

УДК 517.955.8

© А. В. Казарников, С. В. Ревина

**БИФУРКАЦИИ В СИСТЕМЕ РЭЛЕЯ С ДИФФУЗИЕЙ**

Рассматривается система реакции–диффузии с кубической нелинейностью, которая является бесконечномерным аналогом классической системы Рэля и частным случаем системы Фитцью–Нагумо. Предполагается, что пространственная переменная изменяется на отрезке, на концах которого заданы однородные краевые условия Неймана. Известно, что в данном случае в системе Рэля с диффузией существует пространственно-однородный автоколебательный режим, совпадающий с предельным циклом классической системы Рэля. В настоящей работе показано существование счетного множества критических значений управляющего параметра, при которых возникают пространственно-неоднородные автоколебательные и стационарные режимы. Данные режимы устойчивы относительно возмущений, принадлежащих некоторым бесконечномерным инвариантным подпространствам системы, но неустойчивы во всем фазовом пространстве. Это свойство объясняет, почему в результате численных экспериментов при некоторых значениях параметра различным начальным условиям соответствуют нулевое, периодическое по времени или стационарное решение. Асимптотика вторичных решений построена методом Ляпунова–Шмидта. Явно найдены первые члены разложения, проанализированы формулы для общего члена асимптотики. Показано, что на инвариантных подпространствах происходит мягкая потеря устойчивости нулевого равновесия. Эволюция вторичных режимов при увеличении значений надкритичности исследована численно. Установлено, что с ростом значений надкритичности вторичные автоколебательные режимы постепенно сменяются стационарными. Амплитуда стационарных решений растет по мере увеличения надкритичности, а профиль асимптотически стремится к профилю меандра.

*Ключевые слова:* системы реакции–диффузии, формирование структур, метод Ляпунова–Шмидта.

DOI: [10.20537/vm170402](https://doi.org/10.20537/vm170402)**Введение**

В настоящее время немало работ посвящено исследованию нелинейных параболических систем, называемых системами реакции–диффузии. Эти системы, изначально введенные А. Тьюрингом [1], широко применяются при моделировании химических [2], экологических [3, 4], физиологических [5, 6] и других процессов.

Рассматривается система Рэля с диффузией в одномерном случае, когда пространственная переменная меняется на интервале  $x \in (0, 1)$ , а время — на вещественной прямой  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} v_t &= \nu v_{xx} + w, \\ w_t &= \nu w_{xx} - v + \mu w - w^3, \end{aligned} \quad (0.1)$$

где  $v = v(x, t)$ ,  $w = w(x, t)$  — неизвестные функции,  $\mu \in \mathbb{R}$  — управляющий параметр,  $\nu > 0$  — фиксированный коэффициент диффузии. Данная система является частным случаем системы Фитцью–Нагумо [5, 6], которая моделирует распространение нервного импульса.

При  $\nu = 0$  приходим к классической системе обыкновенных дифференциальных уравнений Рэля:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + \mu y_2 - y_2^3. \end{aligned} \quad (0.2)$$

Известно, что нулевое решение системы (0.2) при  $\mu < 0$  асимптотически устойчиво, при  $\mu = 0$  оно теряет устойчивость, и при  $\mu > 0$  в системе существует устойчивый предельный цикл. Первые члены разложения в ряд по параметру  $\mu$  этого цикла неоднократно различными методами находились в литературе, но общий член асимптотики выписан не был.

С одной стороны, системы реакции–диффузии сохраняют некоторые свойства обыкновенного дифференциального уравнения, которое получается из исходной системы отбрасыванием диффузионных членов, с другой стороны, возникающие в процессе изменения параметров пространственно-временные структуры обладают гораздо более сложным поведением, чем в конечномерном случае. Эффекты, связанные с добавлением диффузионных членов, активно исследуются в литературе [4, 7]. Известно, что если на границе отрезка задать однородные краевые условия Неймана

$$v_x(0, t) = 0, \quad w_x(0, t) = 0, \quad (0.3)$$

то при критическом значении параметра  $\mu_{cr} = 0$  в системе (0.1) происходит рождение пространственно-однородного автоколебательного режима, а именно цикла классической системы Рэля без диффузии (0.2).

Целью настоящей работы является исследование бифуркационного поведения системы Рэля с диффузией при изменении параметра  $\mu$ , нахождение инвариантных подпространств системы и исследование бифуркаций на этих подпространствах, построение асимптотики вторичных решений, ответвляющихся от нулевого, численное исследование их разрушения. Показано существование критических значений параметра  $\mu$ , при которых возникают пространственно-неоднородные автоколебательные и стационарные режимы, устойчивые относительно возмущений, принадлежащих некоторым бесконечномерным инвариантным подпространствам системы (0.2), (0.3). Тем самым, в частности, объясняются результаты численных экспериментов, в которых при значениях параметра, близких к критическим, и для начальных условий, принадлежащих различным подпространствам, решение либо стремится к нулю, либо выходит с течением времени на автоколебательный или стационарный режим. Попутно получен общий член асимптотики цикла классической системы Рэля и исследованы его свойства.

Конечномерные инвариантные подпространства для нелинейных параболических уравнений и их приложения исследованы в [8]. Краевые условия Дирихле и смешанные краевые условия для системы Рэля с диффузией рассматривались в [9, 10]. Для получения вторичных решений применен метод Ляпунова–Шмидта в форме, развитой В. И. Юдовичем [11]. Наряду с классическим методом многомасштабных разложений [12] данный метод применим к дифференциальным уравнениям, заданным как в конечномерных, так и бесконечномерных пространствах, в том числе к уравнениям Навье–Стокса [13–16].

## § 1. Инвариантные подпространства

Сведем систему Рэля с диффузией (0.1) к обыкновенному дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве  $H$  вектор-функций  $\mathbf{u} = (v, w)$ , компоненты которых принадлежат  $L_2(0, 1)$ . Скалярное произведение в  $H$  определяется стандартным образом:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_D (f_1 g_1^* + f_2 g_2^*) dx, \quad \mathbf{f}(x, t) = (f_1(x, t), f_2(x, t)), \quad \mathbf{g}(x, t) = (g_1(x, t), g_2(x, t)),$$

звездочкой обозначено комплексное сопряжение.

Пусть  $A(\mu): H \rightarrow H$  — линейный оператор, действующий на вектор-функцию  $\mathbf{u} = (v, w)$ , компоненты которой  $v, w$  принадлежат пространству Соболева  $W_2^2(0, 1)$  и удовлетворяют краевым условиям Неймана (0.3):

$$A(\mu)\mathbf{u} = \nu \mathbf{u}_{xx} + B\mathbf{u} + \mu C\mathbf{u}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть нелинейный оператор  $K(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}): H^3 \rightarrow H$  действует по правилу

$$K(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (0, a_2 b_2 c_2).$$

Тогда система (0.1) принимает вид

$$\dot{\mathbf{u}} = A(\mu)\mathbf{u} - K(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}). \tag{1.1}$$

Пусть  $\lambda_n = (\pi n)^2$  — собственные значения, а  $\psi_n = \sqrt{2} \cos(\pi n x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , — собственные функции оператора  $-\frac{d^2}{dx^2}$  при  $x \in (0, 1)$  с краевыми условиями Неймана на концах отрезка. Тогда вектор-функции  $\{\mathbf{e}_1\psi_n, \mathbf{e}_2\psi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ ,  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ , образуют ортогональный базис в пространстве  $H$ .

Наша цель — найти подпространства пространства  $H$ , инвариантные относительно линейного оператора  $A(\mu)$  и нелинейного оператора  $K$ , каждое из которых также можно рассматривать в качестве фазового пространства системы (1.1). Чтобы исключить пространственно-однородный случай, будем интересоваться подпространствами, элементы которых ортогональны единице. Так как образ оператора  $K$  содержит одну ненулевую компоненту, то нахождение инвариантных подпространств оператора  $K$  сводится к нахождению подпространств пространства  $L_2(0, 1)$ , инвариантных относительно тройного произведения элементов.

Пусть  $\Gamma$  — некоторое подмножество множества натуральных чисел. Через  $H_\Gamma$  будем обозначать подпространство пространства  $L_2(0, 1)$  с базисом  $\{\psi_i\}_{i \in \Gamma}$ .

**Теорема 1.** *Если  $0 \notin \Gamma$ ,  $1 \in \Gamma$  и функции  $f_i \in H_\Gamma \cap W_2^1(0, 1)$   $i = 1, 2, 3$ , то произведение  $f_1 f_2 f_3 \in H_\Gamma$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma = \{2n - 1, n \in N\}$ .*

**Доказательство.** По теоремам вложения Соболева  $f_i$  непрерывны на отрезке  $[0, 1]$ , следовательно, произведение  $f_1 f_2 f_3 \in L_2(0, 1)$ . Представим  $f_i$  в виде ряда по базису пространства  $L_2(0, 1)$ :  $f_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \psi_k(x)$ . Тогда по формуле произведения рядов

$$f_1 f_2 f_3 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^{i-j} a_{1j} a_{2l} a_{3(i-j-l)} (\cos(\pi i x) + \cos(\pi(i - 2j - 2l)x) + \cos(\pi(i - 2j)x) + \cos(\pi(i - 2l)x)).$$

Для того чтобы результирующее выражение не содержало  $\psi_0$ , необходимо, чтобы

$$i \neq 0, \quad -i + 2j + 2l \neq 0, \quad -i + 2j \neq 0, \quad -i + 2l \neq 0 \quad \forall i, j, l \in \Gamma.$$

Так как  $1 \in \Gamma$ , то  $\Gamma$  — множество нечетных чисел. □

Пусть  $k \in N$  фиксировано. Через  $\Gamma_k$  обозначим множество

$$\Gamma_k = \{k(2j - 1), j \in N\}. \tag{1.2}$$

Аналогично предыдущему доказывается следующее утверждение:

**Теорема 2.** *Если  $\{0, 1, \dots, k - 1\} \notin \Gamma$ ,  $k \in \Gamma$ , и функции  $f_i \in H_\Gamma \cap W_2^1(0, 1)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , то произведение  $f_1 f_2 f_3 \in H_\Gamma$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma = \Gamma_k$ .*

Так как оператор  $B$  осуществляет поворот плоскости на  $\frac{\pi}{2}$ , то для инвариантности оператора  $A(\mu)$  на некотором подпространстве  $H$  наборы базисных функций для первой и второй компонент вектор-функции  $\mathbf{u}$  должны совпадать.

**Теорема 3.** *Пусть  $\tilde{H}$  — некоторое подпространство  $H$ . Пусть ему отвечает набор базисных векторов вида  $\{\mathbf{e}_1\psi_i(x), \mathbf{e}_2\psi_j(x)\}$ ,  $i \in \Gamma$ ,  $j \in \Lambda$ . Тогда для инвариантности оператора  $A(\mu)$  на данном подпространстве необходимо и достаточно, чтобы  $\Gamma = \Lambda$ .*

Пусть  $k$  — фиксированное натуральное число,  $\Gamma_k$  определено в (1.2). Через  $H_k$  обозначим подпространство пространства  $H$  с базисом  $\{e_1\psi_i(x), e_2\psi_i(x)\}$ ,  $i \in \Gamma_k$ . Из доказанных утверждений вытекает, что правая часть системы Рэлея с диффузией (1.1) инвариантна на подпространствах  $H_k$ . Минимальным собственным значением оператора  $-\frac{d}{dx}$  на подпространстве  $H_k$  является  $\lambda_k = (\pi k)^2$  —  $k$ -ое собственное значение этого оператора на всем пространстве  $H$ . В дальнейшем будет удобно для пространства  $H$  применять также обозначение  $H_0$ , предполагая, что для  $H_0$  набор индексов базисных векторов совпадает с множеством неотрицательных чисел:  $\Gamma_0 = N \cup \{0\}$ .

## § 2. Линейный анализ устойчивости

Для нахождения критических значений параметра  $\mu$  на инвариантных подпространствах  $H_k$  с неотрицательным  $k$  рассмотрим линейную спектральную задачу

$$A(\mu)\varphi = \sigma\varphi, \quad \varphi \neq 0, \quad \varphi \in H_k. \quad (2.1)$$

**Определение 1.** *Критическим значением* параметра  $\mu$  будем называть такое значение  $\mu_{cr}^{(k)}$ , при котором спектр оператора  $A(\mu): H_k \rightarrow H_k$  лежит в замкнутой левой полуплоскости, причем существует хотя бы одно собственное значение  $\sigma$ , лежащее на мнимой оси.

**Определение 2.** Если спектр  $A(\mu_{cr}^{(k)})$  лежит в замкнутой левой полуплоскости комплексной плоскости, причем на мнимой оси лежит лишь нулевое собственное значение, то говорят, что имеет место *монотонная потеря устойчивости*.

**Определение 3.** Если спектр  $A(\mu_{cr}^{(k)})$  лежит в замкнутой левой полуплоскости комплексной плоскости, причем на мнимой оси лежит лишь пара комплексно-сопряженных собственных значений  $\pm i\omega_0$  ( $\omega_0 \neq 0$ ), то говорят, что происходит *колебательная потеря устойчивости*.

В случае монотонной потери устойчивости при переходе параметра через критическое значение, как правило, от основного (нулевого) решения ответвляются новые стационарные режимы. В случае колебательной потери устойчивости линеаризованная система имеет периодическое по  $t$  решение, и следует ожидать, что при  $\mu$ , близких к  $\mu_{cr}$ , существует периодическое по времени решение нелинейного уравнения.

Будем разыскивать собственные функции оператора  $A(\mu)$  в виде рядов по базису пространства  $H_k$ :

$$\varphi = \sum_{j \in \Gamma_k} \varphi_j \psi_j(x), \quad \varphi_j = (a_j, b_j) \in \mathbb{C}^2.$$

Подставляя данное выражение в систему, получим набор линейных систем с матрицами  $A_j(\mu)$

$$A_j(\mu)\varphi_j = \sigma\varphi_j, \quad A_j(\mu) = \begin{pmatrix} -\nu\lambda_j & 1 \\ -1 & -\nu\lambda_j + \mu \end{pmatrix}, \quad j \in \Gamma_k.$$

Характеристические полиномы для матриц  $A_j(\mu)$  имеют вид

$$\sigma^2 - \text{Tr}(A_j(\mu))\sigma + \text{Det}(A_j(\mu)) = 0,$$

где  $\text{Tr}(A_j(\mu)) = -2\nu\lambda_j + \mu$  и  $\text{Det}(A_j(\mu)) = (\nu\lambda_j - \mu)\nu\lambda_j + 1$ .

С учетом выражений для определителя и следа заключаем, что критическому значению параметра соответствует  $j = k$ , и выполняются соотношения

$$\text{Re}(\sigma_{1,2}^j(\mu)) < 0 \iff \begin{cases} \mu < 2\nu\lambda_k, \\ (\nu\lambda_k)\mu < (\nu\lambda_k)^2 + 1. \end{cases}$$

При  $\nu\lambda_k < 1$  обращению в ноль следа соответствует меньшее значение параметра  $\mu$ , чем обращению в ноль определителя, и происходит колебательная потеря устойчивости. Если же  $\nu\lambda_k \geq 1$ , то имеет место монотонная потеря устойчивости. Вырожденный случай  $\nu\lambda_k = 1$ , при котором возникает двукратное нулевое собственное значение  $\sigma$ , в настоящей работе не рассматривается.

Рассмотрим систему (1.1) на подпространстве  $H_k$  при фиксированном  $k \geq 0$ . При  $\nu\lambda_k < 1$  происходит колебательная потеря устойчивости,  $\mu_{cr}^{(k)} = 2\nu\lambda_k$ , собственные значения оператора  $A(\mu_{cr}^{(k)})$  имеют вид  $\sigma_{1,2} = \pm i\omega_0$ , а собственная функция, отвечающая  $i\omega_0$ , равна

$$\varphi = \frac{1}{\nu\lambda_k - 2i\omega_{0k}} \begin{pmatrix} 1 \\ \nu\lambda_k + i\omega_{0k} \end{pmatrix} \psi_k(x), \quad \omega_{0k} = \sqrt{1 - \nu^2\lambda_k^2}.$$

В частности, при  $k = 0$   $\mu_{cr}^{(0)} = 0$  при любых значениях коэффициента диффузии  $\nu$ , а соответствующая собственная функция  $\varphi$  не зависит от  $x$ .

Если  $k \neq 0$  и  $\nu\lambda_k > 1$ , то происходит монотонная потеря устойчивости, критическое значение параметра  $\mu$  и собственная функция находятся по формулам

$$\mu_{cr}^{(k)} = \frac{1}{\nu\lambda_k} + \nu\lambda_k, \quad \varphi = \frac{1}{1 + \nu\lambda_k} \begin{pmatrix} 1 \\ \nu\lambda_k \end{pmatrix} \psi_k(x).$$

Наряду с линейной спектральной задачей (2.1) рассмотрим линейную сопряженную задачу  $A^*(\mu_{cr}^{(k)})\Phi + i\omega_0\Phi = 0$ . При  $k \in N$  и  $\nu\lambda_k < 1$  находим

$$\Phi = \frac{1}{\nu\lambda_k + i\omega_{0k}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\nu\lambda_k + i\omega_{0k} \end{pmatrix} \psi_k(x).$$

Если  $\nu\lambda_k > 1$ , то собственная функция  $\Phi$  линейной сопряженной задачи  $A^*(\mu_{cr}^{(k)})\Phi = 0$  имеет вид

$$\Phi = \frac{1}{-\nu\lambda_k + 1} \begin{pmatrix} 1 \\ -\nu\lambda_k \end{pmatrix} \psi_k(x).$$

Во всех рассматриваемых случаях функции  $\varphi$  и  $\Phi$  нормированы таким образом, что выполняется условие  $(\varphi, \Phi) = 1$ .

### § 3. Автоколебания

Пусть система Рэлея с диффузией (1.1) рассматривается на инвариантном подпространстве  $H_k$ ,  $k \geq 0$ , и выполняется условие  $\nu\lambda_k < 1$ . Для нахождения вторичных периодических по времени решений введем в (1.1) замену времени  $\tau = \omega t$ , а через  $\varepsilon^2 = \mu - \mu_{cr}^{(k)}$  обозначим надкритичность. Тогда (1.1) примет вид

$$\omega \dot{\mathbf{u}} - A(\mu_{cr})\mathbf{u} = \varepsilon^2 C\mathbf{u} - K(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in H_k, \quad \mu_{cr} = \mu_{cr}^{(k)}, \quad (3.1)$$

точкой обозначено дифференцирование по  $\tau$ . Неизвестное  $2\pi$ -периодическое по  $\tau$  решение  $\mathbf{u}$  и неизвестную частоту  $\omega$  будем разыскивать в виде рядов по параметру  $\varepsilon$ :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{u}_i, \quad \omega = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \omega_i, \quad \omega_0 = \omega_{0k}. \quad (3.2)$$

Подставляя разложения (3.2) в (3.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , придем к цепочке уравнений

$$\varepsilon^1: \omega_0 \dot{\mathbf{u}}_1 - A(\mu_{cr})\mathbf{u}_1 = 0, \quad (3.3)$$

$$\varepsilon^2: \omega_0 \dot{\mathbf{u}}_2 - A(\mu_{cr})\mathbf{u}_2 = -\omega_1 \dot{\mathbf{u}}_1 \equiv \mathbf{f}_2, \quad (3.4)$$

$$\varepsilon^3: \omega_0 \dot{\mathbf{u}}_3 - A(\mu_{cr}) \mathbf{u}_3 = -\omega_1 \dot{\mathbf{u}}_2 - \omega_2 \dot{\mathbf{u}}_1 + C \mathbf{u}_1 - K(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) \equiv \mathbf{f}_3, \quad (3.5)$$

$$\varepsilon^4: \omega_0 \dot{\mathbf{u}}_4 - A(\mu_{cr}) \mathbf{u}_4 = -\omega_1 \dot{\mathbf{u}}_3 - \omega_2 \dot{\mathbf{u}}_2 - \omega_3 \dot{\mathbf{u}}_1 + C \mathbf{u}_2 - 3K(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \equiv \mathbf{f}_4, \quad (3.6)$$

$$\varepsilon^5: \omega_0 \dot{\mathbf{u}}_5 - A(\mu_{cr}) \mathbf{u}_5 = -\sum_{i=1}^4 \omega_{5-i} \dot{\mathbf{u}}_i + C \mathbf{u}_3 - 3K(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3) - 3K(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) \equiv \mathbf{f}_5, \quad (3.7)$$

$$\varepsilon^n: \omega_0 \dot{\mathbf{u}}_n - A(\mu_{cr}) \mathbf{u}_n = C \mathbf{u}_{n-2} - \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{n-i} \dot{\mathbf{u}}_i - \sum_{i_1+i_2+i_3=n} 31K(\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \mathbf{u}_{i_3}) \equiv \mathbf{f}_n. \quad (3.8)$$

В формуле (3.8) и далее будем предполагать, что индексы суммирования упорядочены по возрастанию:  $i_1 \leq i_2 \leq i_3$ .

Неоднородные уравнения (3.4)–(3.7) имеют  $2\pi$ -периодические по  $\tau$  решения тогда и только тогда, когда правая часть ортогональна решению однородного сопряженного уравнения

$$\int_0^{2\pi} (\mathbf{f}_n, \Phi) e^{-i\tau} d\tau = 0. \quad (3.9)$$

Если  $\mathbf{f}_n = 0$ , то решение уравнения имеет вид

$$\mathbf{u}_n = \alpha_n (\varphi e^{i\tau} + \varphi^* e^{-i\tau}), \quad \alpha_n > 0. \quad (3.10)$$

Последовательно решим уравнения (3.3)–(3.7). Решение уравнения (3.3) находим по формуле (3.10) при  $n = 1$ . Рассмотрев условие разрешимости (3.9) при  $n = 2$  с учетом условия  $\alpha_1 > 0$ , заключаем, что  $\omega_1 = 0$ . Следовательно, решение уравнения при  $\varepsilon^2$  (3.4) будет иметь вид (3.10) при  $n = 2$ .

Слагаемые в правой части уравнения при  $\varepsilon^3$  можно сгруппировать при степенях  $e^{i\tau}$ :

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_{13} e^{i\tau} + \mathbf{f}_{33} e^{3i\tau} + \text{с.с.}, \quad (3.11)$$

где  $\mathbf{f}_{13} = (\alpha_1 C \varphi - 3\alpha_1^3 K(\varphi, \varphi, \varphi^*) - i\omega_2 \dot{\mathbf{u}}_1)$ ,  $\mathbf{f}_{33} = e^{3i\tau}$ , а символом «с.с.» обозначено выражение, комплексно-сопряженное к данному. Тогда условие разрешимости (3.9) при  $n = 3$  принимает вид  $2\pi(\mathbf{f}_{13}, \Phi) = 0$ . Отделяя вещественную и мнимую части, находим  $\omega_2 = 0$ ,  $\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,

если  $k = 0$ , и  $\alpha_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3}\omega_0$ , если  $k > 0$ .

Говорят, что имеет место мягкая потеря устойчивости, если при переходе через критическое значение параметра равновесие теряет устойчивость и при малых  $\mu > \mu_{cr}^{(k)}$  существует устойчивый предельный цикл. Если же отвечающий цикл существует при  $\mu < \mu_{cr}^{(k)}$  (в докритической области значений параметра) и неустойчив, то имеет место жесткая потеря устойчивости. Тип потери устойчивости зависит от знака правой части в выражении коэффициента  $\alpha_1^2$  [11]. Из (3.11)  $\alpha_1^2 > 0$ , и происходит мягкая потеря устойчивости.

Частное периодическое решение неоднородного уравнения (3.5) можно записать в виде

$$\mathbf{u}_3^p(\tau) = \mathbf{w}_{13} e^{i\tau} + \mathbf{w}_{33} e^{3i\tau} + \text{с.с.} \quad (3.12)$$

Если  $k > 0$ , то имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{13}(x) &= \frac{2}{9}(\nu(\pi k)^2 - i\omega_0) \mathbf{P}_3^1 \cos(3\pi kx), \\ \mathbf{w}_{33}(x) &= \frac{2}{9}(\nu(\pi k)^2 - i\omega_0)^3 (\mathbf{P}_1^3 \cos(\pi kx) + \frac{2}{27} \mathbf{P}_3^3 \cos(3\pi kx)), \end{aligned}$$

где выражения для  $\mathbf{P}_3^1$ ,  $\mathbf{P}_1^3$  и  $\mathbf{P}_3^3$  совпадают с явно найденными в работе [9] формулами для краевых условий Дирихле. Если же  $k = 0$ , то  $\mathbf{w}_{13} = 0$  и  $\mathbf{w}_{33} = \frac{i}{24\sqrt{3}}(1, 3i)$ .

Тригонометрический полином будем называть нечетным (четным), если он содержит лишь нечетные (четные) гармоники, то есть гармоники вида  $e^{(2n+1)i\tau}$  ( $e^{2ni\tau}$ ). Очевидно, что  $\mathbf{u}_3^p(\tau)$  — нечетный тригонометрический полином третьей степени.

Решение уравнения при  $\varepsilon^3$  (3.5) будет иметь вид

$$\mathbf{u}_3 = \alpha_3(\varphi e^{i\tau} + \varphi^* e^{-i\tau}) + \mathbf{u}_3^p(\tau),$$

$\alpha_3$  определяется из условия разрешимости уравнения при  $\varepsilon^5$ . Из условия разрешимости уравнения (3.6) выводим, что  $\alpha_2 = 0, \omega_3 = 0$ . Следовательно, правая часть уравнения при  $\varepsilon^4$  равна нулю и  $2\pi$ -периодическое решение уравнения (3.6) будет иметь вид (3.10) при  $n = 4$ .

Рассмотрим теперь условие разрешимости уравнения при  $\varepsilon^5$  (3.7). Проводя вычисления, приходим к выражению

$$\alpha_3 - i \frac{\nu \lambda_k}{\omega_0} + i \alpha_1 \omega_4 = -3\alpha_1^2(2(K(\varphi, \varphi^*, \mathbf{w}_{13}), \Phi) + (K(\varphi, \varphi, (\mathbf{w}_{13})^*), \Phi) + (K(\varphi^*, \varphi^*, \mathbf{w}_{33}), \Phi)) = -\left(\frac{2}{27}P_1^3 + \frac{2}{27}(P_1^3)^* + \frac{1}{9}P_3^1 + \frac{1}{81}P_3^3\right) \equiv h_5.$$

Отделяя вещественную и мнимую части, получаем выражения для определения  $\alpha_3$  и  $\omega_4$ :

$$\left[ \begin{array}{ll} \alpha_3 = 0, & \omega_4 = \frac{1}{16}, \quad \text{если } k = 0; \\ \alpha_3 = \text{Re}(h_5), & \omega_4 = \frac{1}{\alpha_1}(\text{Im}(h_5) + \frac{\nu \lambda_k}{\omega_0} \alpha_3), \quad \text{если } k > 0. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

**Теорема 4.** В системе Рэля с диффузией (1.1) происходит мягкая потеря устойчивости нулевого равновесия, и при малых  $\varepsilon > 0$  в ней присутствует устойчивый предельный цикл. Первые члены асимптотики вторичного  $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодического решения имеют вид

$$\mathbf{u} = \varepsilon \alpha_1 (e^{i\omega t} \varphi + e^{-i\omega t} \varphi^*) + \varepsilon^3 (\alpha_3 (e^{i\omega t} \varphi + e^{-i\omega t} \varphi^*) + \mathbf{u}_3^p(\omega t)) + O(\varepsilon^4), \\ \omega = \omega_0 + \varepsilon^4 \omega_4 + O(\varepsilon^5).$$

Здесь  $\alpha_1, \mathbf{u}_3^p, \alpha_3, \omega_4$  задаются выражениями (3.12) и (3.13).

Для  $n \geq 5$  уравнение при  $\varepsilon^n$  может быть записано в виде (3.8). По индукции доказывается следующая теорема.

**Теорема 5.** Четные компоненты асимптотического разложения вторичного периодического решения и нечетные компоненты циклической частоты  $\omega$  равны нулю: для всякого  $k \in \mathbb{N}$   $\mathbf{u}_{2k} = 0, \alpha_{2k} = 0, \omega_{2k-1} = 0$ .

Из теоремы 5 следует, что для нечетных  $n$  уравнение (3.8) может быть записано в виде

$$\omega_0 \dot{\mathbf{u}}_n - A(\mu_{cr}) \mathbf{u}_n = C \mathbf{u}_{n-2} - \sum_{i=1}^{n-4} \omega_{n-i} \dot{\mathbf{u}}_i - \sum_{i_1+i_2+i_3=n} 3K(\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \mathbf{u}_{i_3}), \quad (3.14)$$

причем в сумме, стоящей в правой части (3.14), индексы суммирования нечетны.

Найдем нечетные члены разложения амплитуды автоколебаний и четные компоненты циклической частоты  $\omega$ . Рассмотрим уравнение при  $\varepsilon^n$  (3.14) в случае нечетного  $n \geq 5$ . Будем предполагать, что  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-3}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-2}, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-2}$  уже известны. Преобразовав правую часть уравнения (3.14), придем к представленной ниже теореме.

**Теорема 6.** Амплитуда  $\alpha_{n-2}$  и компонента циклической частоты  $\omega_{n-1}$  определяются из условия разрешимости уравнения (3.14) по формулам

$$\alpha_{n-2} = \text{Re}(h_n), \quad \omega_{n-1} = \frac{1}{\alpha_1}(\text{Im}(h_n) + \frac{\nu \lambda_k}{\omega_0} \alpha_{n-2}),$$

где

$$h_n = \int_0^{2\pi} (\mathbf{g}_n, \Phi) e^{-i\tau} d\tau, \quad \mathbf{g}_n = C(\mathbf{u}_{n-2}^p) - 3K(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{n-2}^p) - \\ - \sum_{i=3}^{n-4} \omega_{n-i} \dot{\mathbf{u}}_i - \sum_{i_1+i_2+i_3=n} 3K(\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \mathbf{u}_{i_3}), \quad (i_1, i_2, i_3) \neq (1, 1, n-2),$$

а через  $\mathbf{u}_{n-2}^p$  обозначено частное решение неоднородного уравнения при  $n-2$  степени.

Для нечетных  $n \in \mathbb{N}$  рассмотрим конечное множество индексов  $\Gamma_{k,n}$  вида

$$\Gamma_{k,n} = \{j \in \Gamma_k : j \leq kn\}.$$

**Теорема 7.** Пусть система Рэлея с диффузией рассматривается на инвариантном подпространстве  $H_k$  и  $k > 0$ . Рассмотрим уравнение (3.14) в случае нечетного  $n \geq 5$ . Тогда правая часть этого уравнения представляет собой нечетный тригонометрический полином степени  $n$  по  $\tau$ :

$$\omega_0 \dot{\mathbf{u}}_n - A(\mu_{cr}) \mathbf{u}_n = \mathbf{f}_{1n}(x)e^{i\tau} + \mathbf{f}_{3n}(x)e^{3i\tau} + \dots + \mathbf{f}_{nn}(x)e^{in\tau} + c.c., \quad \mathbf{f}_{sn}(x) \in H_k, \quad (3.15)$$

причем функции  $\mathbf{f}_{sn}(x)$  представляют собой линейные комбинации базисных функций  $\psi_j$  с индексами  $j \in \Gamma_{k,n}$ . Общее решение уравнения (3.15) имеет вид

$$\mathbf{u}_n = \alpha_n \boldsymbol{\varphi} e^{i\tau} + \mathbf{w}_{1n}(x)e^{i\tau} + \dots + \mathbf{w}_{nn}(x)e^{in\tau} + c.c., \quad \mathbf{w}_{sn}(x) = -(A - is\omega_0 I)^{-1} \mathbf{f}_{sn}(x), \quad (3.16)$$

где функции  $w_{sn}(x)$  также представляют собой линейные комбинации базисных функций  $\psi_j$  с индексами  $j \in \Gamma_{k,n}$ .

**Доказательство.** Для доказательства данного утверждения нам необходимо показать, что  $\mathbf{f}_{sn}(x)$  представимы в виде

$$\mathbf{f}_{sn}(x) = \sum_{j \in \Gamma_{k,n}} \mathbf{C}_j^s \psi_j(x), \quad \mathbf{C}_j^s \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}. \quad (3.17)$$

Заметим, что отсюда будет следовать, что и  $w_{sn}(x)$  имеют требуемый вид. Прежде всего отметим, что  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_3$  уже имеют вид (3.16). Рассмотрим уравнение (3.14) в случае нечетного  $n \geq 5$  и предположим, что  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-2}$  имеют вид (3.16). Так как первые два слагаемых в правой части уравнения (3.14) —  $C\mathbf{u}_{n-2}$  и  $\omega_{n-1}\dot{\mathbf{u}}_1$  — очевидно, имеют нужную форму, остается показать, что и последний член  $\sum K(\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \mathbf{u}_{i_3})$  представим в виде (3.17). Для этого рассмотрим произвольный член этой суммы  $K(\mathbf{u}_{n_1}, \mathbf{u}_{n_2}, \mathbf{u}_{n_3})$ . Так как  $n_1 + n_2 + n_3 = n$ , то члены  $\mathbf{u}_{n_j}$  можно записать в виде

$$\mathbf{u}_{n_j} = \mathbf{z}_{1n_j}(x)e^{i\tau} + \mathbf{z}_{3n_j}(x)e^{3i\tau} + \dots + \mathbf{z}_{n_j n_j}(x)e^{in_j\tau},$$

где  $\mathbf{z}_{1n_j}(x) = \alpha_{n_j} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{w}_{1n_j}(x)$  и  $\mathbf{z}_{in_j}(x) = \mathbf{w}_{in_j}(x)$ , причем  $\mathbf{z}_{in_j}(x)$  имеют вид (3.17). А тогда

$$K(\mathbf{u}_{n_1}, \mathbf{u}_{n_2}, \mathbf{u}_{n_3}) = \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \sum_{q=1}^{n_3} K(\mathbf{z}_{jn_1}(x), \mathbf{z}_{ln_2}(x), \mathbf{z}_{qn_3}(x))e^{i(j+l+q)\tau} + c.c.,$$

причем индексы  $j, l, m$  пробегает только нечетные значения. Заметим, что показатель экспоненты  $j + l + m$  будет также нечетным, так как является суммой трех нечетных чисел. Далее, с учетом формулы (3.17) мы имеем

$$K(\mathbf{z}_{jn_1}(x), \mathbf{z}_{ln_2}(x), \mathbf{z}_{qn_3}(x)) = \sum_{p,r,s} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \tilde{C}_{prs} (\psi_{(p+r-s)} + \psi_{(-p+r+s)} + \psi_{(p-r+s)} + \psi_{(p+r+s)}) \end{pmatrix},$$

где  $p \in \Gamma_{k,n_1}, r \in \Gamma_{k,n_2}, s \in \Gamma_{k,n_3}$  и  $\tilde{C}_{prs} \in \mathbb{C}$ . Заметим, что при разложении произведения функций  $\psi_p \psi_r \psi_s$  в сумму в результате получаются функции с индексами, принадлежащими  $\Gamma_{k,n}$ . Также ясно, что  $p + r + s \leq n$ . Следовательно,  $K(\mathbf{u}_{k_1}, \mathbf{u}_{k_2}, \mathbf{u}_{k_3})$  имеет вид (3.17). А тогда вся правая часть уравнения (3.14) может быть представлена в виде (3.17).  $\square$

**Следствие 1.** Выражения для  $w_{sn}(x)$  в формуле (3.16) имеют вид

$$\mathbf{w}_{sn}(x) = - \sum_{j \in \Gamma_{k,n}} \mathbf{P}_j^s \psi_j(x), \quad \mathbf{P}_j^s = (C_{j_1}^1 \mathbf{e}_1 + C_{j_2}^2 \mathbf{e}_2),$$



причем компоненты вектора  $(C_{js}^1; C_{js}^2)$  определяются по формуле

$$C_{js}^1 = (f_{sn}^{j2} - f_{sn}^{j1}(\mu_{cr}^{(k)} - R_j^s)) \frac{(F_j^s)^*}{|F_j^s|^2}, \quad C_{js}^2 = f_{sn}^{j1} + R_j^s C_{js}^1, \quad f_{sn}^{jm} = (\mathbf{f}_{sn}(x), \mathbf{e}_m \psi_j), \quad (3.18)$$

где  $R_j^s = \nu \lambda_j + is\omega_0$ ,  $F_j^s = (\mu_{cr}^{(k)} - R_j^s)R_j^s - 1$  при  $s \neq 1, j \neq k$ . В случае когда  $s = 1, j = k$ ,  $C_{1k}^1 = 0, C_{1k}^2 = f_{1n}^{k1}$ .

Выражения для коэффициентов  $(C_{js}^1; C_{js}^2)$  совпадают с формулами, найденными в работе [9] для краевых условий Дирихле.

**Теорема 8.** Пусть  $k = 0$ . Рассмотрим уравнение при  $\varepsilon^n$  (3.14). Обозначим через  $\mathcal{A}_1$  множество всех нечетных чисел  $m \geq 5$ , т. е.  $\mathcal{A}_1 = \{m = 2s - 1, s \geq 3\} \subset \Gamma_1$ . Пусть  $n \in \mathcal{A}_1$ . Тогда для уравнения при  $\varepsilon^n$  (3.14) справедливы следующие соотношения.

1. Правая часть уравнения (3.14) представляет собой нечетный тригонометрический полином по времени степени  $n$ :

$$\omega_0 \dot{\mathbf{u}}_n - A(\mu_{cr}) \mathbf{u}_n = \mathbf{f}_{1n} e^{i\tau} + \mathbf{f}_{3n} e^{3i\tau} + \dots + \mathbf{f}_{nn} e^{in\tau} + c.c.$$

2.  $2\pi$ -периодическое по времени решение уравнения (3.14) является нечетным тригонометрическим полиномом по времени степени  $n$ :

$$\mathbf{u}_n = \alpha_n \boldsymbol{\varphi} e^{i\tau} + \mathbf{w}_{1n} e^{i\tau} + \dots + \mathbf{w}_{nn} e^{in\tau} + c.c., \quad \mathbf{w}_{sn} = -(A(\mu_{cr}) - is\omega_0 I)^{-1} \mathbf{f}_{sn}. \quad (3.19)$$

3. Показатели  $\alpha_{n-2}$  и компоненты циклической частоты  $\omega_{n-1}$  попеременно обращаются в ноль на элементах  $n \in \mathcal{A}_1$ , то есть имеет место следующая закономерность:

- при  $n = 5, 9, 13, \dots$   $\mathbf{f}_{sn} = (iR_{ns}^1, R_{ns}^2), R_{ns}^{1,2} \in \mathbb{R}, \alpha_{n-2} = 0$ ;
- при  $n = 7, 11, 15, \dots$   $\mathbf{f}_{kn} = (R_{ns}^1, iR_{ns}^2), R_{ns}^{1,2} \in \mathbb{R}, \omega_{n-1} = 0$ .

**Следствие 2.** Выражения для  $\mathbf{w}_{sn}(x)$  в формуле (3.19) являются частным случаем формулы (3.18) при  $k = j = 0$ .

#### § 4. Стационарные решения

Теперь рассмотрим случай монотонной потери устойчивости ( $\nu \lambda_k > 1$ ) и найдем вторичные стационарные решения на подпространствах  $H_k$  при фиксированном натуральном  $k$ . Положив в (3.1)  $\omega = 0$ , приходим к уравнению для нахождения стационарных решений. Неизвестное стационарное решение  $\mathbf{u}$  будем разыскивать в виде ряда по параметру  $\varepsilon$  (3.2). Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , вновь придем к цепочке уравнений (3.3)–(3.8), где  $\omega_i = 0, i = 0, 1, \dots$ . Условие разрешимости (3.9) заменится на следующее равенство:

$$(\mathbf{f}_n, \Phi) = 0. \quad (4.1)$$

Стационарные решения однородных уравнений (3.3)–(3.8) можно представить в виде

$$\mathbf{u}_n = \alpha_n \boldsymbol{\varphi}. \quad (4.2)$$

Условие разрешимости (4.1) при  $n = 2$  примет вид

$$(\mathbf{f}_3, \Phi) = (C\mathbf{u}_1, \Phi) - (K(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1), \Phi) = 0.$$

Проводя необходимые вычисления, находим  $\alpha_1^2$ :

$$\alpha_1^2 = \frac{(C\boldsymbol{\varphi}, \Phi)}{(K(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}), \Phi)} = \frac{2(\pi^2 \nu k^2 + 1)^2}{3(\pi^2 \nu k^2)^2}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что  $\alpha_1^2 > 0$ ; следовательно, вторичное стационарное решение ответвляется при положительном значении параметра  $\varepsilon$  и будет устойчивым, то есть в системе имеет место мягкая потеря устойчивости (см. [11]).

Частное решение неоднородного уравнения (3.5) можно записать в виде

$$\mathbf{u}_3^p = \left( \begin{array}{c} \frac{\sqrt{3}}{36s} \\ \frac{\sqrt{3}\pi^2\nu k^2}{4s} \end{array} \right) \cos(3\pi kx),$$

где  $s = 9\pi^4\nu^2k^4 - 1$ .

Общее решение уравнения при  $\varepsilon^3$  (3.5) будет иметь вид  $\mathbf{u}_3 = \alpha_3\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{u}_3^p$ , где  $\alpha_3$  определяется из условия разрешимости уравнения при  $\varepsilon^5$ . Из условия разрешимости (4.1) при  $n = 4$  выводим, что  $\alpha_2 = 0$ . Следовательно, правая часть уравнения при  $\varepsilon^4$  равна нулю, и решение уравнения (3.6) будет иметь вид (4.2) при  $n = 4$ .

Рассмотрим теперь условие разрешимости (4.1) при  $n = 5$ . Проводя вычисления, приходим к выражению

$$(\mathbf{f}_5, \boldsymbol{\Phi}) = ((C\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\Phi}) - 3\alpha_1^2(K(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\Phi}))\alpha_3 - 3\alpha_1^2(K(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}_3^p), \boldsymbol{\Phi}) = 0.$$

Отсюда получаем выражение для определения  $\alpha_3$ :

$$\alpha_3 = -\frac{3(K(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}_3^p), \boldsymbol{\Phi})}{2(C\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\Phi})} = -\sqrt{\frac{3\pi^2\nu k^2 + 1}{2 \cdot 8s}}.$$

**Теорема 9.** В системе Рэлея с диффузией (1.1) происходит мягкая потеря устойчивости нулевого равновесия, и при малых  $\varepsilon > 0$  в ней присутствует устойчивое стационарное решение. Первые члены асимптотики вторичного решения имеют вид

$$\mathbf{u} = \pm\varepsilon \left( \begin{array}{c} \frac{2\sqrt{3}}{3\pi^2\nu k^2} \\ \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{array} \right) \cos(\pi kx) \pm \varepsilon^3 \left( \left( \begin{array}{c} -\frac{\sqrt{3}}{8s} \\ -\frac{\sqrt{3}\pi^2\nu k^2}{8s} \end{array} \right) \cos(\pi kx) + \left( \begin{array}{c} \frac{\sqrt{3}}{36s} \\ \frac{\sqrt{3}\pi^2\nu k^2}{4s} \end{array} \right) \cos(3\pi kx) \right) + O(\varepsilon^4).$$

Для  $n \geq 5$  уравнение при  $\varepsilon^n$  может быть записано в виде (3.8) при  $\omega_i = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots$ . По индукции доказывается утверждение.

**Теорема 10.** Четные компоненты асимптотического разложения вторичного стационарного решения равны нулю: для всякого  $s \in \mathbb{N}$   $\mathbf{u}_{2s} = 0$ ,  $\alpha_{2s} = 0$ .

Из теоремы 10 следует, что для нечетных  $n$  уравнение (3.8) может быть записано в виде

$$-A(\mu_{cr})\mathbf{u}_n = C\mathbf{u}_{n-2} - \sum_{i_1+i_2+i_3=n} 3K(\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \mathbf{u}_{i_3}) \equiv \mathbf{f}_n, \quad (4.3)$$

причем в сумме, стоящей в правой части (4.3), индексы  $i_1, i_2, i_3$  нечетны.

Теперь найдем нечетные члены разложения. Рассмотрим уравнение при  $\varepsilon^n$  (4.3) в случае нечетного  $n \geq 5$ . Будем предполагать, что  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-3}$ ,  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-2}$  уже известны. Преобразовав правую часть уравнения (4.3), докажем представленную ниже теорему.

**Теорема 11.** Амплитуда  $\alpha_{n-2}$  определяется из условия разрешимости уравнения (4.3) по формуле

$$\alpha_{n-2} = -\frac{3(\mathbf{g}_n, \boldsymbol{\Phi})}{2(C\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\Phi})},$$

где

$$\mathbf{g}_n = K(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{n-2}^p) + \sum_{i_1+i_2+i_3=n} K(\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \mathbf{u}_{i_3}), \quad (i_1, i_2, i_3) \neq (1, 1, n-2),$$

а через  $\mathbf{u}_{n-2}^p$  обозначено частное решение неоднородного уравнения при  $n-2$  степени.

Доказательство. Запишем условие разрешимости для уравнения (4.3):

$$(C\mathbf{u}_{n-2}, \Phi) - \left( \sum_{i_1+i_2+i_3=n} 3K(\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \mathbf{u}_{i_3}), \Phi \right) = 0.$$

Выделив отдельно члены, содержащие неизвестную величину  $\alpha_{n-2}$ , и учитывая, что в силу выполнения условия разрешимости для уравнения при  $n - 2$  степени  $(C\mathbf{u}_{n-2}^p, \Phi) = 0$ , получим

$$\alpha_{n-2} ((C\varphi, \Phi) - 3\alpha_1^2 (K(\varphi, \varphi, \varphi), \Phi)) = -(3K(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{n-2}^p) + \sum_{i_1+i_2+i_3=n} 3K(\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \mathbf{u}_{i_3}), \Phi),$$

где  $(i_1, i_2, i_3) \neq (1, 1, n - 2)$ .

Преобразовав левую часть данного равенства, получим выражение, в правой части которого стоит  $\mathbf{g}_n$ :

$$-2\alpha_{n-2}(C\varphi, \Phi) = -3((K(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{n-2}^p) + \sum_{i_1+i_2+i_3=n} K(\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \mathbf{u}_{i_3}), \Phi)), (i_1, i_2, i_3) \neq (1, 1, n - 2).$$

□

**Теорема 12.** Пусть система Рэля с диффузией рассматривается на инвариантном подпространстве  $H_k$  и  $k > 0$ . Рассмотрим уравнение (3.14) в случае нечетного  $n \geq 5$ . Тогда в выражениях (4.3) и (4.4) компоненты вектор-функций  $\mathbf{f}_n(x)$  и  $\mathbf{u}_n^p(x)$  представляют собой линейные комбинации базисных функций  $\psi_j$  с индексами  $j \in \Gamma_{k,n}$ .

**Следствие 3.** Рассмотрим уравнение (4.3). Тогда выражение для его частного решения  $\mathbf{u}_n^p$  имеет вид

$$\mathbf{u}_n^p = \sum_{j \in \Gamma_{k,n} \setminus \{k\}} (a_j \mathbf{e}_1 + b_j \mathbf{e}_2) \psi_j(x), \tag{4.4}$$

где коэффициенты  $(a_j, b_j)$  определяются по формуле

$$a_j = \frac{b_j}{\nu \lambda_j} = \frac{f_{jn}^2}{\left( \nu \lambda_k - \nu \lambda_j + \frac{1}{\nu \lambda_k} - \frac{1}{\nu \lambda_j} \right) \nu \lambda_j}, \quad b_j = \frac{f_{jn}^2}{\nu \lambda_k - \nu \lambda_j + \frac{1}{\nu \lambda_k} - \frac{1}{\nu \lambda_j}}, \tag{4.5}$$

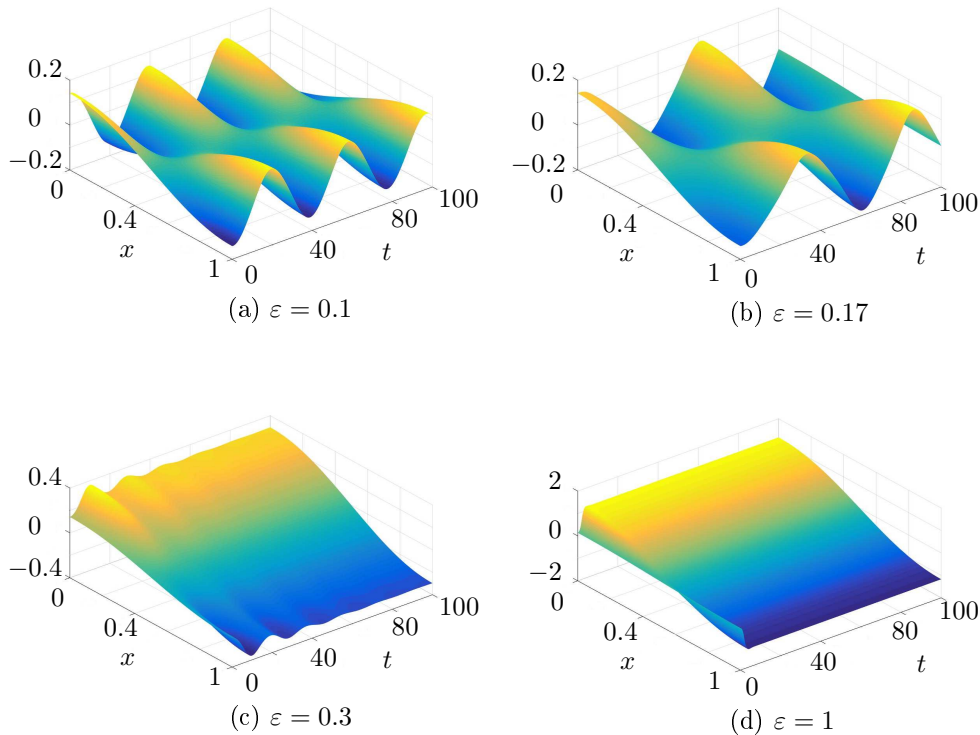
причем знаменатели в выражениях (4.5) отличны от нуля, так как  $\forall j \neq k \lambda_j > \lambda_k$ .

### § 5. Численное исследование бифуркационного поведения системы на подпространствах

Эволюция вторичных решений при увеличении параметра  $\mu$  была исследована численно. Для интегрирования системы применен метод Галёркина, что позволило сохранить свойства инвариантности на подпространствах  $H_k$  у дискретизации оператора  $K(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ .

Зафиксируем значение коэффициента диффузии  $\nu = 0.1$  и вычислим первые члены последовательности критических значений параметра  $\mu_{cr}^k$ . Они имеют вид  $\mu_{cr}^1 \approx 1.9739$ ,  $\mu_{cr}^2 \approx 4.2011$ ,  $\mu_{cr}^3 = 8.9952$ . Начиная с  $k^* = 2$  на подпространствах  $H_k$  будет происходить монотонная потеря устойчивости, и от нулевого решения системы (1.1) будет ответвляться вторичное устойчивое стационарное решение.

Зафиксируем значение управляющего параметра  $\mu = \mu_{cr}^1 + \varepsilon^2$  и исследуем поведение системы при изменении  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon = 0.1$  в системе наблюдается пространственно-неоднородный автоколебательный режим. Этот режим является устойчивым (численно) по отношению к малым возмущениям, принадлежащим  $H_1$ . Добавление других возмущений приводит к сходимости к пространственно-однородному автоколебательному режиму (принадлежащему пространству  $H_0$ ). Для значений управляющего параметра  $\mu < \mu_{cr}^1$  решение сходится к тривиальному



**Рис. 1.** Вторая компонента численного решения системы при различных значениях  $\epsilon$ . Параметры системы:  $\nu = 0.1$ ,  $\mu_{cr}^{(1)} = 1.97392$ . Начальные данные:  $v_0(x) = w_0(x) = 0.1 \cos(\pi x)$

нулевому решению. При увеличении значений надкритичности вторичный автоколебательный режим постепенно (при  $\epsilon \sim 0.2$ ) сменяется стационарным решением (см. рис. 1).

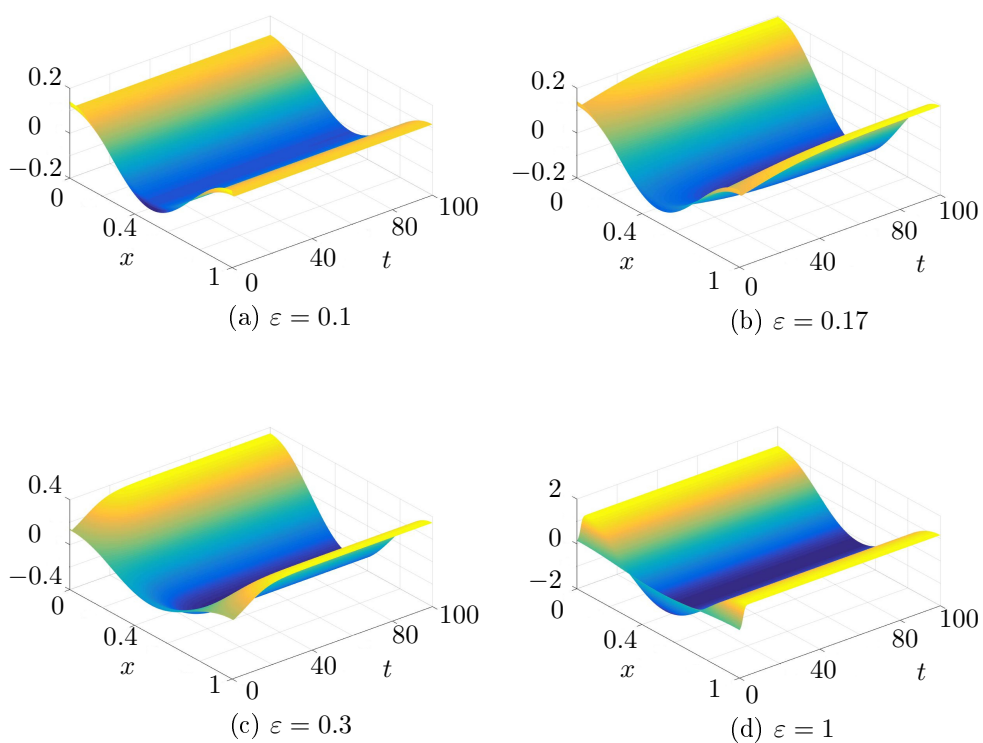
Теперь зафиксируем значение  $\mu$  равным  $\mu = \mu_{cr}^2 + \epsilon^2$  и проделаем те же эксперименты. Так как  $\nu\lambda_2 \sim 3.9478 > 1$ , то в системе наблюдается пространственно-неоднородное стационарное решение, принадлежащее пространству  $H_2$  (рис. 2). На последующих подпространствах процесс ответвления вторичных решений происходит аналогичным образом.

Эволюция профилей стационарных решений при увеличении значений надкритичности проиллюстрирована на рис. 3. Амплитуда вторичных решений растет с увеличением  $\epsilon$  (причем  $\max_{x \in [0,1]} |w(x,t)| \sim \epsilon$ ), а профиль асимптотически стремится к режиму меандра (квадратной волны) — периодическому режиму прямоугольной формы.

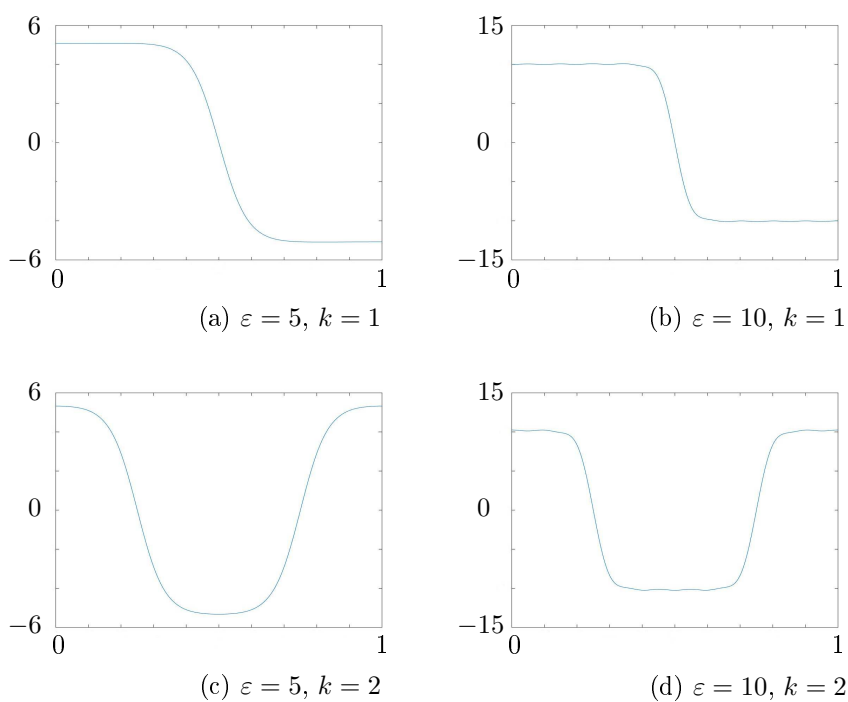
## § 6. Заключение

Если рассмотреть систему Рэля с диффузией на интервале  $x \in [0, 1]$ , на концах которого заданы однородные краевые условия Неймана, то при положительных значениях  $\mu$  в ней присутствует устойчивый пространственно-однородный автоколебательный режим. У системы Рэля с диффузией существует счетное число бесконечномерных инвариантных подпространств  $H_k$ , каждое из которых может быть рассмотрено в качестве фазового пространства системы. При  $\mu \leq \mu_{cr}^{(1)}$  нулевое положение равновесия системы устойчиво в  $H_1$ . Применив метод Ляпунова–Шмидта, убеждаемся, что при малых  $\mu > \mu_{cr}^{(1)}$  существует устойчивое в  $H_1$  вторичное решение. Если  $\nu\lambda_1 < 1$ , то  $\mu_{cr}^{(1)} = 2\nu\lambda_1$ , и происходит бифуркация рождения цикла; если  $\nu\lambda_1 \geq 1$ , то  $\mu_{cr}^{(1)} = \frac{1}{\nu\lambda_1} + \nu\lambda_1$ , и рождается нетривиальное стационарное решение.

При  $\mu \leq \mu_{cr}^{(2)}$  нулевое положение равновесия устойчиво в  $H_2$ . При малых  $\mu > \mu_{cr}^{(2)}$  существует устойчивое в  $H_2$  вторичное решение, которое является нетривиальным стационарным решением или циклом (в зависимости от того, превосходит ли  $\nu\lambda_2$  единицу или нет).



**Рис. 2.** Вторая компонента численного решения системы при различных значениях  $\varepsilon$ . Параметры системы:  $\nu = 0.1, \mu_{cr}^{(2)} = 4.20114$ . Начальные данные:  $v_0(x) = w_0(x) = 0.1 \cos(2\pi x)$



**Рис. 3.** Профили второй компоненты решения системы при различных значениях  $\varepsilon$

Продолжая этот процесс, заключаем, что на каждом из инвариантных подпространств  $H_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  ответвляющиеся вторичные решения устойчивы при малых  $\mu > \mu_{cr}^k$ . Асимптотика вторичных решений построена методом Ляпунова–Шмидта. Среди этих вторичных решений может быть лишь конечное число циклов. Начиная с некоторого  $k_*$ , которое задается условием  $\nu\lambda_{k_*} \geq 1$ , от нулевого равновесия ответвляются нетривиальные стационарные режимы.

При увеличении значений надкритичности вторичные автоколебательные режимы сменяются стационарными. Амплитуда решений растет по мере увеличения  $\varepsilon$ , а профиль асимптотически стремится к режиму квадратной волны.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Turing A.M. The chemical basis of morphogenesis // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. B. 1952. Vol. 237. Issue 641. P. 37–72. DOI: [10.1098/rstb.1952.0012](https://doi.org/10.1098/rstb.1952.0012)
2. Szalai I., De Kepper P. Pattern formation in the ferrocyanide-iodate-sulfite reaction: the control of space scale separation // Chaos. 2008. Vol. 18. Issue 2. P. 026105. DOI: [10.1063/1.2912719](https://doi.org/10.1063/1.2912719)
3. Upadhyay R.K., Roy P., Datta J. Complex dynamics of ecological systems under nonlinear harvesting: Hopf bifurcation and Turing instability // Nonlinear dynamics. 2014. Vol. 79. Issue 4. P. 2251–2270. DOI: [10.1007/s11071-014-1808-0](https://doi.org/10.1007/s11071-014-1808-0)
4. Tang X., Song Y., Zhang T. Turing–Hopf bifurcation analysis of a predator–prey model with herd behavior and cross-diffusion // Nonlinear dynamics. 2016. Vol. 86. Issue 1. P. 73–89. DOI: [10.1007/s11071-016-2873-3](https://doi.org/10.1007/s11071-016-2873-3)
5. Fitzhugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophysical journal. 1961. Vol. 1. Issue 6. P. 445–466. DOI: [10.1016/S0006-3495\(61\)86902-6](https://doi.org/10.1016/S0006-3495(61)86902-6)
6. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proceedings of the IRE. 1962. Vol. 50. Issue 10. P. 2061–2070. DOI: [10.1109/JRPROC.1962.288235](https://doi.org/10.1109/JRPROC.1962.288235)
7. Zhang Q., Tian C. Pattern dynamics in a diffusive Rössler model // Nonlinear dynamics. 2014. Vol. 78. Issue 2. P. 1489–1501. DOI: [10.1007/s11071-014-1530-y](https://doi.org/10.1007/s11071-014-1530-y)
8. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. Exact solutions and invariant subspaces on nonlinear partial differential equations in mechanics and physics. New York: CRC Press, 2006. 528 p. DOI: [10.1201/9781420011623](https://doi.org/10.1201/9781420011623)
9. Казарников А.В., Ревина С.В. Возникновение автоколебаний в системе Рэля с диффузией // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2016. Т. 9. № 2. С. 16–28. DOI: [10.14529/mmp160202](https://doi.org/10.14529/mmp160202)
10. Казарников А.В., Ревина С.В. Асимптотика стационарных решений системы Рэля с диффузией // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2016. № 3 (191). С. 13–19. DOI: [10.18522/0321-3005-2016-3-13-19](https://doi.org/10.18522/0321-3005-2016-3-13-19)
11. Юдович В.И. Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима // Прикладная математика и механика. 1972. Т. 36. № 3. С. 450–459.
12. Козицкий С.Б. Модель трехмерной бездиффузионной конвекции с ячейками произвольной формы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 4. С. 46–61. DOI: [10.20537/vm120404](https://doi.org/10.20537/vm120404)
13. Ревина С.В., Юдович В.И. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических трехмерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2001. № 2. С. 29–41.
14. Мелехов А.П., Ревина С.В. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических двумерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2008. № 2. С. 41–56.
15. Ревина С.В. Рекуррентные формулы длинноволновой асимптотики задачи устойчивости сдвиговых течений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 8. С. 1387–1401. DOI: [10.7868/S0044466913060173](https://doi.org/10.7868/S0044466913060173)
16. Ревина С.В. Устойчивость течения Колмогорова и его модификаций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 6. С. 1003–1022. DOI: [10.7868/S0044466917020144](https://doi.org/10.7868/S0044466917020144)

Казарников Алексей Владимирович, аспирант, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, 344090, Россия, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;

младший научный сотрудник, Южный математический институт, Владикавказский научный центр Российской академии наук, 362027, Россия, г. Владикавказ, пр. Маркуса, 22.

E-mail: [kazarnikov@gmail.com](mailto:kazarnikov@gmail.com)

Ревина Светлана Васильевна, к. ф.-м. н., доцент, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, 344090, Россия, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;

научный сотрудник, Южный математический институт, Владикавказский научный центр Российской академии наук, 362027, Россия, г. Владикавказ, пр. Маркуса, 22.

E-mail: [svrevina@sfedu.ru](mailto:svrevina@sfedu.ru)

*A. V. Kazarnikov, S. V. Revina*

### Bifurcations in a Rayleigh reaction–diffusion system

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 4, pp. 499–514 (in Russian).

*Keywords:* reaction–diffusion systems, pattern formation, Lyapunov–Schmidt reduction.

MSC2010: 35K57

DOI: [10.20537/vm170402](https://doi.org/10.20537/vm170402)

We consider a reaction-diffusion system with a cubic nonlinear term, which is a special case of the Fitzhugh–Nagumo system and an infinite-dimensional version of the classical Rayleigh system. We assume that the spatial variable belongs to an interval, supplemented with Neumann boundary conditions. It is well-known that in that specific case there exists a spatially-homogeneous oscillatory regime, which coincides with the time-periodic solution of the classical Rayleigh system. We show that there exists a countable set of critical values of the control parameter, where each critical value corresponds to the branching of new spatially-inhomogeneous auto-oscillatory or stationary regimes. These regimes are stable with respect to small perturbations from some infinite-dimensional invariant subspaces of the system under study. This, in particular, explains the convergence of numerical solution to zero, periodic or stationary solution, which is observed for some specific initial conditions and control parameter values. We construct the asymptotics for branching solutions by using Lyapunov–Schmidt reduction. We find explicitly the first terms of asymptotic expansions and study the formulas for general terms of asymptotics. It is shown that a soft loss of stability occurs in invariant subspaces. We study numerically the evolution of secondary regimes due to the increase of control parameter values and observe that the secondary periodic solutions are transformed into stationary ones as the control parameter value increases. Next, the amplitude of stationary solutions continues to grow and the solution asymptotically converges to the square wave regime.

### REFERENCES

1. Turing A.M. The chemical basis of morphogenesis, *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. B*, 1952, vol. 237, issue 641, pp. 37–72. DOI: [10.1098/rstb.1952.0012](https://doi.org/10.1098/rstb.1952.0012)
2. Szalai I., De Kepper P. Pattern formation in the ferrocyanide-iodate-sulfite reaction: the control of space scale separation, *Chaos*, 2008, vol. 18, issue 2, pp. 026105. DOI: [10.1063/1.2912719](https://doi.org/10.1063/1.2912719)
3. Upadhyay R.K., Roy P., Datta J. Complex dynamics of ecological systems under nonlinear harvesting: Hopf bifurcation and Turing instability, *Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 79, issue 4, pp. 2251–2270. DOI: [10.1007/s11071-014-1808-0](https://doi.org/10.1007/s11071-014-1808-0)
4. Tang X., Song Y., Zhang T. Turing–Hopf bifurcation analysis of a predator–prey model with herd behavior and cross-diffusion, *Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 86, issue 1, pp. 73–89. DOI: [10.1007/s11071-016-2873-3](https://doi.org/10.1007/s11071-016-2873-3)

5. Fitzhugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane, *Biophysical Journal*, 1961, vol. 1, issue 6, pp. 445–466. DOI: [10.1016/S0006-3495\(61\)86902-6](https://doi.org/10.1016/S0006-3495(61)86902-6)
6. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proceedings of the IRE*, 1962, vol. 50, issue 10, pp. 2061–2070. DOI: [10.1109/JRPROC.1962.288235](https://doi.org/10.1109/JRPROC.1962.288235)
7. Zhang Q., Tian C. Pattern dynamics in a diffusive Rössler model, *Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 78, issue 2, pp. 1489–1501. DOI: [10.1007/s11071-014-1530-y](https://doi.org/10.1007/s11071-014-1530-y)
8. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. *Exact solutions and invariant subspaces on nonlinear partial differential equations in mechanics and physics*, New York: CRC Press, 2006, 528 p. DOI: [10.1201/9781420011623](https://doi.org/10.1201/9781420011623)
9. Kazarnikov A.V., Revina S.V. The onset of auto-oscillations in Rayleigh system with diffusion, *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming and Computer Software”*, 2016, vol. 9, no. 2, pp. 16–28 (in Russian). DOI: [10.14529/mmp160202](https://doi.org/10.14529/mmp160202)
10. Kazarnikov A.V., Revina S.V. Asymptotics of stationary solutions of Rayleigh reaction–diffusion system, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Severo-Kavkazskii Region. Seriya: Estestvennye Nauki*, 2016, issue 3 (191), pp. 13–19 (in Russian). DOI: [10.18522/0321-3005-2016-3-13-19](https://doi.org/10.18522/0321-3005-2016-3-13-19)
11. Iudovich V.I. Investigation of auto-oscillations of a continuous medium, occurring at loss of stability of a stationary mode, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1972, vol. 36, issue 3, pp. 424–432. DOI: [10.1016/0021-8928\(72\)90055-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(72)90055-X)
12. Kozitskii S.B. Model of three dimensional double-diffusive convection with cells of an arbitrary shape, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp’yut. Nauki*, 2012, issue 4, pp. 46–61 (in Russian). DOI: [10.20537/vm120404](https://doi.org/10.20537/vm120404)
13. Revina S.V., Iudovich V.I. Initiation of self-oscillations at loss of stability of spatially-periodic, three-dimensional viscous flows with respect to long-wave perturbations, *Fluid Dynamics*, 2001, vol. 36, no. 2, pp. 192–203. DOI: [10.1023/A:1019225815875](https://doi.org/10.1023/A:1019225815875)
14. Melekhov A.P., Revina S.V. Onset of self-oscillations upon the loss of stability of spatially periodic two-dimensional viscous fluid flows relative to long-wave perturbations, *Fluid Dynamics*, 2008, vol. 43, no. 2, pp. 203–216. DOI: [10.1134/S0015462808020051](https://doi.org/10.1134/S0015462808020051)
15. Revina S.V. Recurrence formulas for long wavelength asymptotics in the problem of shear flow stability, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, vol. 53, no. 8, pp. 1207–1220. DOI: [10.1134/S096554251306016X](https://doi.org/10.1134/S096554251306016X)
16. Revina S.V. Stability of the Kolmogorov flow and its modifications, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 6, pp. 995–1012. DOI: [10.1134/S0965542517020130](https://doi.org/10.1134/S0965542517020130)

Received 20.05.2017

Kazarnikov Aleksei Vladimirovich, Post-Graduate Student, Southern Federal University, ul. Milchakova, 8 a, Rostov-on-Don, 344090, Russia;  
Junior Researcher, Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, ul. Markusa, 22, Vladikavkaz, 362027, Russia.  
E-mail: [kazarnikov@gmail.com](mailto:kazarnikov@gmail.com)

Revina Svetlana Vasil’evna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Southern Federal University, ul. Milchakova, 8 a, Rostov-on-Don, 344090, Russia;  
Researcher, Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, ul. Markusa, 22, Vladikavkaz, 362027, Russia.  
E-mail: [svrevina@sfedu.ru](mailto:svrevina@sfedu.ru)