

УДК 517.928

© С. Ю. Лукащук

ПРИБЛИЖЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ¹

В работе предложен подход к аппроксимации обыкновенных дифференциальных уравнений с производными дробного порядка (так называемых дробно-дифференциальных уравнений) дифференциальными уравнениями с производными целого порядка в предположении, что порядок дробного дифференцирования близок к целому числу. Для дробных производных Римана–Лиувилля и Капуто получены разложения по малому параметру, выделяемому из порядка дробного дифференцирования. При этом первый порядок разложения представляется через бесконечный ряд и зависит от производных всех целых порядков. Полученные разложения позволяют приблизить обыкновенные дифференциальные уравнения с производными дробных порядков этого типа обыкновенными дифференциальными уравнениями с малым параметром. Доказано, что для дробно-дифференциальных уравнений, принадлежащих определенному классу, соответствующие приближенные уравнения будут содержать только производные конечного целого порядка. Приближенные решения таких уравнений могут быть найдены с использованием известных методов возмущений. Предлагаемый подход иллюстрируется рядом примеров.

Ключевые слова: обыкновенное дробно-дифференциальное уравнение, малый параметр, аппроксимация, приближенное решение.

DOI: [10.20537/vm170403](https://doi.org/10.20537/vm170403)**Введение**

Уравнения с производными дробных порядков различных типов [1–4] (называемые также дробно-дифференциальными уравнениями) в последние годы все активнее используются в качестве математических моделей различных процессов, наблюдаемых в неупорядоченных сложных средах и системах [5–7]. Дробно-дифференциальные уравнения образуют особый класс интегро-дифференциальных уравнений, в которых в качестве интегрального оператора используется оператор вольтерровского типа с разностным степенным ядром, обладающим интегрируемой особенностью. Нахождение точных решений таких уравнений даже в линейном случае часто оказывается непростой задачей [2, 4]. Инвариантно-групповые точные решения нелинейных дробно-дифференциальных уравнений могут быть найдены методами современного группового анализа, развитыми для таких уравнений в работах [8–10]. Однако, как показано в этих работах, допускаемая дробно-дифференциальным уравнением группа точечных преобразований оказывается существенно беднее группы предельного дифференциального уравнения с производными целого порядка, в которое переходит дробно-дифференциальное уравнение при стремлении порядка дробного дифференцирования к ближайшему сверху целому числу. В результате удастся построить относительно небольшое количество различных семейств точных решений таких уравнений.

С практической точки зрения часто оказываются полезны не только точные, но и приближенные аналитические решения дробно-дифференциальных уравнений. В настоящее время предложен целый ряд методов построения приближенных решений таких уравнений: метод декомпозиции Адомиана [11, 12], метод гомотопического возмущения Хе [13–15], вариационный итерационный метод [15, 16] и некоторые другие [17, 18]. Все эти методы не требуют введения в уравнение малого параметра, что всегда рассматривается как их преимущество. Однако это

¹Работа выполнена в рамках Государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 1.3103.2017/4.6).

не позволяет проводить исследование приближенных качественных свойств таких уравнений, в частности исследовать их приближенные симметричные свойства.

В том случае, когда порядок дробного дифференцирования у входящих в уравнение производных дробного порядка оказывается близок к целому, возможно представление этого порядка в виде суммы или разности целого числа и малого параметра. Тогда соответствующие дробные производные могут быть разложены в ряд по этому малому параметру, а дробно-дифференциальное уравнение приближено уравнением с малым параметром, являющимся в нулевом порядке классическим дифференциальным уравнением с производными целого порядка. Приближенное решение этого уравнения будет одновременно являться и приближенным решением исходного дробно-дифференциального уравнения.

В [19] описанный подход был использован для построения приближенных решений линейных и нелинейных обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений с левосторонними дробными производными Капуто, являющихся моделями дробного осциллятора, а также для построения приближенного решения одного дробно-дифференциального обобщения уравнения Гинзбурга–Ландау. Разложение дробной производной содержало при этом в первом порядке по малому параметру интегральное слагаемое с разностным логарифмическим ядром. В результате получающееся приближенное уравнение с малым параметром оставалось интегро-дифференциальным. Аналогичный подход был использован в [20, 21].

Недавно в работе [22] автором был предложен другой способ разложения левосторонней дробной производной Римана–Лиувилля, порядок которой близок к единице, и на примере уравнения субдиффузии показано, что он позволяет проводить исследование приближенных симметричных свойств соответствующих дробно-дифференциальных уравнений. В данной работе этот подход обобщается на лево- и правосторонние дробные производные Римана–Лиувилля и Капуто, порядок которых близок к произвольному натуральному числу. Показано, что при использовании предложенного разложения обыкновенное дробно-дифференциальное уравнение может быть приближено обыкновенным дифференциальным (а не интегро-дифференциальным) уравнением с малым параметром. В результате задача построения приближенного решения такого уравнения может быть решена классическими методами теории возмущений [23]. Предложенный подход иллюстрируется рядом примеров.

§ 1. Разложение производных дробного порядка по малому параметру

Рассмотрим, соответственно, левостороннюю и правостороннюю дробные производные Римана–Лиувилля вещественного порядка $\alpha > 0$ от функции $f(x)$, заданной на конечном отрезке $[a, b]$ (см., например, [1, 2]):

$${}_a D_x^\alpha f \equiv \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^m \int_a^x \frac{f(s)}{(x - s)^{\alpha - m + 1}} ds, \quad (1.1)$$

$${}_x D_b^\alpha f \equiv \frac{(-1)^m}{\Gamma(m - \alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^m \int_x^b \frac{f(s)}{(s - x)^{\alpha - m + 1}} ds. \quad (1.2)$$

Здесь $m = [\alpha] + 1$ и $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Порядок дробного дифференцирования α представим в виде

$$\alpha = \begin{cases} m - \varepsilon, & \{\alpha\} \geq 0.5, \\ m - 1 + \varepsilon, & \{\alpha\} < 0.5, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $\varepsilon \in (0, 0.5]$ и $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$. Дробные производные Римана–Лиувилля (1.1) и (1.2) могут быть разложены в степенной ряд по параметру ε . Если α оказывается близким к целому числу, то параметр ε будет малым, и для решения ряда практических задач можно ограничиться рассмотрением лишь первых нескольких членов таких разложений. В частности, это дает возможность приблизить дробно-дифференциальное уравнение дифференциальным уравнением с малым параметром, содержащим производные только целого порядка.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ аналитична в интервале (a, b) и для нее существует левосторонняя дробная производная Римана–Лиувилля (1.1). Тогда если параметр ε связан

с порядком дробного дифференцирования $\alpha > 0$ соотношением (1.3), то при $\varepsilon \rightarrow 0$ в каждой точке $x \in (a, b)$ справедливо разложение

$${}_a D_x^\alpha f \equiv {}_a D_x^{n \pm \varepsilon} f = f^{(n)}(x) \pm \varepsilon \left\{ [\psi(n+1) - \ln(x-a)] f^{(n)}(x) - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n} n!}{(k-n) k!} (x-a)^{k-n} f^{(k)}(x) \right\} + o(\varepsilon), \quad (1.4)$$

где

$$n = \begin{cases} m, & \{\alpha\} \geq 0.5, \\ m-1, & \{\alpha\} < 0.5, \end{cases}$$

$\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции (дигамма-функция).

Аналогично: если для аналитической в интервале (a, b) функции $f(x)$ существует правосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля (1.2), то при $\varepsilon \rightarrow 0$ в каждой точке $x \in (a, b)$ справедливо разложение

$${}_x D_b^\alpha f \equiv {}_x D_b^{n \pm \varepsilon} f = f^{(n)}(x) \pm \varepsilon \left\{ [\psi(n+1) - \ln(b-x)] f^{(n)}(x) - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n} n!}{(k-n) k!} (b-x)^{k-n} f^{(k)}(x) \right\} + o(\varepsilon). \quad (1.5)$$

Доказательство. В силу известной леммы дробного интегродифференцирования (см. лемму 15.3 в [1]) для дробной производной аналитической в (a, b) функции $f(x)$ справедливо представление

$${}_a D_x^\alpha f = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha+k)} f^{(k)}(x),$$

где

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)k!}$$

— биномиальные коэффициенты. Используя известные свойства гамма-функции $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ и $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$, приведенное представление может быть преобразовано к следующему виду:

$${}_a D_x^\alpha f = \Gamma(1+\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi(\alpha-k))}{\pi(\alpha-k)} \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{k!} f^{(k)}(x). \quad (1.6)$$

Выполним при $\alpha = n \pm \varepsilon$ разложение всех элементов этого ряда в ряд Тейлора по параметру ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$. Имеем

$$\Gamma(1+\alpha) \equiv \Gamma(1+n \pm \varepsilon) = \Gamma(1+n) \pm \Gamma'(1+n)\varepsilon + o(\varepsilon) = n! [1 \pm \varepsilon\psi(n+1)] + o(\varepsilon),$$

$$\frac{\sin(\pi(\alpha-k))}{\pi(\alpha-k)} \equiv \frac{\sin(\pi(n-k \pm \varepsilon))}{\pi(n-k \pm \varepsilon)} = \frac{\sin(\pi(n-k)) \pm \pi\varepsilon \cos(\pi(n-k))}{\pi(n-k \pm \varepsilon)} + o(\varepsilon) =$$

$$= \pm \frac{(-1)^{n-k} \varepsilon}{n-k \pm \varepsilon} + o(\varepsilon) = \begin{cases} 1 + o(\varepsilon), & n = k, \\ \pm \frac{(-1)^{n-k}}{n-k} \varepsilon + o(\varepsilon), & n \neq k, \end{cases}$$

$$(x-a)^{k-\alpha} \equiv (x-a)^{k-n \mp \varepsilon} = (x-a)^{k-n} [1 \mp \varepsilon \ln(x-a)] + o(\varepsilon).$$

Подставляя все найденные разложения в (1.6), после элементарных преобразований приходим к разложению (1.4). При этом сходимость ряда, входящего в правую часть этого разложения, следует из сходимости ряда в (1.6). Действительно, с точностью до не зависящего от k множителя k -е члены этих рядов отличаются множителем

$$v_k \equiv \frac{k-\alpha}{k-n} = 1 \mp \frac{\varepsilon}{k-n}, \quad k = n+1, n+2, \dots$$

Так как v_k образуют монотонную последовательность и $|v_k| \leq 1 \mp \varepsilon$ для любого $k \geq n+1$, то по признаку Абеля из сходимости ряда в (1.6) следует сходимость ряда из правой части разложения (1.4).

Разложение (1.5) строится аналогичным образом на основе разложения правосторонней дробной производной (1.2) в ряд по производным целого порядка. \square

Замечание 1. Разложение (1.4) справедливо при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любого фиксированного $x \in (a, b)$. Однако при любом фиксированном ε это разложение не может быть использовано в правой окрестности граничной точки $x = a$, так как при его выводе было использовано разложение в степенной ряд по ε функции $(x-a)^{\pm\varepsilon}$, справедливое только при условии $\varepsilon \ln(x-a) \rightarrow 0$.

Аналогичное замечание имеет место и для разложения (1.5) в окрестности правой границы $x = b$.

В практических приложениях достаточно часто вместо дробных производных Римана–Лиувилля используются дробные производные Капуто [2] (называемые также регуляризованными дробными производными). Левосторонняя и правосторонняя дробные производные Капуто определяются соответственно соотношениями

$${}_a^C D_x^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(m)}(s)}{(x-s)^{\alpha-m+1}} ds, \quad (1.7)$$

$${}_x^C D_b^\alpha f = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(m)}(s)}{(s-x)^{\alpha-m+1}} ds, \quad (1.8)$$

где $m = [\alpha] + 1$.

Для производных этого типа справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 функция $f(x)$ такова, что существует левосторонняя дробная производная Капуто (1.7). Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы следующие разложения:

$$\begin{aligned} {}_a^C D_x^\alpha f \equiv {}_a^C D_x^{n-\varepsilon} f = f^{(n)}(x) - \varepsilon \left\{ [\psi(n+1) - \ln(x-a)] f^{(n)}(x) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k-n} (n-k-1)! (x-a)^{k-n} \left[\binom{n}{k} f^{(k)}(x) - f^{(k)}(a) \right] - \right. \\ \left. - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n} n!}{(k-n) k!} (x-a)^{k-n} f^{(k)}(x) \right\} + o(\varepsilon), \quad \{\alpha\} \geq 0.5; \quad (1.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_a^C D_x^\alpha f \equiv {}_a^C D_x^{n+\varepsilon} f = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) + \\ + \varepsilon \left\{ [\psi(n+1) - \ln(x-a)] f^{(n)}(x) - [\psi(1) - \ln(x-a)] f^{(n)}(a) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k-n} (n-k-1)! (x-a)^{k-n} \left[\binom{n}{k} f^{(k)}(x) - f^{(k)}(a) \right] - \right. \end{aligned}$$

$$- \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n} n!}{(k-n) k!} (x-a)^{k-n} f^{(k)}(x) \Big\} + o(\varepsilon), \quad \{\alpha\} < 0.5. \tag{1.10}$$

Аналогично: если от аналитической в (a, b) функции $f(x)$ существует правосторонняя дробная производная Капуто (1.8), то ее разложения при $\varepsilon \rightarrow 0$ могут быть получены из (1.9) и (1.10) формальной заменой $(x-a)$ на $(b-x)$ и $f^{(k)}(a)$ на $f^{(k)}(b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно (см., например, [2]), что левосторонняя дробная производная Капуто связана с левосторонней дробной производной Римана–Лиувилля соотношением

$${}^C D_x^\alpha f = {}_a D_x^\alpha f - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} \tag{1.11}$$

(соотношение аналогичного вида справедливо и для правосторонних производных). Поскольку разложение дробной производной Римана–Лиувилля известно и дается теоремой 1, остается построить разложение по ε второго слагаемого в правой части (1.11). Вид этого разложения будет зависеть от величины $\{\alpha\}$. В силу (1.3) при $\{\alpha\} \geq 0.5$ имеем $\alpha = n - \varepsilon$ и $n = m$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} &\equiv \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-n+\varepsilon)} (x-a)^{k-n+\varepsilon} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(\pi(n-k-\varepsilon))}{\pi} \Gamma(n-k-\varepsilon) f^{(k)}(a) (x-a)^{k-n+\varepsilon} = \\ &= -\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k-n} (n-k-1)! f^{(k)}(a) (x-a)^{k-n} + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Подставляя это разложение вместе с (1.4) в (1.11), приходим к (1.9).

При $\{\alpha\} < 0.5$ в силу (1.3) имеем $\alpha = n + \varepsilon$ и $n = m - 1$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-n-\varepsilon)} (x-a)^{k-n-\varepsilon} + \frac{f^{(n)}(a)}{\Gamma(1-\varepsilon)} (x-a)^{-\varepsilon}.$$

Для первой суммы в правой части этого выражения будет справедливо разложение (1.12) с заменой ε на $-\varepsilon$. Для второго слагаемого имеем

$$\frac{f^{(n)}(a)}{\Gamma(1-\varepsilon)} (x-a)^{-\varepsilon} = f^{(n)}(a) + \varepsilon[\psi(1) - \ln(x-a)] f^{(n)}(a) + o(\varepsilon).$$

Подставляя полученные разложения вместе с (1.4) в (1.11), приходим к (1.10).

Разложения для правосторонних дробных производных Капуто получаются аналогичным образом. □

Сравнение теорем 1 и 2 показывает, что полученные разложения дробных производных Римана–Лиувилля и Капуто обладают различными свойствами. В частности, первые оказываются симметричными относительно смены знака малого параметра ε , в то время как у вторых переход от $-\varepsilon$ к ε приводит к появлению дополнительных слагаемых. Это обусловлено фундаментальными свойствами самих дробных производных: в результате предельных переходов $\alpha \rightarrow m$ и $\alpha \rightarrow m - 1$ дробная производная Римана–Лиувилля ${}_a D_x^\alpha f$ ($m = [\alpha] + 1$) переходит соответственно в производные целого порядка $D_x^m f$ и $D_x^{m-1} f$, в то время как для дробной производной Капуто ${}^C D_x^\alpha f$ такой переход справедлив лишь при $\alpha \rightarrow m$, что и приводит к нарушению симметричности разложения.

§ 2. Приближение обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений

Результаты теорем 1 и 2 могут быть использованы для построения приближений дробно-дифференциальных уравнений, включающих дробные производные Римана–Лиувилля и Капуто, дифференциальными уравнениями с малым параметром.

Рассмотрим функцию

$$F = F(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}, \mathcal{D}_x^{\alpha-m+1}y, \dots, \mathcal{D}_x^\alpha y), \quad x \in (a, b), \quad m = [\alpha] + 1, \quad (2.1)$$

в которой в качестве дробных производных $\mathcal{D}_x^{\alpha-m+j}y$ ($j = 1, 2, \dots, m$) могут использоваться как левосторонняя, так и правосторонняя дробные производные Римана–Лиувилля (1.1), (1.2) или Капуто (1.7), (1.8). Функция $y(x)$ предполагается аналитической в интервале (a, b) и такой, что соответствующие дробные производные, входящие в (2.1), существуют. Пусть $\alpha = m - \varepsilon$ и функция (2.1) является непрерывно-дифференцируемой по всем своим дробно-дифференциальным переменным вида $\mathcal{D}_x^{\alpha-m+j}y$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Тогда, подставляя вместо дробных производных их соответствующие разложения, полученные в теоремах 1 и 2, и выполняя разложение функции F в степенной ряд по малому параметру ε , в линейном приближении получим

$$F = F^{(0)}(x, y, y', \dots, y^{(m)}) + \varepsilon F^{(1)}(x, y, y', \dots, y^{(m)}, \dots) + o(\varepsilon). \quad (2.2)$$

Определение 1. Будем говорить, что обыкновенное дробно-дифференциальное уравнение

$$F = 0$$

с функцией F вида (2.1) приближается при $\alpha = m - \varepsilon$ с точностью $o(\varepsilon)$ обыкновенным дифференциальным уравнением в целых производных с малым параметром ε вида

$$F^{(0)} + \varepsilon F^{(1)} = o(\varepsilon),$$

если функции $F^{(0)}$ и $F^{(1)}$ связаны с функцией F соотношением (2.2).

Главной особенностью (2.2) является зависимость функции $F^{(1)}$ от производных, вообще говоря, всех целых порядков от функции $y(x)$. Тем не менее при определенных ограничениях на вид функции F эту зависимость удается упростить.

Рассмотрим для определенности обыкновенное дробно-дифференциальное уравнение, разрешенное относительно старшей дробной производной:

$$\mathcal{D}_x^\alpha y = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}, \mathcal{D}_x^{\alpha-m+1}y, \dots, \mathcal{D}_x^{\alpha-1}y), \quad m = [\alpha] + 1. \quad (2.3)$$

Предложение 1. Пусть в уравнении (2.3) функция $y(x)$ удовлетворяет условиям теорем 1 и 2, а функция f является бесконечно дифференцируемой функцией всех своих аргументов. Тогда при $\alpha = n - \varepsilon$ ($n = m$) и $\varepsilon \ll 1$ ($\varepsilon > 0$) уравнение (2.3) может быть с точностью до $o(\varepsilon)$ приближено обыкновенным дифференциальным уравнением n -го порядка с малым параметром ε следующего вида:

$$y^{(n)} = f^{(0)}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) + \varepsilon f^{(1)}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) + o(\varepsilon). \quad (2.4)$$

Доказательство. Используя результаты теорем 1 и 2, разложения входящих в уравнение (2.3) дробных производных можно записать в общем виде как

$$\mathcal{D}_x^{\alpha-n+j}y = y^{(j)} + \varepsilon \varphi_{n-j}(x, y, y', \dots) + o(\varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5)$$

где

$$\varphi_{n-j}(x, y, y', \dots) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-j,k}(x) y^{(k)}, \quad (2.6)$$

а функции $a_{n-j,k}(x)$ определяются видом дробных производных и их соответствующих разложений вида (1.4), (1.5), (1.9), (1.10). Сходимость соответствующих рядов (2.6) для каждого вида дробной производной следует из теорем 1 и 2.

Подставляя (2.5) в уравнение (2.3) и выполняя разложение функции из правой части в ряд по ε , с учетом $m = n$ получаем

$$y^{(n)} = f^{(0)}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) - \varepsilon\varphi_0(x, y, y', \dots) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n-1} \Phi_{\alpha-n+j}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})\varphi_{n-j}(x, y, y', \dots) + o(\varepsilon), \quad (2.7)$$

где

$$f^{(0)}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

$$\Phi_{\alpha-n+j}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = \frac{\partial f}{\partial \mathcal{D}_x^{\alpha-n+j} y} \Big|_{\{\mathcal{D}_x^{\alpha-n+k} y = y^{(k)}, k=1,2,\dots,n-1\}}.$$

Из уравнения (2.7) имеем

$$\varepsilon y^{(n)} = \varepsilon f^{(0)}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) + o(\varepsilon).$$

Дифференцируя это уравнение по x , находим

$$\begin{aligned} \varepsilon y^{(n+1)} &= \varepsilon \left[\frac{\partial f^{(0)}}{\partial x} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial y^{(k)}} y^{(k+1)} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} \right] + o(\varepsilon) = \\ &= \varepsilon \left[\frac{\partial f^{(0)}}{\partial x} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial y^{(k)}} y^{(k+1)} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial y^{(n-1)}} f^{(0)} \right] + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

В результате производная $\varepsilon y^{(n+1)}$ оказывается выражена как функция переменных $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, то есть может быть записана в виде

$$\varepsilon y^{(n+1)} = \varepsilon G_{n+1}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) + o(\varepsilon).$$

Аналогичная операция может быть формально выполнена для всех производных $\varepsilon y^{(n+k)}$ ($k = 1, 2, \dots$), что дает

$$\varepsilon y^{(n+k)} = \varepsilon G_{n+k}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) + o(\varepsilon), \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как функции φ_{n-j} из (2.6) зависят от всех производных $y^{(k)}$ линейно, то с учетом введенных обозначений можно записать

$$\begin{aligned} \varepsilon \varphi_{n-j}(x, y, y', \dots) &= \varepsilon \left[\sum_{k=0}^{n-1} a_{m-j,k}(x) y^{(k)} + a_{m-j,n}(x) f^{(0)}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} a_{m-j,n+k}(x) G_{n+k}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \right] + o(\varepsilon) \equiv \\ &\equiv \varepsilon H_{n-j}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Подстановка этого представления в уравнение (2.7) приводит последнее к искомому виду (2.4), в котором

$$f^{(1)}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = -H_0(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) + \sum_{j=1}^{n-1} \Phi_{\alpha-n+j}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) H_{n-j}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

что и требовалось доказать. \square

Безусловно, использованный в приведенном доказательстве подход носит формальный характер, и на практике далеко не для каждой функции f уравнение (2.4) может быть записано явно. Тем не менее в тех случаях, когда это оказывается возможным, задача исследования дробно-дифференциального уравнения (2.3) сводится к более простой задаче исследования обыкновенного дифференциального уравнения конечного $(n - 1)$ -го порядка с малым параметром вида (2.4).

Пример 1. Рассмотрим нелинейное обыкновенное дробно-дифференциальное уравнение

$${}_0D_x^{2-\varepsilon}y - y^\sigma = 0, \quad \sigma \neq 0, 1. \quad (2.8)$$

С использованием разложения (1.4) в качестве приближенного для данного уравнения находим

$$y'' - y^\sigma + \varepsilon \left[\left(\ln x + \gamma - \frac{3}{2} \right) y^\sigma - \frac{y}{x^2} + \frac{2y'}{x} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k(k+2)!} y^{(k+2)} \right] \approx 0 \quad (2.9)$$

(здесь и далее приближенное равенство вида $f \approx g$ означает $f = g + o(\varepsilon)$).

Из уравнения нулевого порядка $y'' - y^\sigma = O(\varepsilon)$ для старших производных $\varepsilon y^{(k)}$ ($k \geq 2$) получаются следующие их представления через y и y' :

$$\begin{aligned} \varepsilon y^{(2k)} &\approx \varepsilon \sum_{m=1}^k A_{2k-2m}^{2k} y^{m\sigma+m-2k+1} (y')^{2k-2m}, \\ \varepsilon y^{(2k+1)} &\approx \varepsilon \sum_{m=1}^k A_{2k-2m+1}^{2k+1} y^{m\sigma+m-2k} (y')^{2k-2m+1}, \end{aligned}$$

где

$$A_k^{k+2} = \frac{\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\sigma-k+1)}, \quad A_k^{k+2m} = \sum_{l=1}^{k+1} l A_l^{l+2m-2} \frac{\Gamma(m\sigma-m-l+3)}{\Gamma(m\sigma-m-k+2)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда уравнение (2.9) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение целого порядка

$$\begin{aligned} y'' - y^\sigma + \varepsilon \left[\left(\ln x + \gamma - \frac{3}{2} \right) y^\sigma - \frac{y}{x^2} + \frac{2y'}{x} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{A_0^{2m}}{(m-1)(2m)!} x^{2m-2} y^{m\sigma-m+1} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_k^{k+2m} (-x)^k x^{2m-2}}{(k+2m-2)(k+2m)!} y^{m\sigma-m-k+1} (y')^k \right] \approx 0. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Таким образом, для уравнения (2.8) получено приближенное уравнение (2.10) вида (2.4). Несмотря на его достаточно громоздкий вид, приближенный анализ некоторых его качественных свойств возможен. В частности, замкнутость этого уравнения относительно набора так называемых дифференциальных переменных y, y', y'' позволяет применить к нему, без каких-либо модификаций, методы приближенного группового анализа [24, 25] для нахождения допускаемой этим уравнением приближенной группы точечных преобразований и построения приближенных инвариантно-групповых решений.

Замечание 2. При $\alpha = n + \varepsilon$ ($n = m - 1$) уравнение (2.3) также может быть приближено уравнением вида (2.4). Однако в этом случае количество постоянных интегрирования, получающихся при решении уравнения (2.4), в общем случае будет на единицу меньше, чем у исходного дробно-дифференциального уравнения (2.3). Для сохранения количества постоянных интегрирования, от которых будет зависеть приближенное решение, уравнение (2.3) должно приближаться обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$\varepsilon y^{(n+1)} = \tilde{F}^{(0)}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) + \varepsilon \tilde{F}^{(1)}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) + o(\varepsilon)$$

с малым параметром при старшей производной.

§ 3. Примеры построения приближенных решений

Приближение дробно-дифференциального уравнения (2.3) уравнением (2.4) дает в ряде случаев возможность построения соответствующих приближенных решений. Однако эти приближенные решения будут непригодны в окрестности граничных точек $x = a$ и/или $x = b$ в силу непригодности в окрестности этих точек построенных в § 1 разложений соответствующих дробных производных. Это не позволяет непосредственно использовать предложенный подход для приближенного решения краевых задач или задач типа Коши, поставленных для дробно-дифференциального уравнения. Если же приближенное решение удастся построить, то возникает дополнительная задача о его соответствии условиям однозначной разрешимости исходного дробно-дифференциального уравнения (2.3), заданным на границах. Особенно сложной данная задача оказывается для уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля, поскольку в этом случае краевые условия обычно ставятся в виде заданных в граничных точках значений интегралов дробного порядка, что приводит к возникновению у решений таких уравнений интегрируемых особенностей на границах. Приведем примеры.

Пример 2. Рассмотрим линейное дробно-дифференциальное уравнение

$${}_0D_x^\alpha y = y, \quad \alpha \in (1, 2). \tag{3.1}$$

При $\alpha > 1.5$ справедливо разложение (1.4) с $n = 2$ и $\varepsilon = 2 - \alpha$. Тогда уравнение (3.1) с точностью до $o(\varepsilon)$ приближается уравнением

$$y'' - y - \varepsilon \left[(\psi(3) - \ln x)y'' + \frac{y}{x^2} - \frac{2y'}{x} - \frac{2}{x^2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(k-2)k!} y^{(k)} \right] \approx 0. \tag{3.2}$$

Из уравнения нулевого порядка $y'' - y = O(\varepsilon)$ следуют дифференциальные связи $\varepsilon y'' \approx \varepsilon y$, $\varepsilon y''' \approx \varepsilon y'$, последовательное дифференцирование которых дает соотношения

$$\varepsilon y^{(2k)} \approx \varepsilon y, \quad \varepsilon y^{(2k+1)} \approx \varepsilon y', \quad k \geq 1.$$

Тогда все производные $\varepsilon y^{(k)}$ при $k \geq 3$, входящие в ряд из (3.2), выражаются через εy или $\varepsilon y'$. Представляя этот ряд в виде суммы двух рядов, полученных разделением исходного ряда по четным и нечетным индексам, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{2}{x^2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(k-2)k!} y^{(k)} &= \frac{2}{x^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} x^{2n}}{(2n-2)(2n)!} \varepsilon y^{(2n)} + \frac{2}{x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2m+1} x^{2m+1}}{(2m-1)(2m+1)!} \varepsilon y^{(2m+1)} = \\ &= \varepsilon y \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m}}{m(2m+2)!} - 2\varepsilon y' \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)(2m+1)!}. \end{aligned}$$

В результате уравнение (3.2) сводится к виду (2.4):

$$y'' - y + \varepsilon \left[\left(\ln x + \gamma - \frac{3}{2} \right) y - \frac{y}{x^2} + y \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m}}{m(2m+2)!} - 2y' \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)(2m+1)!} \right] \approx 0. \tag{3.3}$$

Здесь учтено, что $\psi(3) = 3/2 - \gamma$, где $\gamma = 0.577215\dots$ — постоянная Эйлера.

Входящие в (3.3) бесконечные ряды могут быть представлены через специальные функции:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m}}{m(2m+2)!} &= \text{Chi}(x) + \frac{1 - \text{ch}(x) - x \text{sh}(x)}{x^2} - \ln x - \gamma + \frac{3}{2}, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2x^{2m-1}}{(2m-1)(2m+1)!} &= \text{Shi}(x) - \frac{\text{sh}(x) + x \text{ch}(x)}{x^2}, \end{aligned}$$

где

$$\text{Shi}(x) = \int_0^x \frac{\text{sh } t}{t} dt, \quad \text{Chi}(x) = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\text{ch } t - 1}{t} dt.$$

Тогда уравнение (3.3) перепишется в виде

$$y'' - y + \varepsilon \left[\left(\text{Chi}(x) - \frac{\text{ch}(x) + x \text{sh}(x)}{x^2} \right) y - \left(\text{Shi}(x) - \frac{\text{sh}(x) + x \text{ch}(x)}{x^2} \right) y' \right] \approx 0. \quad (3.4)$$

Построим приближенное решение этого уравнения, которое будем искать в виде $y(x) = y_{(0)}(x) + \varepsilon y_{(1)}(x) + o(\varepsilon)$. Подстановка этого представления решения в уравнение (3.4) с дальнейшим расщеплением по степеням ε приводит к следующей системе уравнений относительно неизвестных функций $y_{(0)}(x)$ и $y_{(1)}(x)$:

$$\begin{aligned} y_{(0)}'' - y_{(0)} &= 0, \\ y_{(1)}'' - y_{(1)} &= \left(\frac{\text{ch}(x) + x \text{sh}(x)}{x^2} - \text{Chi}(x) \right) y_{(0)} - \left(\frac{\text{sh}(x) + x \text{ch}(x)}{x^2} - \text{Shi}(x) \right) y_{(0)}'. \end{aligned}$$

Решение данной системы не представляет принципиальных сложностей. Решение первого уравнения системы имеет вид $y_{(0)}(x) = C_{1(0)}e^x + C_{2(0)}e^{-x}$, где $C_{1(0)}$, $C_{2(0)}$ — постоянные интегрирования. Подстановка данного решения в правую часть второго уравнения системы приводит его к виду

$$y_{(1)}'' - y_{(1)} = C_{1(0)} \left[\frac{1-x}{x^2} - e^x \text{Ei}(-x) \right] + C_{2(0)} \left[\frac{1+x}{x^2} - e^{-x} \text{Ei}(x) \right],$$

где

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Данное линейное уравнение имеет общее решение

$$\begin{aligned} y_{(1)}(x) &= C_{1(1)}e^x + C_{2(1)}e^{-x} - C_{1(0)} \left(\frac{2x+3}{4} e^x \text{Ei}(-x) + \frac{1}{4} e^{-x} \text{Ei}(x) + \frac{1}{2} \right) + \\ &\quad + C_{2(0)} \left(\frac{2x-3}{4} e^{-x} \text{Ei}(x) - \frac{1}{4} e^x \text{Ei}(-x) - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

В результате получаем следующее приближенное общее решение уравнения (3.4):

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \varepsilon C_1 \left(\frac{2x+3}{4} e^x \text{Ei}(-x) + \frac{1}{4} e^{-x} \text{Ei}(x) + \frac{1}{2} \right) + \\ &\quad + \varepsilon C_2 \left(\frac{2x-3}{4} e^{-x} \text{Ei}(x) - \frac{1}{4} e^x \text{Ei}(-x) - \frac{1}{2} \right) + o(\varepsilon). \quad (3.5) \end{aligned}$$

Здесь $C_1 \equiv C_1(\varepsilon) = C_{1(0)} + \varepsilon C_{1(1)} + o(\varepsilon)$, $C_2 \equiv C_2(\varepsilon) = C_{2(0)} + \varepsilon C_{2(1)} + o(\varepsilon)$ — произвольные постоянные, зависящие от малого параметра ε .

Исследуем, при каких x и ε полученное приближенное решение (3.5) может быть принято за приближенное решение исходного дробно-дифференциального уравнения (3.1).

Точное общее решение уравнения (3.1) известно и имеет вид (см., например, [1])

$$\bar{y}(x) = A_1 x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(x^\alpha) + A_2 x^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1}(x^\alpha), \quad (3.6)$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные и

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta, z \in \mathbb{C} \quad (3.7)$$

— функция типа Миттаг-Леффлера [1, 2].

При сравнении решений (3.5) и (3.6) важным является соответствие между постоянными A_1, A_2 и C_1, C_2 . Связь между этими постоянными может быть установлена исходя из рассмотрения асимптотического поведения обоих решений при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow +0$. Заметим, что и точное решение (3.6), и приближенное решение (3.5) являются непрерывными функциями при $x \in (0, \infty)$, при этом

$$\lim_{x \rightarrow +0} |\bar{y}(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |\bar{y}(x)| = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} |y(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |y(x)| = \infty.$$

Рассмотрим поведение обоих решений при больших значениях аргумента. Для исследования точного решения (3.6) воспользуемся асимптотическим разложением функции типа Миттаг-Леффлера (см. лемму 3.4 в [26]), которое при $x \rightarrow +\infty$ имеет вид

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\alpha} x^{\frac{1-\beta}{\alpha}} \exp\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right) - \sum_{n=1}^p \frac{x^{-n}}{\Gamma(\beta - \alpha n)} + O\left(\frac{1}{x^{1+p}}\right).$$

Для функции $Ei(x)$, входящей в приближенное решение (3.5), при $|x| \rightarrow \infty$ справедливо следующее асимптотическое разложение (см., например, [27]):

$$Ei(x) = \frac{e^x}{x} \left(1 + \sum_{n=1}^{p-1} \frac{(-1)^n n!}{x^n} \right) + O\left(\frac{1}{x^{1+p}}\right).$$

Тогда из (3.6) и (3.5) при $x \rightarrow +\infty$ получаем

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) &= \frac{A_1 + A_2}{\alpha} e^x - \frac{A_1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{x^{1+\alpha}} - \frac{A_2}{\Gamma(-1-\alpha)} \frac{1}{x^{2+\alpha}} + O\left(\frac{1}{x^{1+2\alpha}}\right), \\ y(x) &= C_1 e^x + \varepsilon \left[\frac{C_1 - C_2}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Из условия равенства главных членов этих разложений находим

$$C_1 = (A_1 + A_2)/\alpha. \tag{3.8}$$

Тогда для разности приближенного и точного решений, с учетом $\alpha = 2 - \varepsilon$, при $x \rightarrow +\infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем оценку

$$|y(x) - \bar{y}(x)| = \varepsilon \left[\frac{|C_1 - C_2|}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] + O\left(\frac{1}{x^{3-\varepsilon}}\right) + o(\varepsilon) = O\left(\frac{\varepsilon}{x}\right).$$

Для всех $x \geq \varepsilon^{-\beta}$ ($\beta > 0$) данная оценка приобретает вид $|y(x) - \bar{y}(x)| = o(\varepsilon)$, то есть приближенное решение (3.5) с постоянной C_1 из (3.8) приближает точное решение (3.6) с точностью $o(\varepsilon)$.

Теперь исследуем поведение точного и приближенного решений в правой окрестности точки $x = 0$. Из определения функции типа Миттаг-Леффлера (3.7) имеем

$$E_{\alpha, \beta}(x^\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha + \beta)} + O(x^{2\alpha}).$$

Также из разложения в ряд Тейлора находим

$$\begin{aligned} e^{-x} Ei(x) &= \gamma + \ln x + (1 - \gamma - \ln x)x + O(x^2), \\ e^x Ei(-x) &= \gamma + \ln x - (1 - \gamma - \ln x)x + O(x^2). \end{aligned}$$

Тогда из (3.6) и (3.5) получаем, что при $x \rightarrow +0$ справедливы разложения

$$\bar{y}(x) = \frac{A_2}{\Gamma(\alpha - 1)} x^{\alpha-2} + \frac{A_1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} + O(x^{2\alpha-2}), \tag{3.9}$$

$$y(x) = (C_1 + C_2) \left[1 - \varepsilon \left(\gamma + \frac{1}{2} + \ln x \right) \right] + (C_1 - C_2) \left[1 - \varepsilon \left(\gamma - \frac{1}{2} + \ln x \right) \right] x + o(\varepsilon, x). \quad (3.10)$$

Подставим в первое разложение

$$A_1 = \frac{\alpha}{2}(C_1 - C_2), \quad A_2 = \frac{\alpha}{2}(C_1 + C_2)$$

(это согласуется с (3.8)), $\alpha = 2 - \varepsilon$, и выполним дополнительное разложение по ε для любого фиксированного x . После преобразований получим, что в этом случае разложение $\bar{y}(x)$ совпадает с правой частью (3.10), то есть $|y(x) - \bar{y}(x)| = o(\varepsilon)$ и приближенное решение также приближает точное при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Однако для любого фиксированного малого ε при $x \rightarrow +0$ приближенное и точное решения расходятся сколь угодно сильно, поскольку в этом случае, как это следует из (3.9) и (3.10), главные члены разложений имеют вид

$$\bar{y} \sim A_2 x^{-\varepsilon}, \quad y \sim A_2(1 - \varepsilon \ln x).$$

Второе представление является линейной частью разложения по ε первого представления, откуда следует, что $|y(x) - \bar{y}(x)| = o(\varepsilon)$ при $x \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ только при выполнении дополнительного условия $\varepsilon \ln x \rightarrow 0$.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что приближенное решение (3.5) может рассматриваться при малых значениях ε как приближенное общее решение дробно-дифференциального уравнения (3.1) для всех значений $x > 0$, за исключением малой окрестности точки $x = 0$, граница которой при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ определяется асимптотическим соотношением $\varepsilon \ln x \rightarrow 0$.

Пример 3. Рассмотрим нелинейное дробно-дифференциальное уравнение

$${}_0D_x^\alpha y = y^2, \quad \alpha \in (0, 1) \quad (3.11)$$

при условии $\alpha = 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$). Несмотря на весьма простой вид этого уравнения, его точное решение не известно.

С использованием разложения (1.4), из (3.11) получаем следующее приближенное уравнение:

$$y' + \varepsilon \left[(\ln x + \gamma - 1) y' + \frac{y}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k(k+1)!} y^{(k+1)} \right] \approx y^2. \quad (3.12)$$

Из приближенного уравнения $\varepsilon y' \approx \varepsilon y^2$ легко получаются представления $\varepsilon y^{(k)} \approx \varepsilon k! y^{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$). Тогда уравнение (3.12) запишется в виде

$$y' + \varepsilon y^2 \left[\ln x + \gamma - 1 + \frac{1}{xy} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-xy)^k}{k} \right] \approx y^2. \quad (3.13)$$

Входящий в это уравнение ряд сходится при выполнении дополнительного условия $-1 < xy \leq 1$. В этом случае уравнение (3.13) принимает вид

$$y' + \varepsilon y^2 \left[\ln x + \gamma - 1 + \frac{1}{xy} - \ln(1 + xy) \right] \approx y^2, \quad (3.14)$$

соответствующий (2.4).

Построим приближенное решение уравнения (3.14), которое, как и ранее, будем искать в виде $y(x) = y_{(0)}(x) + \varepsilon y_{(1)}(x) + o(\varepsilon)$. Подставляя это представление решения в уравнение (3.14), в результате расщепления по ε приходим к системе

$$\begin{aligned} y'_{(0)} &= y_{(0)}^2, \\ y'_{(1)} - 2y_{(0)}y_{(1)} &= -y_{(0)}^2 \left[\ln x + \gamma - 1 + \frac{1}{xy_{(0)}} - \ln(1 + xy_{(0)}) \right]. \end{aligned}$$

Общее решение первого уравнения этой системы имеет вид

$$y_{(0)} = (C_{(0)} - x)^{-1}$$

с произвольной постоянной $C_{(0)}$. Подставляя это решение во второе уравнение системы, находим его решение в виде

$$y_{(1)}(x) = \frac{C_{(1)}}{(C_{(0)} - x)^2} + \frac{\ln(C_{(0)} - x) - 1}{C_{(0)} - x} - \frac{C_{(0)} + x}{(C_{(0)} - x)^2} \ln x + \frac{3 - \gamma + \ln C_{(0)}}{(C_{(0)} - x)^2} x.$$

Это решение справедливо при выполнении дополнительного условия $-1 < xy_{(0)} \leq 1$, из которого получаем $C_{(0)} > 0$ и $0 < x \leq C_{(0)}/2$.

Вводя постоянную $C \equiv C(\varepsilon) \approx C_{(0)} - \varepsilon C_{(1)}$, приближенное решение уравнения (3.14) можем записать в виде

$$y(x) \approx \frac{1}{C - x} + \varepsilon \left[\frac{\ln(C - x) - 1}{C - x} - \frac{C + x}{(C - x)^2} \ln x + \frac{3 - \gamma + \ln C}{(C - x)^2} x \right]. \quad (3.15)$$

Точность полученного приближенного решения (3.15) может быть проиллюстрирована путем сравнения с приближенным аналитическим решением исходного дробно-дифференциального уравнения (3.11), построенным методом последовательных приближений.

Поставим для уравнения (3.11) задачу типа Коши, задав начальное условие в виде

$${}_0I_x^{1-\alpha} y|_{x=0} = A, \quad A \neq 0, \quad (3.16)$$

где

$${}_0I_x^{1-\alpha} y = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^x \frac{y(s)}{(x - s)^\alpha} ds$$

— интеграл дробного порядка $1 - \alpha$ от функции $y(x)$.

Однократное интегрирование уравнения (3.11) с учетом начального условия (3.16) дает

$${}_0I_x^{1-\alpha} y - A = \int_0^x y^2(s) ds.$$

Применяя к этому равенству оператор дробного дифференцирования ${}_0D_x^{1-\alpha}$, в силу известных свойств дробных производных Римана–Лиувилля (см., например, [1]) приходим к следующему нелинейному интегральному уравнению:

$$y = A \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + {}_0I_x^\alpha y^2.$$

Решение этого уравнения может быть формально найдено методом последовательных приближений, возможность применимости которого для рассматриваемой задачи следует из теоремы 42.1 [1]. Имеем

$$y_0 = A \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad y_{n+1} = A \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + {}_0I_x^\alpha y_n^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.17)$$

Вид связи постоянной A с постоянной C из (3.15) находится исходя из равенства главных членов разложений по x и $\varepsilon = 1 - \alpha$ приближенного решения, получаемого по (3.17), и решения (3.15). В результате получено соотношение $AC = \Gamma(1 + \alpha)$. Все дальнейшие вычисления проводились при $C = 1$, при этом $0 < x \leq 1/2$ и $A = \Gamma(1 + \alpha)$.

Выполнить все итерации процесса (3.17) для построения точного решения возможным не представляется. Поэтому в системе компьютерной алгебры Maple аналитически были выполнены первые восемь итераций и найдено приближенное аналитическое решение y_8 задачи (3.11), (3.16). При этом в заданном диапазоне изменения аргумента x выполнялось неравенство $|y_8 - y_7| < \varepsilon$. Полученное приближенное решение для трех различных значений $\varepsilon = 1 - \alpha$

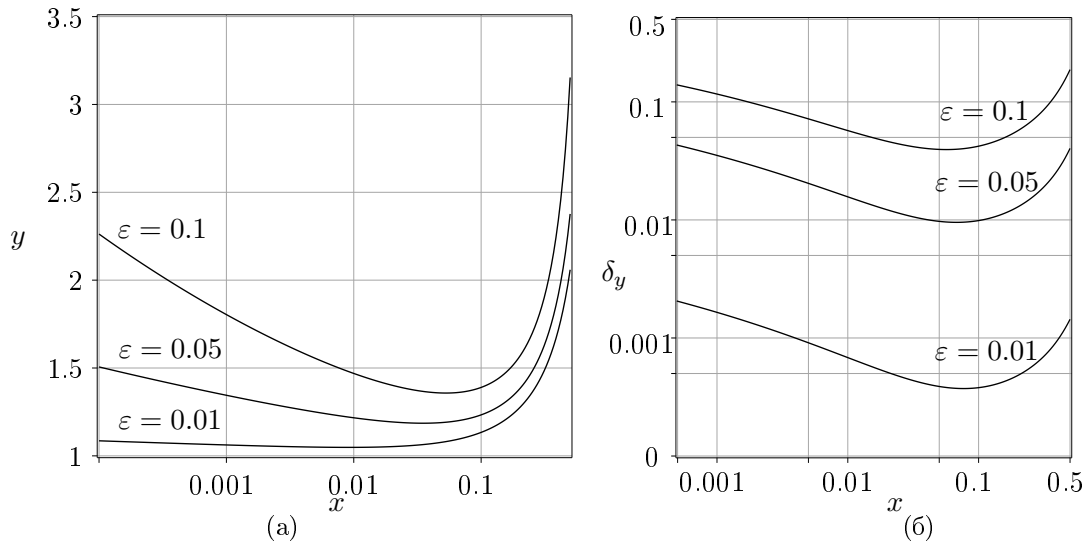


Рис. 1. К оценке погрешности приближенного решения y , определяемого (3.15): а) решение y_8 , полученное на восьмой итерации метода последовательных приближений; б) относительная погрешность $\delta_y = |y - y_8|/y_8$

показано на рис. 1, а. Найденное таким образом решение y_8 сравнивалось с приближенным решением y , определяемым (3.15). На рисунке 1, б показаны графики относительной погрешности $\delta_y = |y - y_8|/y_8$ сравниваемых решений, построенные в логарифмической системе координат. Из приведенных графиков видно, что относительная ошибка решений с увеличением ε растет быстрее, чем ε . Однако при рассматриваемых малых значениях $\varepsilon \in (0, 0.1)$ при $x \in (0.0005, 0.5)$ отклонение приближенных решений не превосходит по порядку ε , что свидетельствует о пригодности приближенного решения (3.15) в данной области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 2006. 539 p. DOI: [10.1016/s0304-0208\(06\)x8001-5](https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5)
3. Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego: Academic Press, 1999. xxiv+340 p.
4. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
5. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamic approach // Physics Reports. 2000. Vol. 339. Issue 1. P. 1–77. DOI: [10.1016/S0370-1573\(00\)00070-3](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3)
6. Klages R., Radons G., Sokolov I.M. (Eds.) Anomalous transport: foundations and applications. Berlin: Wiley-VCH, 2008. 608 p. DOI: [10.1002/9783527622979](https://doi.org/10.1002/9783527622979)
7. Klafter J., Lim S.C., Metzler R. (Eds.) Fractional dynamics: recent advances. Singapore: World Scientific, 2011. 532 p. DOI: [10.1142/9789814340595](https://doi.org/10.1142/9789814340595)
8. Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu. Symmetry properties of fractional diffusion equations // Physica Scripta. 2009. Vol. 2009. Issue T136. 014016. DOI: [10.1088/0031-8949/2009/T136/014016](https://doi.org/10.1088/0031-8949/2009/T136/014016)
9. Газизов Р.К., Касаткин А.А., Лукашук С.Ю. Уравнения с производными дробного порядка: замены переменных и нелокальные симметрии // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4. № 4. С. 54–68.
10. Lukashchuk S.Yu., Makunin A.V. Group classification of nonlinear time-fractional diffusion equation with a source term // Applied Mathematics and Computation. 2015. Vol. 257. P. 335–343. DOI: [10.1016/j.amc.2014.11.087](https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.11.087)
11. Ray S.S. Analytical solution for the space fractional diffusion equation by two-step Adomian decomposition method // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2009. Vol. 14. No. 4. P. 1295–1306. DOI: [10.1016/j.cnsns.2008.01.010](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2008.01.010)
12. Safari M., Danesh M. Application of Adomian's decomposition method for the analytical solution of space fractional diffusion equation // Advances in Pure Mathematics. 2011. Vol. 1. No. 6. P. 345–350. DOI: [10.4236/apm.2011.16062](https://doi.org/10.4236/apm.2011.16062)

13. He J.-H. Homotopy perturbation technique // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1999. Vol. 178. Issues 3–4. P. 257–262. DOI: [10.1016/S0045-7825\(99\)00018-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00018-3)
14. Rajeev, Kushwaha M.S. Homotopy perturbation method for a limit case Stefan problem governed by fractional diffusion equation // *Applied Mathematical Modelling*. 2013. Vol. 37. Issue 5. P. 3589–3599. DOI: [10.1016/j.apm.2012.07.047](https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.07.047)
15. Odibat Z., Momani S. Applications of variational iteration and homotopy perturbation methods to fractional evolution equations // *Topological Methods in Nonlinear Analysis*. 2008. Vol. 31. No. 2. P. 227–234.
16. He J.-H. Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1998. Vol. 167. Issues 1–2. P. 57–68. DOI: [10.1016/S0045-7825\(98\)00108-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00108-X)
17. Guo S., Mei L., Li Y. Fractional variational homotopy perturbation iteration method and its application to a fractional diffusion equation // *Applied Mathematics and Computation*. 2013. Vol. 219. Issue 11. P. 5909–5917. DOI: [10.1016/j.amc.2012.12.003](https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.12.003)
18. Pandey R.K., Singh O.P., Baranwal V.K., Tripathi M.P. An analytic solution for the space-time fractional advection–dispersion equation using the optimal homotopy asymptotic method // *Computer Physics Communications*. 2012. Vol. 183. Issue 10. P. 2098–2106. DOI: [10.1016/j.cpc.2012.05.012](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.05.012)
19. Tarasov V.E., Zaslavsky G.M. Dynamics with low-level fractionality // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2006. Vol. 368. Issue 2. P. 399–415. DOI: [10.1016/j.physa.2005.12.015](https://doi.org/10.1016/j.physa.2005.12.015)
20. Tofighi A., Golestani A. A perturbative study of fractional relaxation phenomena // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2008. Vol. 387. Issues 8–9. P. 1807–1817. DOI: [10.1016/j.physa.2007.11.046](https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.11.046)
21. Tofighi A. An especial fractional oscillator // *International Journal of Statistical Mechanics*. 2013. Vol. 2013. Article ID 175273, 5 p. DOI: [10.1155/2013/175273](https://doi.org/10.1155/2013/175273)
22. Лукашук С.Ю. Групповая классификация одного нелинейного приближенного уравнения субдиффузии // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2016. Т. 20. № 4. С. 603–619. DOI: [10.14498/vsgtu1520](https://doi.org/10.14498/vsgtu1520)
23. Найфэ А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
24. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Приближенные симметрии // *Математический сборник*. 1988. Т. 136 (178). № 4 (8). С. 435–450.
25. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Методы возмущений в групповом анализе // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж.* 1989. Т. 34. С. 85–147.
26. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М: Наука, 1966. 672 с.
27. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.

Поступила в редакцию 21.08.2017

Лукашук Станислав Юрьевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Уфимский государственный авиационный технический университет, 450008, Россия, г. Уфа, ул. К. Маркса, 12.

E-mail: lsu@ugatu.su

S. Yu. Lukashchuk

Approximation of ordinary fractional differential equations by differential equations with a small parameter

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 4, pp. 515–531 (in Russian).

Keywords: ordinary fractional differential equation, small parameter, approximation, approximate solution.

MSC2010: 34A08, 34E10

DOI: [10.20537/vm170403](https://doi.org/10.20537/vm170403)

An approach to approximation of ordinary fractional differential equations by integer-order differential equations is proposed. It is assumed that the order of fractional differentiation is close to integer. Perturbation

expansions for the Riemann–Liouville and Caputo fractional derivatives are derived in terms of a suitable small parameter extracted from the order of fractional differentiation. The first-order term of these expansions is represented by series depending on integer-order derivatives of all integer orders. The expansions obtained permit one to approximate ordinary fractional differential equations, involving such types of fractional derivatives, by integer-order differential equations with a small parameter. It is proved that, for fractional differential equations belonging to a certain class, corresponding approximate equations contain only a finite number of integer-order derivatives. Approximate solutions to such equations can be obtained using well-known perturbation techniques. The proposed approach is illustrated by several examples.

REFERENCES

1. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*, CRC Press, 1993, 1006 p. Original Russian text published in Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya*, Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987, 688 p.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations*, Amsterdam: Elsevier Science B.V., 2006, 539 p. DOI: [10.1016/s0304-0208\(06\)x8001-5](https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5)
3. Podlubny I. *Fractional differential equations*, San Diego: Academic Press, 1999, xxiv+340 p.
4. Pskhu A.V. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* (Partial differential equations of fractional order), Moscow: Nauka, 2005, 199 p.
5. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamic approach, *Physics Reports*, 2000, vol. 339, issue 1, pp. 1–77. DOI: [10.1016/S0370-1573\(00\)00070-3](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3)
6. Klages R., Radons G., Sokolov I.M. (Eds.) *Anomalous transport: foundations and applications*, Berlin: Wiley-VCH, 2008, xxiv+584 p. DOI: [10.1002/9783527622979](https://doi.org/10.1002/9783527622979)
7. Klafter J., Lim S.C., Metzler R. (Eds.) *Fractional dynamics: recent advances*, Singapore: World Scientific, 2011, 532 p. DOI: [10.1142/9789814340595](https://doi.org/10.1142/9789814340595)
8. Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu. Symmetry properties of fractional diffusion equations, *Physica Scripta*, 2009, vol. 2009, issue T136, 014016. DOI: [10.1088/0031-8949/2009/T136/014016](https://doi.org/10.1088/0031-8949/2009/T136/014016)
9. Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu. Fractional differential equations: change of variables and nonlocal symmetries, *Ufa Mathematical Journal*, 2012, vol. 4, issue 4, pp. 54–67.
10. Lukashchuk S.Yu., Makunin A.V. Group classification of nonlinear time-fractional diffusion equation with a source term, *Applied Mathematics and Computation*, 2015, vol. 257, pp. 335–343. DOI: [10.1016/j.amc.2014.11.087](https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.11.087)
11. Ray S.S. Analytical solution for the space fractional diffusion equation by two-step Adomian decomposition method, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, vol. 14, no. 4, pp. 1295–1306. DOI: [10.1016/j.cnsns.2008.01.010](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2008.01.010)
12. Safari M., Danesh M. Application of Adomian's decomposition method for the analytical solution of space fractional diffusion equation, *Advances in Pure Mathematics*, 2011, vol. 1, no. 6, pp. 345–350. DOI: [10.4236/apm.2011.16062](https://doi.org/10.4236/apm.2011.16062)
13. He J.-H. Homotopy perturbation technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, vol. 178, issues 3–4, pp. 257–262. DOI: [10.1016/S0045-7825\(99\)00018-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00018-3)
14. Rajeev, Kushwaha M.S. Homotopy perturbation method for a limit case Stefan problem governed by fractional diffusion equation, *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, issue 5, pp. 3589–3599. DOI: [10.1016/j.apm.2012.07.047](https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.07.047)
15. Odibat Z., Momani S. Applications of variational iteration and homotopy perturbation methods to fractional evolution equations, *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 2008, vol. 31, no. 2, pp. 227–234.
16. He J.-H. Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, vol. 167, issues 1–2, pp. 57–68. DOI: [10.1016/S0045-7825\(98\)00108-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00108-X)
17. Guo S., Mei L., Li Y. Fractional variational homotopy perturbation iteration method and its application to a fractional diffusion equation, *Applied Mathematics and Computation*, 2013, vol. 219, issue 11, pp. 5909–5917. DOI: [10.1016/j.amc.2012.12.003](https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.12.003)
18. Pandey R.K., Singh O.P., Baranwal V.K., Tripathi M.P. An analytic solution for the space-time fractional advection–dispersion equation using the optimal homotopy asymptotic method, *Computer Physics Communications*, 2012, vol. 183, issue 10, pp. 2098–2106. DOI: [10.1016/j.cpc.2012.05.012](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.05.012)
19. Tarasov V.E., Zaslavsky G.M. Dynamics with low-level fractionality, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2006, vol. 368, issue 2, pp. 399–415. DOI: [10.1016/j.physa.2005.12.015](https://doi.org/10.1016/j.physa.2005.12.015)
20. Tofighi A., Golestani A. A perturbative study of fractional relaxation phenomena, *Physica A: Statistical*

- Mechanics and its Applications*, 2008, vol. 387, issues 8-9, pp. 1807–1817.
DOI: [10.1016/j.physa.2007.11.046](https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.11.046)
21. Tofighi A. An especial fractional oscillator, *International Journal of Statistical Mechanics*, 2013, vol. 2013, article ID 175273, 5 p. DOI: [10.1155/2013/175273](https://doi.org/10.1155/2013/175273)
 22. Lukashchuk S.Yu. An approximate group classification of a perturbed subdiffusion equation, *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 20, no. 4, pp. 603–619 (in Russian). DOI: [10.14498/vsgtu1520](https://doi.org/10.14498/vsgtu1520)
 23. Nayfeh A.H. *Perturbation methods*, Weinheim: Wiley-VCH Verlag, 2000, 437 p. Translated under the title *Metody vozhmushchenii*, Moscow: Mir, 1976, 456 p.
 24. Baïkov V.A., Gazizov R.K., Ibragimov N.Kh. Approximate symmetries, *Mathematics of the USSR — Sbornik*, 1989, vol. 64, no. 2, pp. 427–441. DOI: [10.1070/SM1989v064n02ABEH003318](https://doi.org/10.1070/SM1989v064n02ABEH003318)
 25. Baikov V.A., Gazizov R.K., Ibragimov N.Kh. Perturbation methods in group analysis, *Journal of Soviet Mathematics*, 1991, vol. 55, issue 1, pp. 1450–1490. DOI: [10.1007/BF01097534](https://doi.org/10.1007/BF01097534)
 26. Dzhrbashyan M.M. *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsii v kompleksnoi oblasti* (Integral transforms and representations of functions in the complex domain), Moscow, Nauka, 1966, 672 p.
 27. Abramowitz M., Stegun I.A. *Handbook of mathematical functions*, Washington: National Bureau of Standards, 1972, 1037 p. Translated under the title *Spravochnik po spetsial'nyim funktsiyam*, Moscow: Nauka, 1979, 832 p.

Received 21.08.2017

Lukashchuk Stanislav Yur'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Ufa State Aviation Technical University, ul. K. Marksa, 12, Ufa, 450008, Russia.
E-mail: lsu@ugatu.su