\alpha(\alpha^{-1}(t)) = \alpha^{-1}(\alpha(t)) = t \quad \forall t \in T$. Используемые ниже перестановки индексов будут рассматриваться в качестве маршрутов посещения целевых множеств — мегаполисов.

Фиксируем непустое множество X , точку $x^\circ \in X$, число $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, (непустые конечные) множества $M_1 \in \text{Fin}(X), \dots, M_N \in \text{Fin}(X)$, а также отношения

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \dots, \mathbb{M}_N \in \mathcal{P}'(M_N \times M_N).$$

Полагаем в дальнейшем, что $(x^\circ \notin M_j \ \forall j \in \overline{1, N}) \& (M_p \cap M_q = \emptyset \ \forall p \in \overline{1, N} \ \forall q \in \overline{1, N} \setminus \{p\})$.

Рассматриваем M_1, \dots, M_N в качестве мегаполисов, подлежащих посещению. При $j \in \overline{1, N}$ УП из \mathbb{M}_j определяют фактически возможные варианты выполнения работ, связанных с посещением M_j : первый элемент каждой такой УП есть пункт прибытия, а второй элемент — пункт отправления. Мы рассматриваем далее процессы следующего вида [22, (3.3)]:

$$x^\circ \rightarrow (\text{pr}_1(z_1) \in M_{\alpha(1)} \rightsquigarrow \text{pr}_2(z_1) \in M_{\alpha(1)}) \rightarrow \dots \rightarrow (\text{pr}_1(z_N) \in M_{\alpha(N)} \rightsquigarrow \text{pr}_2(z_N) \in M_{\alpha(N)}), \tag{2.1}$$

где $z_1 \in \mathbb{M}_{\alpha(1)}, \dots, z_N \in \mathbb{M}_{\alpha(N)}$ и α — перестановка индексов из $\overline{1, N}$, именуемая далее маршрутом. Полагаем, что в (2.1) прямые стрелки отвечают внешним перемещениям, а волнистые — перемещениям, связанным с выполнением (внутренних) работ. Объектами нашего выбора являются α, z_1, \dots, z_N . Следуя [22, (3.4)], имеем

$$\mathbb{M}_j \triangleq \{\text{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}_j\} \in \text{Fin}(M_j) \ \forall j \in \overline{1, N}. \tag{2.2}$$

С учетом этого мы получаем, что

$$\mathbb{X} \triangleq \{x^\circ\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^N M_i \right) \in \text{Fin}(X), \ \mathbf{X} \triangleq \{x^\circ\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^N \mathbb{M}_i \right) \in \text{Fin}(\mathbb{X}).$$

В связи с (2.1) заметим, что внешние перемещения и работы, выполняемые при посещении мегаполисов и именуемые далее внутренними, оцениваются посредством заданных функций, а результаты этих оценок агрегируются аддитивно, что естественно для многих приложений. Полагаем далее, что $\mathbb{P} \triangleq (\text{bi})[\overline{1, N}]$ и конкретный выбор $\alpha \in \mathbb{P}$ (см. (2.1)) должен удовлетворять условиям предшествования, для определения которых введем множество $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1, N} \times \overline{1, N})$; УП из \mathbf{K} именуем адресными. Допустимость $\alpha \in \mathbb{P}$ сводится к требованию: при $z = (i, j) \in \mathbf{K}$ посещение M_i должно предшествовать посещению M_j . Полагаем в дальнейшем, что [22, (3.11)]:

$$\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \exists z_0 \in \mathbf{K}_0 : \text{pr}_1(z_0) \neq \text{pr}_2(z) \ \forall z \in \mathbf{K}_0. \tag{2.3}$$

Тогда множество \mathbf{A} всех допустимых (по предшествованию) маршрутов из \mathbb{P} имеет вид [22, (3.12)]:

$$\mathbf{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P} | \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \ \forall z \in \mathbf{K}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}).$$

В связи с (2.3) отметим, что $\text{pr}_1(z) \neq \text{pr}_2(z) \ \forall z \in \mathbf{K}$. Как видно из (2.1), выбор маршрута $\alpha \in \mathbf{A}$ еще не определяет конкретную реализацию процесса; следует еще рассматривать трассу z_1, \dots, z_N . Возможности выбора трассы зависят от указанного маршрута; решение определяется далее в виде УП маршрут–трасса, где маршрут должен быть элементом \mathbf{A} . Полезно иметь в виду, что при данном толковании можно рассматривать не только (2.1), но и частичные процессы, связанные с посещением мегаполисов $M_k, k \in K$, где $K \subset \overline{1, N}$. Такое рассмотрение полезно и в связи с использованием динамического программирования (ДП); оно проведено в [22, 28, 29]. В настоящем изложении мы опустим такое рассмотрение, ориентируясь на сообщения алгоритмического характера. В этой связи ограничиваемся рассмотрением «полных» маршрутов и «полных» траекторий (трасс), подобных (2.1).

Итак, если $\alpha \in \mathbb{P}$, то через \mathcal{Z}_α обозначаем множество всех кортежей $(z_i)_{i \in \overline{0, N}} : \overline{0, N} \rightarrow \mathbb{X} \times \mathbb{X}$, для каждого из которых

$$(z_0 = (x^0, x^0)) \& (z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \ \forall t \in \overline{1, N});$$

\mathcal{Z}_α — непустое конечное множество. В качестве допустимых решений (ДР) будем использовать УП $(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0, N}})$, где $\alpha \in \mathbf{A}$ и $(z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$. Пусть $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, N})$.

Полагаем заданными функции стоимости $\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}]$, $c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}]$, ..., $c_N \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}]$, $f \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X}]$. В терминах этих функций определяем аддитивный критерий, полагая при $\alpha \in \mathbf{A}$ и $(z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$

$$\mathfrak{G}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0, N}}] \triangleq \sum_{t=1}^N [c(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \{\alpha(j) : j \in \overline{t, N}\}) + c_{\alpha(t)}(z_t, \{\alpha(j) : j \in \overline{t, N}\})] + f(\text{pr}_2(z_N)).$$

В качестве основной рассматриваем следующую задачу:

$$\mathfrak{G}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0, N}}] \rightarrow \min, \alpha \in \mathbf{A}, (z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha; \tag{2.4}$$

задаче (2.4) отвечает непустое множество оптимальных ДР и значение (задачи) или экстремум

$$V \triangleq \min_{\alpha \in \mathbf{A}} \min_{(z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha} \mathfrak{G}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0, N}}] \in \mathbb{R}_+. \tag{2.5}$$

Наша цель состоит в нахождении (глобального) экстремума V (2.5) и какого-либо оптимального ДР $(\alpha^0, (z_i^0)_{i \in \overline{0, N}})$, где $\alpha^0 \in \mathbf{A}$ и $(z_i^0)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha^0}$; при этом, конечно, $\mathfrak{G}_{\alpha^0}[(z_i^0)_{i \in \overline{0, N}}] = V$.

§ 3. Динамическое программирование: построение слоев функции Беллмана

Для решения задачи (2.4) используется вариант ДП [22, 28, 29], излагаемый здесь в краткой форме. Мы используем принятую в [22, 28, 29] конструкцию на основе слоев функции Беллмана, для построения которых излагается алгоритм на функциональном уровне. Рассмотрим в этой связи построение слоев пространства позиций, используя оператор вычеркивания (заданий из списка) [14, часть 2]

$$\mathbf{I} : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}, \tag{3.1}$$

а именно: полагаем при $K \in \mathfrak{N}$, что $\Xi(K) \triangleq \{z \in \mathbf{K} \mid (\text{pr}_1(z) \in K) \& (\text{pr}_2(z) \in K)\}$ и

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{\text{pr}_2(z) : z \in \Xi(K)\}. \tag{3.2}$$

Мы используем оператор (3.1), (3.2) для построения слоев пространства позиций. В этой связи введем (непустое) множество

$$\mathbf{G} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K} (\text{pr}_1(z) \in K) \Rightarrow (\text{pr}_2(z) \in K)\}, \tag{3.3}$$

элементы которого называем существенными списками заданий; ясно, что $\overline{1, N} \in \mathbf{G}$. Упомянутые списки ранжируем по мощности, полагая

$$\mathbf{G}_s \triangleq \{K \in \mathbf{G} \mid s = |K|\} \forall s \in \overline{1, N}. \tag{3.4}$$

Тогда семейство $\{\mathbf{G}_j : j \in \overline{1, N}\}$ (см. (3.4)) определяет разбиение исходного множества (3.3). При этом

$$\mathbf{G}_1 \triangleq \{\{t\} : t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1\},$$

где $\mathbf{K}_1 \triangleq \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$. Кроме того [22, 28, 29],

$$\mathbf{G}_{s-1} = \{K \setminus \{j\} : K \in \mathbf{G}_s, j \in \mathbf{I}(K)\} \forall s \in \overline{2, N}. \tag{3.5}$$

Следовательно, у нас реализуется рекуррентная процедура

$$\mathbf{G}_N \rightarrow \mathbf{G}_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{G}_1. \tag{3.6}$$

На основе этой процедуры конструируются слои пространства позиций, обозначаемые через D_0, D_1, \dots, D_N . При этом

$$D_0 = \{(x, \emptyset) : x \in \mathfrak{M}\}, \tag{3.7}$$

где \mathfrak{M} есть def объединение всех множеств \mathbf{M}_i , $i \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1$. Кроме того, $D_N \triangleq \{(x^0, \overline{1, N})\}$ (синглетон, содержащий УП $(x^0, \overline{1, N})$). Если $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathbf{G}_s$, то последовательно полагаем, что [28]

$$J_s(K) \triangleq \{t \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{t\} \cup K \in \mathbf{G}_{s+1}\}, \mathcal{M}_s[K] \triangleq \bigcup_{j \in J_s(K)} \mathbf{M}_j, \mathbb{D}_s[K] \triangleq \triangleq \{(x, K) : x \in \mathcal{M}_s[K]\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathbf{G}_s).$$

Тогда при $s \in \overline{1, N-1}$ слой D_s определяем правилом

$$D_s \triangleq \bigcup_{K \in \mathbf{G}_s} \mathbb{D}_s[K]. \tag{3.8}$$

Легко видеть, что $D_0 \neq \emptyset, D_1 \neq \emptyset, \dots, D_N \neq \emptyset$. Если $s \in \overline{1, N}$, $(x, K) \in D_s, j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in \mathbb{M}_j$, то

$$(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}. \tag{3.9}$$

Посредством (3.7)–(3.9) определена конструкция слоев, логически связанная с процедурой (3.6).

Рекуррентная процедура построения слоев функции Беллмана. Определяем систему функций $v_0 \in \mathcal{R}_+[D_0], v_1 \in \mathcal{R}_+[D_1], \dots, v_N \in \mathcal{R}_+[D_N]$.

Полагаем сначала, что $v_0 \in \mathcal{R}_+[D_0]$ определяется (см. (3.7)) условием

$$v_0(x, \emptyset) \triangleq f(x) \quad \forall x \in \mathfrak{M}. \tag{3.10}$$

Дальнейшее построение определяется рекуррентной схемой: если $s \in \overline{1, N}$ и $v_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}]$ уже построена, то полагаем с учетом (3.9), что $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$ определяется правилом

$$v_s(x, K) \triangleq \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [c(x, \text{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + v_{s-1}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] \quad \forall (x, K) \in D_s. \tag{3.11}$$

После этого при $s < N$ может осуществляться замена v_{s-1} функцией v_s в памяти вычислителя, т. е. может осуществляться перезапись текущего слоя. Если же $s = N$, то осуществляем остановку процедуры, получая $v_N(x^0, \overline{1, N})$, что отвечает представлению D_N .

Из общих построений [22, 28, 29] вытекает равенство

$$V = v_N(x^0, \overline{1, N}), \tag{3.12}$$

определяющее глобальный экстремум (см. 2.6)). Процедуру

$$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow V, \tag{3.13}$$

полностью определяемую посредством (3.10), (3.11) можно рассматривать как алгоритм определения V , при котором в памяти вычислителя находится только один слой функции Беллмана (подробнее см. в [30]).

Построение оптимального маршрута.

Рассмотрим вариант, являющийся частным случаем построений [28, § 7]. Здесь требуется сохранение в памяти всех функций v_0, v_1, \dots, v_N . Полагаем $\mathbf{z}^{(0)} \triangleq (x^0, x^0), \mathbf{z}^{(0)} \in \mathbb{X} \times \mathbf{X}$. Мы конструируем решение в виде некоторой УП (α, z) , где $\alpha \in \mathbf{A}$ и $z : \overline{0, N} \rightarrow \mathbb{X} \times \mathbf{X}$. При этом $\mathbf{z}^{(0)}$ играет роль стартового состояния $z(0)$. Поскольку $(x^0, \overline{1, N}) \in D_N$, то в силу (3.9) при $j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$ и $z \in \mathbb{M}_j$ имеем $(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\}) \in D_{N-1}$, а потому определено значение $v_{N-1}(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\}) \in \mathbb{R}_+$. При этом согласно (3.11) и (3.12)

$$V = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [c(x^0, \text{pr}_1(z), \overline{1, N}) + c_j(z, \overline{1, N}) + v_{N-1}(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\})] \tag{3.14}$$

С учетом (3.14) находим (в результате решения локальной экстремальной задачи, связанной с (3.14)) $\mathbf{j}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$ и $\mathbf{z}^{(1)} \in \mathbb{M}_{\mathbf{j}_1}$, для которых

$$V = \mathbf{c}(x^0, \text{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1, N}) + c_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1, N}) + v_{N-1}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{j}_1\})), \quad (3.15)$$

где $(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{j}_1\})) \in D_{N-1}$. Тогда в силу (3.11)

$$v_{N-1}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{j}_1\})) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{j}_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}, \text{pr}_1(z), \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) + c_j(z, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) + v_{N-2}(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{j}_1; j\})]. \quad (3.16)$$

С учетом (3.16) находим $\mathbf{j}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{j}_1\})$ и $\mathbf{z}^{(2)} \in \mathbb{M}_{\mathbf{j}_2}$ со свойством

$$v_{N-1}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{j}_1\})) = \mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}, \text{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) + c_{\mathbf{j}_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) + v_{N-2}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{j}_1; \mathbf{j}_2\})), \quad (3.17)$$

где согласно (3.9) $(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{j}_1; \mathbf{j}_2\})) \in D_{N-2}$. Заметим, что в силу (3.15) и (3.17)

$$V = \mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(0)}, \text{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1, N}) + \mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}, \text{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) + c_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1, N}) + c_{\mathbf{j}_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) + v_{N-2}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{j}_1; \mathbf{j}_2\})) \quad (3.18)$$

(при $N = 2$ имеем в силу (3.10) и (3.18), что кортежи

$$(\mathbf{j}_k)_{k \in \overline{1, 2}} : \overline{1, 2} \rightarrow \overline{1, N}, (\mathbf{z}^{(k)})_{k \in \overline{0, 2}} : \overline{0, 2} \rightarrow \mathbb{X} \times \mathbf{X}$$

образуют оптимальное ДР). При $N > 2$ процедуру на основе соотношений, подобных (3.15), (3.17), следует продолжать вплоть до исчерпывания индексного множества $\overline{1, N}$. В результате будут получены кортежи $\mathfrak{Z} \triangleq (\mathbf{j}_k)_{k \in \overline{1, N}}, (\mathbf{z}^{(k)})_{k \in \overline{0, N}}$,

$$\mathfrak{Z} : \overline{1, N} \rightarrow \overline{1, N}, (\mathbf{z}^{(k)})_{k \in \overline{0, N}} : \overline{0, N} \rightarrow \mathbb{X} \times \mathbf{X},$$

для которых $\mathfrak{Z} \in \mathbf{A}, (\mathbf{z}^{(k)})_{k \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}}$ и при этом

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{Z}}[(\mathbf{z}^{(k)})_{k \in \overline{0, N}}] = V. \quad (3.19)$$

Следовательно (см. (3.19)), в виде $(\mathfrak{Z}, (\mathbf{z}^{(k)})_{k \in \overline{0, N}})$ имеем оптимальное ДР.

§ 4. Схема независимых вычислений слоев функции Беллмана (алгоритм на функциональном уровне)

В последующем изложении используется вариант общей конструкции [23, 24, 28], связанной с организацией независимых вычислений. В связи с этим напомним (3.14), где приведена «оконечная» формула для нахождения V в терминах v_{N-1} . С учетом этого для дальнейших построений существенно определение v_{N-1} , что и реализуется в излагаемой ниже процедуре (вычисление V (3.14) при известной функции v_{N-1} затруднений не вызывает). Функция v_{N-1} определена на множестве D_{N-1} , которое, в свою очередь, определяется в терминах \mathbf{G}_{N-1} (см. (3.8)). Полагая в дальнейшем $N \geq 3$, имеем из (3.5) равенство

$$\mathbf{G}_{N-1} = \{\overline{1, N} \setminus \{j\} : j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})\} \quad (4.1)$$

(учитываем, что $\mathbf{G}_N = \{\overline{1, N}\}$, что позволяет определить \mathbf{G}_{N-1}).

Мы предполагаем, что построение всех функций-слоев будет осуществляться \mathbf{n} узлами, где (здесь и ниже) $\mathbf{n} \triangleq |\mathbf{G}_{N-1}| = |\mathbf{I}(\overline{1, N})| \in \mathbb{N}$. С этой целью множества — слои D_0, D_1, \dots, D_N — будут рассматриваться каждое в виде объединения \mathbf{n} п/м; каждое из этих п/м будет выделяться

соответствующему узлу для построения фрагментов функций-слоев. Для построения упомянутых п/м множеств-слоев будут использоваться вспомогательные дискретные динамические системы (ДДС), траектории которых будут определены посредством системы включений.

При данном построении каждому узлу выделяется его система слоев пространства позиций. Данные (частные) слои могут пересекаться. После этого для каждого узла создается своя система (частных) слоев функции Беллмана. В то же время возникает совокупная «горизонтальная» структура, которую составляют упомянутые функции-слои при фиксации мощности множеств, отвечающих спискам заданий данного уровня. Упомянутый уровень как раз и задается индексом, определяющим используемые списки заданной мощности.

Итак, пусть $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $\mathbb{T}[K]$ есть def множество всех кортежей

$$(K_t)_{t \in \overline{0, N-2}} : \overline{0, N-2} \rightarrow \mathbf{G} \quad (4.2)$$

таких, что $(K_0 \triangleq K) \& (\forall \tau \in \overline{1, N-2} \exists s \in \mathbf{I}(K_{\tau-1}) : K_\tau = K_{\tau-1} \setminus \{s\})$. Кортежи (4.2) — траектории системы — определяются при заданном K не единственным образом, а потому каждому «моменту времени» $t \in \overline{0, N-2}$ соответствует область достижимости (ОД) $\tilde{\mathbb{T}}[K; t]$, определяемая в виде множества всех списков K_t (см. (4.2)) при условии, что $(K_\tau)_{\tau \in \overline{0, N-2}}$ пробегает множество $\mathbb{T}[K]$:

$$\tilde{\mathbb{T}}[K; t] \triangleq \{K_t : (K_i)_{i \in \overline{0, N-2}} \in \mathbb{T}[K]\},$$

при этом [23, 24] $\tilde{\mathbb{T}}[K; t] \in \mathcal{P}'(\mathbf{G}_{N-(t+1)})$. Как легко видеть, для всякого $K \in \mathbf{G}_{N-1}$

$$(\tilde{\mathbb{T}}[K; 0] = \{K\}) \& (\tilde{\mathbb{T}}[K; N-2] \subset \mathbf{G}_1).$$

В терминах упомянутых ОД определяются семейства существенных списков заданной мощности, а именно

$$\mathbf{G}_{N-(t+1)} = \bigcup_{K \in \mathbf{G}_{N-1}} \tilde{\mathbb{T}}[K; t] \quad \forall t \in \overline{0, N-2} \quad \forall K \in \mathbf{G}_{N-1}.$$

Отметим, наконец, что вышеупомянутые ОД можно [24, предложение 16], при фиксированном начальном условии, строить рекуррентно: если $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $t \in \overline{0, N-3}$, то

$$\tilde{\mathbb{T}}[K; t+1] = \{P \setminus \{h\} : P \in \tilde{\mathbb{T}}[K; t], h \in \mathbf{I}(P)\}. \quad (4.3)$$

В последующих построениях используются только ОД; траектории (4.2), их определяющие, далее не используются. Итак, на основе (4.3) определяется конечная пошаговая процедура. С помощью ОД конструируются «индивидуальные» (для каждого вычислительного узла свой) слои пространства позиций: при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $s \in \overline{1, N-1}$ полагаем с учетом (3.8)

$$\mathcal{D}_s[K] \triangleq \bigcup_{P \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-(s+1)]} \mathbb{D}_s[P] \in \mathcal{P}'(D_s). \quad (4.4)$$

После построения слоев (4.4) информация об ОД удаляется из памяти каждого вычислительного узла кластера; таким образом, роль ОД в построении общего решения сводится к процедуре (4.4). Данные слои (4.4) обладают свойством, подобным в идейном отношении (3.9):

$$(\text{pr}_2(z), Q \setminus \{s\}) \in \mathcal{D}_l[K] \quad \forall K \in \mathbf{G}_{N-1} \quad \forall l \in \overline{1, N-2} \quad \forall (x, Q) \in \mathcal{D}_{l+1}[K] \quad \forall s \in \mathbf{I}(Q) \quad \forall z \in \mathbb{M}_s. \quad (4.5)$$

На каждом из множеств (4.4) задается своя (частная) функция, являющаяся сужением функции Беллмана. Тем самым реализуется распараллеливание ключевого этапа решения по методу ДП.

Итак, с учетом (4.4) полагаем, что при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $s \in \overline{1, N-1}$

$$W_s[K] \triangleq (v_s(x, P))_{(x, P) \in \mathcal{D}_s[K]} = (v(x, P))_{(x, P) \in \mathcal{D}_s[K]} \in \mathcal{R}_+[\mathcal{D}_s[K]]. \quad (4.6)$$

В частности, при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ определены $\mathcal{D}_1[K] \in \mathcal{P}'(D_1)$ и $W_1[K] \in \mathcal{R}_+[D_1[K]]$. Для целей конкретизации $\mathcal{D}_1[K]$ при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ заметим сначала в связи с (4.4), что $\tilde{\mathbb{T}}[K; N-2] \subset \mathbf{G}_1$, а потому

$$\forall P \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2] \exists t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1 : P = \{t\}.$$

Как следствие, реализуется [22, (10.4)] свойство $\forall K \in \mathbf{G}_{N-1} \forall (x, P) \in \mathcal{D}_1[K] \exists t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1 : P = \{t\}$. С учетом (3.10), (3.11) и (4.6) получаем, что при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $(x, P) \in \mathcal{D}_1[K]$

$$W_1[K](x, P) = v_1(x, P) = \min_{j \in \mathbf{I}(P)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z), P) + c_j(z, P) + v_0(\text{pr}_2(z), P \setminus \{j\})],$$

где $P = \{t\}$ для некоторого $t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1$ и, как следствие [22, замечание 3.2], $\mathbf{I}(P) = \mathbf{I}(\{t\}) = \{t\} = P$; тогда

$$W_1[K](x, P) = \min_{j \in P} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z), P) + c_j(z, P) + f(\text{pr}_2(z))] \quad (4.7)$$

(в (4.7) учитываем, что $\mathbf{M}_t \subset \mathfrak{M}$ и $\text{pr}_2(z) \in \mathbf{M}_t$ при $z \in \mathbb{M}_t$, поскольку при $j \in P$ непременно $j = t$; см. также (2.2)). Коль скоро в (4.7) P — синглетон, то данную формулу можно упростить: следуя [25, (9.7)] введем при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ (см. [24, (62), предложение 7]) непустое множество

$$\mathbb{M}_0[K] \triangleq \{h \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1 \mid \{h\} \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]\}$$

при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$. С учетом (4.4) получаем, что

$$\mathcal{D}_1[K] = \bigcup_{P \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]} \mathbb{D}_1[P] = \bigcup_{P \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]} \{(x, P) : x \in \mathcal{M}_1[P]\}, \quad (4.8)$$

где $\tilde{\mathbb{T}}[K; N-2] = \{\{h\} : h \in \mathbb{M}_0[K]\}$ [25, замечание 5.1]; поэтому из (4.8) имеем

$$\mathcal{D}_1[K] = \bigcup_{h \in \mathbb{M}_0[K]} \{(x, \{h\}) : x \in \mathcal{M}_1[\{h\}]\} = \{(x, \{h\}) : h \in \mathbb{M}_0[K], x \in \mathcal{M}_1[\{h\}]\}. \quad (4.9)$$

В свою очередь, при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $h \in \mathbb{M}_0[K]$ имеем $\{h\} \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]$, где $h \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1$; тогда $\{h\} \in \mathbf{G}_1$ и

$$J_1(\{h\}) = \{t \in \overline{1, N} \setminus \{h\} \mid \{t; h\} \in \mathbf{G}_2\}, \quad (4.10)$$

$$\mathcal{M}_1[\{h\}] = \bigcup_{j \in J_1(\{h\})} \mathbf{M}_j. \quad (4.11)$$

С учетом (4.7) и (4.9) имеем при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, $h \in \mathbb{M}_0[K]$ и $x \in \mathcal{M}_1[\{h\}]$ свойство $(x, \{h\}) \in \mathcal{D}_1[K]$ и

$$W_1[K](x, \{h\}) = \min_{z \in \mathbb{M}_h} [\mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z), \{h\}) + c_h(z, \{h\}) + f(\text{pr}_2(z))]. \quad (4.12)$$

В силу (4.9) мы получаем, что посредством (4.12) полностью определена функция $W_1[K]$. В свою очередь, для применения (4.12) мы должны, располагая $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $h \in \mathbb{M}_0[K]$, построить $J_1(\{h\})$ с использованием (4.10), а затем определить $\mathcal{M}_1[\{h\}]$ посредством (4.11), после чего можно воспользоваться формулой (4.12) для $x \in \mathcal{M}_1[\{h\}]$. Таким образом, определяются все функции $W_1[K]$, $K \in \mathbf{G}_{N-1}$. Дальнейшее построение будем рассматривать применительно к одному отдельно взятому вычислительному узлу.

Преобразование функции $\mathcal{W}_l[K]$ в $\mathcal{W}_{l+1}[K]$, где $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $l \in \overline{1, N-2}$, определяется соотношением, подобным (3.11) и использующим (4.5); в самом деле, согласно (4.5) и (4.6) при $(x, Q) \in \mathcal{D}_{l+1}[K]$, $s \in \mathbf{I}(Q)$ и $z \in \mathbb{M}_s$ определено значение

$$\mathcal{W}_l[K](\text{pr}_2(z), Q \setminus \{s\}) \in \mathbb{R}_+,$$

которое может использоваться при подсчете $\mathcal{W}_{l+1}[K](x, Q)$. Итак (см. (3.11), (4.6)), при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, $l \in \overline{1, N-2}$ и $(x, Q) \in \mathcal{D}_{l+1}[K]$ имеем [22, (10.17)]

$$\mathcal{W}_{l+1}[K](x, Q) = \min_{j \in \mathbf{I}(Q)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z), Q) + c_j(z, Q) + \mathcal{W}_l[K](\text{pr}_2(z), Q \setminus \{j\})]. \quad (4.13)$$

Итак, фиксируем $\mathbb{K} \in \mathbf{G}_{N-1}$. Данному множеству отвечают слои $\mathcal{D}_s[\mathbb{K}]$ (4.4), $s \in \overline{1, N-1}$, являющиеся каждый непустым множеством в пространстве позиций. При $s \in \overline{1, N-1}$ определена функция $\mathcal{W}_s[\mathbb{K}] \in \mathcal{R}_+[\mathcal{D}_s[\mathbb{K}]]$. В частности, определена функция $\mathcal{W}_1[\mathbb{K}] \in \mathcal{R}_+[\mathcal{D}_1[\mathbb{K}]]$, для конкретного построения которой следует использовать (4.12) и учитывать при этом представление $\mathcal{D}_1[\mathbb{K}]$, определяемое (4.9). Дальнейшее построение функций $\mathcal{W}_1[\mathbb{K}], \dots, \mathcal{W}_{N-1}[\mathbb{K}]$ осуществляется посредством рекуррентной процедуры на основе (4.13). А именно: при $l \in \overline{1, N-2}$ преобразование $\mathcal{W}_l[\mathbb{K}]$ в $\mathcal{W}_{l+1}[\mathbb{K}]$ определяется посредством выражения

$$\mathcal{W}_{l+1}[\mathbb{K}](x, Q) = \min_{j \in \mathbf{I}(Q)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z), Q) + c_j(z, Q) + \mathcal{W}_l[\mathbb{K}](\text{pr}_2(z), Q \setminus \{j\})] \quad (4.14)$$

$$\forall (x, Q) \in \mathcal{D}_{l+1}[\mathbb{K}].$$

Правило (4.14) является конкретизацией (4.13). Итак, посредством (4.14) осуществляется преобразование

$$\mathcal{W}_l[\mathbb{K}] \rightarrow \mathcal{W}_{l+1}[\mathbb{K}].$$

Поскольку l выбиралось произвольно, мы получили рекуррентную процедуру

$$\mathcal{W}_1[\mathbb{K}] \rightarrow \mathcal{W}_2[\mathbb{K}] \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{W}_{N-1}[\mathbb{K}]. \quad (4.15)$$

Осуществление всех расчетов, связанных с (4.15), возлагается на один вычислительный узел и проводится независимо от вычислений, выполняемых другими узлами. Мы полагаем, что каждый из узлов реализует вычисления по схеме, аналогичной (4.15).

§ 5. Построение слоев функции Беллмана

Возвращаясь к (3.13), следует учесть положения [24, раздел 7]. В частности, из [24, предложения 17] вытекают равенства

$$D_s = \bigcup_{K \in \mathbf{G}_{N-1}} \mathcal{D}_s[K] \quad \forall s \in \overline{1, N-1}. \quad (5.1)$$

Равенства (5.1) позволяют «объединить» процессы, реализуемые отдельными вычислительными узлами. Мы стремимся при этом к построению слоев v_1, \dots, v_{N-1} . При каждом $s \in \overline{1, N-1}$ мы располагаем функциями

$$\mathcal{W}_s[K], \quad K \in \mathbf{G}_{N-1}, \quad (5.2)$$

области определения которых (то есть множества $\mathcal{D}_s[K]$, $K \in \mathbf{G}_{N-1}$) образуют в силу (5.1) покрытие D_s . С учетом (4.6) имеем следующее свойство: функция v_s полностью определяется набором (5.2). Функции этого набора оказываются в силу (4.6) согласованными: при $K_1 \in \mathbf{G}_{N-1}$, $K_2 \in \mathbf{G}_{N-1}$, $(x, P) \in \mathcal{D}_s[K_1] \cap \mathcal{D}_s[K_2]$ непременно

$$\mathcal{W}_s[K_1](x, P) = v_s(x, P) = \mathcal{W}_s[K_2](x, P). \quad (5.3)$$

С учетом (5.1), (5.3) мы получаем следующее простое правило определения функции v_s , где $s \in \overline{1, N-1}$.

Итак, располагая «частными» функциями (5.2), мы для определения значения $v_s(x_0, K_0)$, где $(x_0, K_0) \in D_s$, отыскиваем сначала с учетом (5.1) множество $\mathbb{K}_0 \in \mathbf{G}_{N-1}$ со свойством $(x_0, K_0) \in \mathcal{D}_s[\mathbb{K}_0]$. Тогда согласно (4.6)

$$v_s(x_0, K_0) = \mathcal{W}_s[\mathbb{K}_0](x_0, K_0). \quad (5.4)$$

Свойство (5.3) говорит о том, что конкретный выбор $\mathbb{K}_0 \in \mathbf{G}_{N-1}$ со свойством $(x_0, K_0) \in \mathcal{D}_s[\mathbb{K}_0]$ может быть произвольным. На основе правила, использующего (5.4), находятся все значения функции v_s , а следовательно, и сама эта функция.

Таким образом, располагая функциями (4.6), мы находим все слои v_0, v_1, \dots, v_N функции Беллмана. На основе данных слоев, используя процедуры решения локальных задач, подобные (3.15) и (3.17), определяем оптимальное ДР; для построения данного ДР в памяти вычислителя следует сохранять все слои v_1, \dots, v_N функции Беллмана, что видно уже из (3.15), (3.17).

Алгоритм определения глобального экстремума. Рассмотрим процедуру определения V (3.12), при реализации которой в памяти каждого вычислительного узла находятся всегда одна «частная» функция вида (4.6), то есть один «индивидуальный» слой функции Беллмана.

Рассмотрим для определенности работу одного вычислительного узла, отвечающего множеству $\mathbb{K}_0 \in \mathbf{G}_{N-1}$. Конечной целью процедуры, выполняемой данным узлом, объявляется построение функции

$$\mathcal{W}_{N-1}[\mathbb{K}] \in \mathcal{R}_+[\mathcal{D}_{N-1}[\mathbb{K}]].$$

Основные этапы итерационной процедуры.

1. Определяем $\mathcal{W}_1[\mathbb{K}] \in \mathcal{R}_+[\mathcal{D}_1[\mathbb{K}]]$, используя (4.9), (4.12).

2. Пусть $s \in \overline{1, N-2}$ и «частная» функция $\mathcal{W}_s[\mathbb{K}] \in \mathcal{R}_+[\mathcal{D}_s[\mathbb{K}]]$ уже построена. Тогда посредством (4.13) осуществляется насчитывание значений функции $\mathcal{W}_{s+1}[\mathbb{K}]$, использующее только значения функции $\mathcal{W}_s[\mathbb{K}]$ (в (4.13) следует при этом полагать $l = s$). В результате реализуется «частная» функция

$$\mathcal{W}_{s+1}[\mathbb{K}] \in \mathcal{R}_+[\mathcal{D}_{s+1}[\mathbb{K}]].$$

После этого массив значений $\mathcal{W}_s[\mathbb{K}]$ уничтожается и заменяется массивом значений $\mathcal{W}_{s+1}[\mathbb{K}]$: осуществляется перезапись «частных» функций.

3. После последовательного повторения этапов вида 2 получаем частную функцию $\mathcal{W}_{N-1}[\mathbb{K}]$.

Пусть этапы 1–3 завершены каждым из вычислительных узлов, в результате чего найдены все функции

$$\mathcal{W}_{N-1}[K], K \in \mathbf{G}_{N-1}. \tag{5.5}$$

4. Теперь конструируем v_{N-1} , используя равенство

$$D_{N-1} = \bigcup_{K \in \mathbf{G}_{N-1}} \mathcal{D}_{N-1}[K]. \tag{5.6}$$

Для этого при каждом выбранном значении $(\hat{x}, \hat{P}) \in D_{N-1}$ определяем, используя (5.6), множество $\hat{K} \in \mathbf{G}_{N-1}$ со свойством $(\hat{x}, \hat{P}) \in \mathcal{D}_{N-1}[\hat{K}]$. Тогда (см. (5.5)) мы располагаем значением $\mathcal{W}_{N-1}[\hat{K}](\hat{x}, \hat{P}) \in \mathbb{R}_+$, для которого в силу (4.6) справедливо равенство

$$v_{N-1}(\hat{x}, \hat{P}) = \mathcal{W}_{N-1}[\hat{K}](\hat{x}, \hat{P}). \tag{5.7}$$

Итак, мы находим все значения функции v_{N-1} (логика рассуждений здесь подобна используемой в случае (5.4)).

Теперь, располагая функцией v_{N-1} (слой функции Беллмана), мы посредством (3.14) определяем глобальный экстремум V . В связи с данной процедурой отметим работу [30], где показано, что определение значения V без построения оптимального ДР может осуществляться для задачи существенно большей размерности.

§ 6. Моделирование и вычислительный эксперимент

Рассмотрим один конкретный вариант общей задачи, полагая $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (плоский случай). Будем исследовать постановку, когда мегаполисы имеют (всякий раз) смысл системы входов-выходов в некоторую зону с повышенной интенсивностью действия вредных факторов (в частности, радиации). Пусть данное действие создается точечным объектом, находящимся в зоне.

Цель работы, выполняемой в мегаполисе, состоит в перемещении от точки входа к данному излучающему объекту, демонтажу последнего и последующего перемещения к выходу. Полагаем, что после демонтажа точечного источника его влиянием можно пренебречь. Итак, по смыслу мегаполис связан с ближней зоной источника. Воздействие других источников на этапах перемещения между мегаполисами и на этапе работы в ближней зоне также имеют место. Это касается, однако, только тех точечных источников, которые не демонтированы на данный момент. Предполагается, что воздействие радиации суммируется, что соответствует аддитивному способу агрегирования, рассматриваемому в данной работе. Особенностью постановки является следующий момент, связанный с (внутренними) работами: в процессе перемещения в ближней зоне на этапе приближения к демонтируемому источнику исполнитель находится под его воздействием, а на этапе перемещения к выходу из зоны — нет. При этом степень воздействия (доза) на первом этапе зависит от его длительности и, следовательно, зависит от расстояния от выбранного входа до источника. На этапах внешних перемещений воздействие отдельно взятого источника уже не столь существенно, однако совокупное воздействие значительного их числа уже не может игнорироваться.

Прохождение мимо источника излучения s для демонтажа другого источника излучения.

Пусть системе мегаполисов поставлена в соответствие система точечных излучающих объектов $(\mathbf{z}_i)_{i \in \overline{1, N}} : \overline{1, N} \rightarrow X$ со свойством: $\mathbf{z}_i \notin M_i \forall i \in \overline{1, N}$. Демонтаж объектов $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N$ является целью посещения мегаполисов, а именно: при посещении мегаполиса $M_{\alpha(i)}$ требуется прийти в точку входа $\text{pr}_1(z_i)$, переместиться в точку $\mathbf{z}_{\alpha(i)}$, выполнить работы по демонтажу источника излучения с номером $\alpha(i)$ и затем переместиться в точку выхода $\text{pr}_2(z_i)$. Тем самым реализуется схема (2.1). В настоящем изложении ограничимся кратким описанием воздействия одного источника в процессе перемещения из заданной точки плоскости к другой точке (как уже отмечалось, агрегирование таких воздействий при построении функции s сводится к суммированию результатов этих воздействий) в «регулярном» случае, отвечающем ситуации, когда на траектории перемещения отсутствует упомянутый (активный) источник. Итак, при перемещении из пункта i в пункт j величина затрат (в той модели, которой мы придерживаемся), а, точнее, доза облучения, получаемая при данном перемещении за счет не демонтированного источника излучения s , равна

$$c_{i,j}[\{s\}] = \int_0^T \frac{\gamma_s}{\rho_{s,t}^2} dt = 2\rho_{i,j} \frac{\gamma_s}{v} \int_0^{\rho_{i,j}} \frac{d\rho}{(4\rho_{i,j}^2 \rho + \rho_{j,s}^2 - \rho_{i,s}^2 - \rho_{i,j}^2)^2 + (4\rho_{i,j}^2 \rho_{i,s}^2 - (\rho_{j,s}^2 - \rho_{i,s}^2 - \rho_{i,j}^2)^2)}, \quad (6.1)$$

где ρ используется для обозначения евклидова расстояния (при необходимости упомянутые расстояния между точками снабжаются индексами); γ_s определяет интенсивность источника s , а v скорость перемещения исполнителя. Полагаем, что при $\rho \in [0, \rho_{i,j}]$ $R(\rho) \triangleq 2\rho_{i,j}\rho + \rho_{j,s}^2 - \rho_{i,s}^2 - \rho_{i,j}^2$. Для расчета используется одна из следующих табличных интегральных формул:

$$\int \frac{dR}{A^2 + R^2} = \frac{1}{A} \arctg \frac{R}{A} + C, \quad \int \frac{dR}{R^2 - A^2} = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{R - A}{R + A} \right| + C, \quad (6.2)$$

в зависимости от знака выражения $4\rho_{i,j}^2 \rho_{i,s}^2 - (\rho_{j,s}^2 - \rho_{i,s}^2 - \rho_{i,j}^2)^2$. Именно, возможен один из следующих двух случаев:

1. Пусть $4\rho_{i,j}^2 \rho_{i,s}^2 - (\rho_{j,s}^2 - \rho_{i,s}^2 - \rho_{i,j}^2)^2 \geq 0$. Тогда полагаем, что

$$A = \sqrt{4\rho_{i,j}^2 \rho_{i,s}^2 - (\rho_{j,s}^2 - \rho_{i,s}^2 - \rho_{i,j}^2)^2},$$

получая неотрицательное число. Имеем цепочку равенств

$$c_{i,j}[\{s\}] = \frac{2\rho_{i,j}\gamma_s}{v} \int_{R(0)}^{R(\rho_{i,j})} \frac{dR}{R^2 + A^2} = \frac{2\rho_{i,j}\gamma_s}{vA} \arctg \frac{R}{A} \Big|_{R(0)}^{R(\rho_{i,j})} = \frac{2\rho_{i,j}\gamma_s}{vA} \left(\arctg \frac{R(\rho_{i,j})}{A} - \arctg \frac{R(0)}{A} \right).$$

2. Пусть $4\rho_{i,j}^2\rho_{i,s}^2 - (\rho_{j,s}^2 - \rho_{i,s}^2 - \rho_{i,j}^2)^2 < 0$. Тогда полагаем, что

$$A = \sqrt{(\rho_{j,s}^2 - \rho_{i,s}^2 - \rho_{i,j}^2)^2 - 4\rho_{i,j}^2\rho_{i,s}^2};$$

получаем, что $A > 0$. Используя вторую в (6.2) табличную формулу, получаем, что $c_{i,j}[\{s\}] =$

$$= \frac{2\rho_{i,j}\gamma_s}{v} \int_{R(0)}^{R(\rho_{i,j})} \frac{dR}{R^2 - A^2} = \frac{\rho_{i,j}\gamma_s}{vA} \ln \left| \frac{R - A}{R + A} \right| \Big|_{R(0)}^{R(\rho_{i,j})} = \frac{\rho_{i,j}\gamma_s}{vA} \left(\ln \left| \frac{R(\rho_{i,j}) - A}{R(\rho_{i,j}) + A} \right| - \ln \left| \frac{R(0) - A}{R(0) + A} \right| \right).$$

Мы ограничиваемся сейчас рассмотрением таких вариантов задачи (2.4), для которых при всяком выборе пунктов i, j, s вышеупомянутого типа значения

$$\ln \left| \frac{R(\rho_{i,j}) - A}{R(\rho_{i,j}) + A} \right|, \quad \ln \left| \frac{R(0) - A}{R(0) + A} \right|$$

конечны, т. е. определены и являются вещественными числами. Если же источник s лежит на траектории перемещения из пункта i в пункт j , то $c_{i,j}[\{s\}]$ отождествляется с очень большим числом (грубо говоря, в этом случае $c_{i,j}[\{s\}] = \infty$; на самом же деле в вычислительной процедуре достаточно числа, которое заведомо больше в разы, чем самое «затратное» перемещение).

Прохождение к источнику излучения s для его демонтажа (оценивание внутренних работ).

В данном случае полагаем, что пункт j совпадает с s и нас будет интересовать доза облучения, получаемая исполнителем в процессе приближения к источнику излучения, подлежащему демонтажу.

Здесь мы по прежнему придерживаемся модели, в которой получаемая доза обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника, но для исключения некорректности в момент прихода в источник, способной привести к делению на 0, мы знаменатель подынтегрального выражения в (6.1) увеличиваем на единицу. Для учета более интенсивного радиационного воздействия в ближней зоне используем дополнительный множитель 3 (содержательно это может отвечать случаю, когда действие источника не ослабляется препятствиями, что может иметь место на этапе внешних перемещений). Величина затрат (дозы облучения) в данном случае вычисляется по формуле:

$$c_{i,j}[\{s\}] = c_{i,s}[\{s\}] = 3\left(\frac{\gamma_s}{v}\right) \int_0^{\rho_{i,j}} \frac{d\rho}{\rho^2 + 1} = 3\left(\frac{\gamma_s}{v}\right) \arctg(\rho_{i,j}).$$

Базовый алгоритм.

1. Главный процессор формирует семейство \mathbf{G}_{N-1} (4.1), элементами которого являются множества мощностью $N - 1$. Множества \mathbf{G}_{N-1} распределяются по узлам с использованием протокола MPI. Каждый узел имеет \mathbf{k} вычислительных ядер с общей оперативной памятью. На узле, связанном со списком $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, «индивидуальные» слои функции Беллмана $\mathcal{W}_s[K]$, $s \in \overline{1, N-1}$, распределяются по вычислительным ядрам равномерно. Для полученных фрагментов вышеупомянутых слоев вычисляются значения функции Беллмана. Поскольку оперативная память для каждого узла является общей, то обмена данными между узлами не происходит. Кроме того, операции с фрагментами «индивидуальных» слоев функции Беллмана выполняются при помощи библиотеки OpenMP.

2. Слои значений функции Беллмана, полученные на этапе 1, передаются с узлов, связанных со списками $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и собираются на главном узле. После этого слой v_{N-1} , находится посредством (5.6) и (5.7). Наконец, значение V определяется посредством (3.12).

3. Главный процессор реализует построение оптимального маршрута путем решения локальных экстремальных задач (3.14) и (3.16).

Вычислительный эксперимент.

Рассмотрим модельные примеры решения задачи маршрутизации процесса демонтажа радиоактивного оборудования на плоскости. Пусть мегаполисы, имитирующие возможные входы/выходы помещений с источниками излучения, получены дискретизацией окружностей: на

каждой окружности на равном угловом расстоянии, начиная с точки с 0-й угловой координатой, располагаются 12 точек. Каждому мегаполису соответствует точечный объект, имитирующий источник излучения в помещении. Пусть исходная точка (она же база) процесса демонтажа совпадает с началом координат, т. е. $x^0 = (0, 0)$; по завершении демонтажа всего оборудования требуется возврат на базу. Напомним, что функция ρ — суть евклидово расстояние. Пусть скорость движения исполнителя, выполняющего демонтаж, вне помещений в 4 раза больше, чем внутри, что призвано моделировать сложность перемещения внутри каждого мегаполиса, обусловленную наличием тех или иных конструкций и механизмов, мешающих быстрому перемещению внутри помещения.

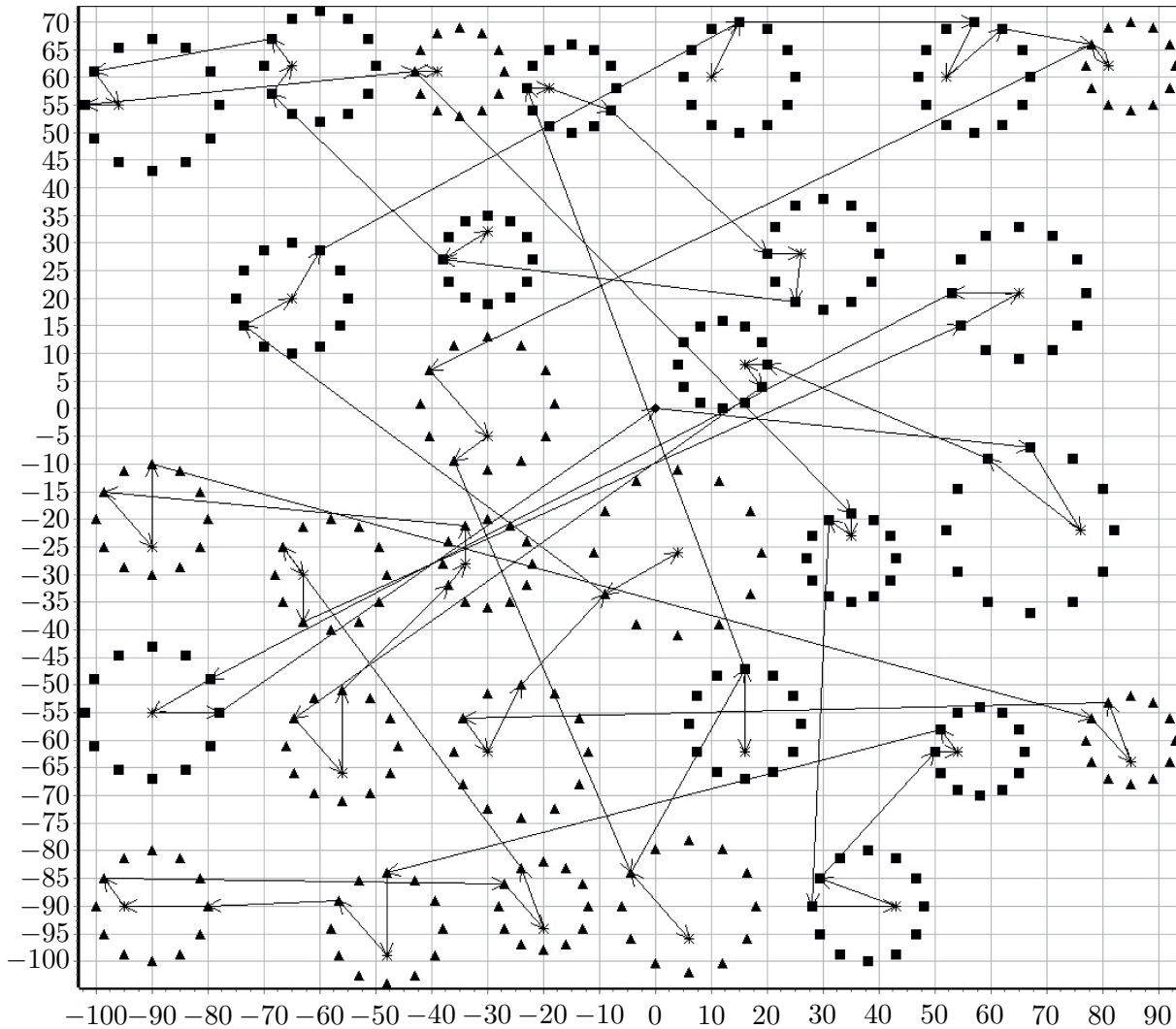


Рис. 1. Маршрут и трасса обхода 30 мегаполисов

Далее приведены некоторые результаты, касающиеся расчетов на супервычислителе УРАН. Для модельного примера, заданного 30 мегаполисами и 30 адресными парами (51 пара в транзитивном замыкании [31]), соответствующими условиям предшествования, были получены следующие результаты: суммарная величина дозы облучения — 222.9, общее время вычислений составило 17 мин. 46 сек. График обхода 30 мегаполисов приведен на рис. 1.

Для примера решения задачи обхода 31 мегаполиса при наличии 34 адресных пар (63 пары в транзитивном замыкании [31]), получены следующие результаты: суммарная величина дозы облучения — 226.5, время счета составило 15 мин. 56 сек. График обхода 31 мегаполисов

приведен на рис. 2.

Также, рассмотрим результаты расчета задач с теми же параметрами на ПК. Для модели с 30 мегаполисами и 30 адресными парами, получен результат: величина полученной дозы облучения — 222.9, время вычислений составило 7 час. 26 мин. 7 сек. Для примера задачи с 31 мегаполисом и 34 адресными парами, получены результаты: величина полученной дозы облучения — 226.5, время счета составило 6 час. 29 мин. 55 сек.

Снижение времени счета при увеличении количества мегаполисов обусловлено наличием большего количества условий предшествования, что позволяет существенно уменьшить объем вычислений при расчитывании массива значений функции Беллмана и объем необходимой для

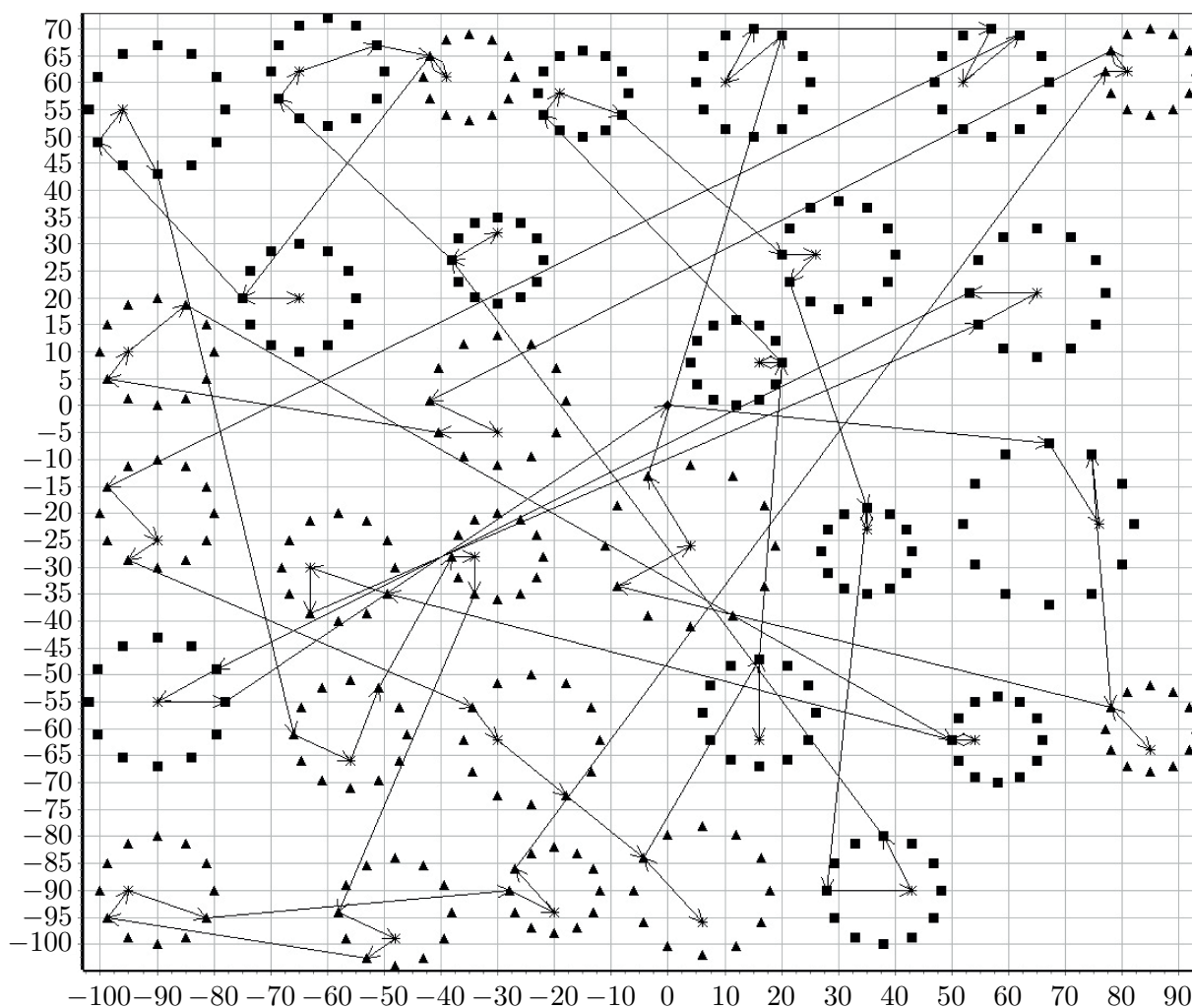


Рис. 2. Маршрут и трасса обхода 31 мегаполиса

его хранения памяти компьютера. Дополнительные сведения о влиянии условий предшествования на время вычислений и использование памяти в задачах динамического программирования см. в [32].

§ 7. Заключение

В статье построено решение модельной задачи маршрутизации, ориентированной на применение в атомной энергетике: рассматривается процесс последовательного демонтажа источников радиации. При математической формализации возникает постановка с функциями стоимости,

зависящими от списка заданий, не выполненных на текущий момент («светят» только те источники, которые не демонтированы на данный момент). Данная постановка может соответствовать инженерной задаче, связанной с организацией работ в условиях аварийных ситуаций. В статье предлагается параллельный алгоритм решения по методу ДП с использованием МВС на этапе построения слоев функции Беллмана; данный алгоритм реализован на суперкомпьютере «УРАН».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Garey M.R., Johnson D.S. Computers and intractability: A guide to the theory of *NP*-completeness. New York: W.H. Freeman, 1979. 338 p.
2. Gutin G., Punnen A.P. The traveling salesman problem and its variations. New York: Springer US, 2007. DOI: [10.1007/b101971](https://doi.org/10.1007/b101971)
3. Cook W.J. In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation. New Jersey: Princeton University Press, 2012. 248 p.
4. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. I: Theoretical issues // Automation and Remote Control. 1989. Vol. 50. No. 9. P. 1147–1173.
5. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. II: Exact methods // Automation and Remote Control. 1989. Vol. 50. No. 10. P. 1303–1324.
6. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Approximate algorithms // Automation and Remote Control. 1989. Vol. 50. No. 11. P. 1459–1479.
7. Литтл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и математические методы. 1965. Т. 1. Вып. 1. С. 94–107.
8. Bellman R. Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem // J. ACM. 1962. Vol. 9. Issue 1. P. 61–63. DOI: [10.1145/321105.321111](https://doi.org/10.1145/321105.321111)
9. Held M., Karp R.M. A dynamic programming approach to sequencing problems // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 1962. Vol. 10. No. 1. P. 196–210. DOI: [10.1137/0110015](https://doi.org/10.1137/0110015)
10. Гимади Э.Х., Хачай М.Ю. Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2016. 220 с.
11. Leon V.J., Peters B.A. Replanning and analysis of partial setup strategies in printed circuit board assembly systems // International Journal of Flexible Manufacturing Systems. 1996. Vol. 8. Issue 4. P. 389–411. DOI: [10.1007/BF00170019](https://doi.org/10.1007/BF00170019)
12. Alkaya A.F., Duman E. A new generalization of the traveling salesman problem // Appl. Comput. Math. 2010. Vol. 9. No. 2. P. 162–175.
13. Kinable J., Cire A.A., van Hoesel W.-J. Hybrid optimization methods for time-dependent sequencing problems // European Journal of Operational Research. Vol. 259. Issue 3. P. 887–897. DOI: [10.1016/j.ejor.2016.11.035](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.11.035)
14. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 240 с.
15. Коробкин В.В., Сесекин А.Н., Ташлыков О.Л., Ченцов А.Г. Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения безопасности и эффективности эксплуатации атомных станций. М.: Новые технологии, 2012. 234 с.
16. Ташлыков О.Л. Дозовые затраты персонала в атомной энергетике. Анализ. Пути снижения. Оптимизация. Lambert Academic Publishing, 2011. 232 с.
17. Петунин А.А. О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестник УГАТУ. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. Т. 13. № 2 (35). С. 280–286.
18. Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. К вопросу о маршрутизации движения инструмента в машинах листовой резки с числовым программным управлением // Науч.-техн. ведомости СПбГПУ. Сер. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2013. Вып. 2 (169). С. 103–111.
19. Фроловский В.Д. Автоматизация проектирования управляющих программ тепловой резки металла на оборудовании с ЧПУ // Информационные технологии в проектировании и производстве. 2005. № 4. С. 63–66.
20. Wang G.G., Xie S.Q. Optimal process planning for a combined punch-and-laser cutting machine using ant colony optimization // International Journal of Production Research. 2005. Vol. 43. Issue 11. P. 2195–2216. DOI: [10.1080/00207540500070376](https://doi.org/10.1080/00207540500070376)

21. Dewil R., Vansteenwegen P., Cattrysse D. Construction heuristics for generating tool paths for laser cutters // *International Journal of Production Research*. 2014. Vol. 52. Issue 20. P. 5965–5984. DOI: [10.1080/00207543.2014.895064](https://doi.org/10.1080/00207543.2014.895064)
22. Ченцов А.Г. К вопросу о маршрутизации комплексов работ // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2013. Вып. 1. С. 59–82. DOI: [10.20537/vm130107](https://doi.org/10.20537/vm130107)
23. Ченцов А.Г. Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // *Автоматика и телемеханика*. 2012. № 3. С. 134–149.
24. Ченцов А.Г. Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*. 2012. Вып. 12. С. 53–76.
25. Ченцов А.Г., Григорьев А.М. Динамическое программирование в задаче маршрутизации: схема независимых вычислений // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2016. Т. 17. № 12. С. 834–846. DOI: [10.17587/mau.17.834-846](https://doi.org/10.17587/mau.17.834-846)
26. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis*. New York: Academic Press Inc., 1960. 361 p.
27. Cormen T.H., Leizerson C.E., Rivest R.L. *Introduction to algorithms*. Cambridge: MIT Press, 1990.
28. Ченцов А.Г., Ченцов А.А. Задача маршрутизации с ограничениями, зависящими от списка заданий // *Доклады Академии наук*. 2015. Т. 465. № 2. С. 154–158. DOI: [10.7868/S0869565215320043](https://doi.org/10.7868/S0869565215320043)
29. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов // *Автоматика и телемеханика*. 2016. Вып. 11. С. 96–117.
30. Ченцов А.Г., Ченцов А.А. К вопросу о нахождении значения маршрутной задачи с ограничениями // *Проблемы управления и информатики*. 2016. № 1. С. 41–54.
31. Schmidt G., Ströhlein T. *Relations and graphs. Discrete mathematics for computer scientists*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993. IX+301 p. DOI: [10.1007/978-3-642-77968-8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-77968-8)
32. Steiner G. On the complexity of dynamic programming for sequencing problems with precedence constraints // *Annals of Operations Research*. 1990. Vol. 26. Issue 1. P. 103–123. DOI: [10.1007/BF02248587](https://doi.org/10.1007/BF02248587)

Поступила в редакцию 21.08.2017

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;

профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.

E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ченцов Алексей Александрович, к. ф.-м. н., научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

E-mail: chentsov.a@binsys.ru

Григорьев Алексей Михайлович, заведующий отделом, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

E-mail: ag@uran.ru

A. G. Chentsov, A. A. Chentsov, A. M. Grigoryev

On one routing problem modeling movement in radiation fields

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 4, pp. 540–557 (in Russian).

Keywords: dynamic programming, route, precedence constraints, parallel computation.

MSC2010: 49L20, 90C39

DOI: [10.20537/vm170405](https://doi.org/10.20537/vm170405)

We consider a routing problem with constraints and complicated cost functions. The visited objects are assumed to be clusters, or megalopolises (nonempty finite sets), and the visit to each of them entails certain tasks, which we call interior jobs. The order of visits is subject to precedence constraints. The costs

of movements depend on the set of pending tasks (not yet complete at the time of the movement), which is also referred to as “sequence dependence”, “position dependence”, and “state dependence”. Such a dependence arises, in particular, in routing problems concerning emergencies at nuclear power plants, similar to the Chernobyl and Fukushima Daiichi incidents. For example, one could consider a disaster recovery problem concerned with sequential dismantlement of radiation sources; in this case, the crew conducting the dismantlement is exposed to radiation from the sources that have not yet been dealt with. This gives rise to dependence on pending tasks in the cost functions that measure the crew’s radiation exposure. The latter dependence reflects the “shutdown” operations for the corresponding radiation sources. This paper sets forth an approach to a parallel solution for this problem, which was implemented and run on the URAN supercomputer.

REFERENCES

1. Garey M.R., Johnson D.S. *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness*, New York: W.H. Freeman, 1979, 338 p.
2. Gutin G., Punnen A.P. *The traveling salesman problem and its variations*, New York: Springer US, 2007. DOI: [10.1007/b101971](https://doi.org/10.1007/b101971)
3. Cook W.J. *In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation*, New Jersey: Princeton University Press, 2012, 248 p.
4. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. I: Theoretical issues, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 9, pp. 1147–1173.
5. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. II: Exact methods, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 10, pp. 1303–1324.
6. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Approximate algorithms, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 11, pp. 1459–1479.
7. Little J.D.C., Murty K.G., Sweeney D.W., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem, *Operations Research*, 1963, vol. 11, issue 6, pp. 972–989. DOI: [10.1287/opre.11.6.972](https://doi.org/10.1287/opre.11.6.972)
8. Bellman R. Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem, *J. ACM*, 1962, vol. 9, issue 1, pp. 61–63. DOI: [10.1145/321105.321111](https://doi.org/10.1145/321105.321111)
9. Held M., Karp R.M. A dynamic programming approach to sequencing problems, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1962, vol. 10, no. 1, pp. 196–210. DOI: [10.1137/0110015](https://doi.org/10.1137/0110015)
10. Gimadi E.Kh., Khachai M.Yu. *Ekstremal'nye zadachi na mnozhestvakh perestанovok* (Extremal problems on sets of permutations), Yekaterinburg: UMC UPI, 2016, 220 p.
11. Leon V.J., Peters B.A. Replanning and analysis of partial setup strategies in printed circuit board assembly systems, *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, 1996, vol. 8, issue 4, pp. 389–411. DOI: [10.1007/BF00170019](https://doi.org/10.1007/BF00170019)
12. Alkaya A.F., Duman E. A new generalization of the traveling salesman problem, *Appl. Comput. Math.*, 2010, vol. 9, no. 2, pp. 162–175.
13. Kinable J., Cire A.A., van Hoesel W.-J. Hybrid optimization methods for time-dependent sequencing problems, *European Journal of Operational Research*, vol. 259, issue 3, pp. 887–897. DOI: [10.1016/j.ejor.2016.11.035](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.11.035)
14. Chentsov A.G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadaniy: voprosy teorii* (Extreme problems of routing and tasks distribution), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2008, 240 p.
15. Korobkin V.V., Sesekin A.N., Tashlykov O.L., Chentsov A.G. *Metody marshrutizatsii i ikh prilozheniya v zadachakh povysheniya bezopasnosti i effektivnosti ekspluatatsii atomnykh stantsii* (Routing methods and their applications in problems of improving the safety and efficiency of operation of nuclear power plants), Moscow: Novye Tekhnologii, 2012, 234 p.
16. Tashlykov O.L. *Dozovye zatraty personala v atomnoi energetike. Analiz. Puti snizheniya. Optimizatsiya* (Personnel dose costs in the nuclear industry. Analysis. Ways to decrease. Optimization), Lambert Academic Publishing, 2011.
17. Petunin A.A. About some strategies of the programming of tool route by developing of control programs for thermal cutting machines, *Vestnik Ufimskogo Gosudarstvennogo Aviatsionnogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Upravlenie, Vychislitel'naya Tekhnika i Informatika*, 2009, vol. 13, no. 2 (35), pp. 280–286 (in Russian).
18. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. On routing tool motion on the sheet cutting NPC machines, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Computer Science. Telecommunication and Control Systems*, 2013, issue 2 (169), pp. 103–111 (in Russian).

19. Frolovskii V.D. Computer-aided design of the control programs for thermal metal cutting on NPC machines, *Informatsionnye Tekhnologii v Proektirovanii i Proizvodstve*, 2005, no. 4, pp. 63–66 (in Russian).
20. Wang G.G., Xie S.Q. Optimal process planning for a combined punch-and-laser cutting machine using ant colony optimization, *International Journal of Production Research*, 2005, vol. 43, issue 11, pp. 2195–2216. DOI: [10.1080/00207540500070376](https://doi.org/10.1080/00207540500070376)
21. Dewil R., Vansteenwegen P., Cattrysse D. Construction heuristics for generating tool paths for laser cutters, *International Journal of Production Research*, 2014, vol. 52, issue 20, pp. 5965–5984. DOI: [10.1080/00207543.2014.895064](https://doi.org/10.1080/00207543.2014.895064)
22. Chentsov A.G. To question of routing of works complexes, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 1, pp. 59–82. DOI: [10.20537/vm130107](https://doi.org/10.20537/vm130107)
23. Chentsov A.G. On a parallel procedure for constructing the Bellman function in the generalized problem of courier with internal jobs, *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 3, pp. 532–546. DOI: [10.1134/S0005117912030113](https://doi.org/10.1134/S0005117912030113)
24. Chentsov A.G. A parallel procedure of constructing Bellman function in the generalized courier problem with interior works, *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Universiteta. Seriya Matematicheskoe Modelirovanie i Programirovanie*, 2012, issue 12, pp. 53–76.
25. Chentsov A.G., Grigoryev A.M. Dynamic programming method in a routing problem: a scheme of independent computations, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 12, pp. 834–846 (in Russian). DOI: [10.17587/mau.17.834-846](https://doi.org/10.17587/mau.17.834-846)
26. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis*, New York: Academic Press Inc., 1960. 361 p.
27. Cormen T.H., Leizerson C.E., Rivest R.L. *Introduction to algorithms*, Cambridge: MIT Press, 1990.
28. Chentsov A.G., Chentsov A.A. Route problem with constraints depending on a list of tasks, *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 92, no. 3, pp. 685–688. DOI: [10.1134/S1064562415060083](https://doi.org/10.1134/S1064562415060083)
29. Chentsov A.G., Chentsov P.A. Routing under constraints: Problem of visit to megalopolises, *Autom. Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 11, pp. 1957–1974. DOI: [10.1134/S0005117916110060](https://doi.org/10.1134/S0005117916110060)
30. Chentsov A.G., Chentsov, A.A. On the question of finding the value of routing problem with constraints, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2016, vol. 48, issue 2, pp. 11–27. DOI: [10.1615/JAutomatInfScien.v48.i2.30](https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i2.30)
31. Schmidt G., Ströhlein T. *Relations and graphs. Discrete mathematics for computer scientists*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993, IX+301 p. DOI: [10.1007/978-3-642-77968-8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-77968-8)
32. Steiner G. On the complexity of dynamic programming for sequencing problems with precedence constraints, *Annals of Operations Research*, 1990, vol. 26, issue 1, pp. 103–123. DOI: [10.1007/BF02248587](https://doi.org/10.1007/BF02248587)

Received 21.08.2017

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Science, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 600002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Chentsov Aleksei Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: chentsov.a@binsys.ru

Grigoryev Alexey Mikhailovich, Head of Department, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: ag@uran.ru