УДК 517.929.2

© *И. Н. Банщикова, С. Н. Попова*

О СВОЙСТВЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ РАЗДЕЛЕННОСТИ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ[1]

Работа посвящена исследованию свойства интегральной разделенности линейных систем с дискретным временем. Согласно определению система $x(m+1) = A(m)x(m),\ m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n$, называется системой с интегральной разделенностью, если она имеет фундаментальную систему решений $x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot)$ такую, что при некоторых $\gamma > 0$, $a > 1$ и всех натуральных $m > s$, $i \leqslant n-1$ выполнены неравенства

$$\frac{\|x^{i+1}(m)\|}{\|x^{i+1}(s)\|} \geqslant \gamma a^{m-s} \frac{\|x^i(m)\|}{\|x^i(s)\|}.$$

Понятие интегральной разделенности систем с непрерывным временем было введено Б. Ф. Быловым в 1965 году. Доказаны критерии интегральной разделенности систем с дискретным временем: приводимость к диагональному виду с интегрально разделенной диагональю; устойчивость и некратность показателей Ляпунова. Подробно исследовано также свойство диагонализируемости систем с дискретным временем. Доказательства учитывают специфику этих систем.

Ключевые слова: линейная система с дискретным временем, показатели Ляпунова, интегральная разделенность, диагонализируемость.

DOI: 10.20537/vm170401

Введение

Понятие интегральной разделенности для систем с непрерывным временем было введено Б. Ф. Быловым в [1] в связи с вопросами о приведении линейной системы к диагональному виду и о почти приводимости. В дальнейшем это понятие интенсивно использовалось для исследования свойства устойчивости показателей Ляпунова [2, 3] (см. также [4]).

В этой работе исследовано свойство интегральной разделенности линейных однородных систем с дискретным временем вида

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ m \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что асимптотические свойства дискретных систем исследованы достаточно подробно (см., например, [5]), но свойство интегральной разделенности в этих исследованиях затронуто не было. В работе доказаны свойства интегрально разделенных систем и критерии интегральной разделенности. Доказанные результаты будут в дальнейшем применены для решения задач управления показателями Ляпунова систем с дискретным временем [6, 7].

§ 1. Основные обозначения и определения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с фиксированным ортонормированным базисом $e^1, \ldots, e^n$ и стандартной нормой $\|\cdot\|$. Через $M_n(\mathbb{R})$ будем обозначать пространство вещественных матриц размерности $n \times n$ со спектральной нормой, т. е. операторной нормой, индуцируемой в $M_n(\mathbb{R})$ евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$; $[h^1, h^2, \ldots, h^n] \in M_n(\mathbb{R})$ — матрица, имеющая своими столбцами векторы $h^1, h^2, \ldots, h^n \in \mathbb{R}^n$; $E = [e^1, \ldots, e^n] \in M_n(\mathbb{R})$ — единичная матрица. Отметим некоторые свойства спектральной нормы. Пусть $\sigma_n \geqslant \ldots \geqslant \sigma_1 > 0$ — сингулярные

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16–01–00346).

числа обратимой матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ [8, с. 493]. Тогда $\|A\| = \sigma_n$, $\|A^{-1}\| = \sigma_1^{-1}$, $|\det A| = \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_n$, поэтому

$$|\det A| \geqslant \sigma_1^n = \frac{1}{\|A^{-1}\|^n},$$

$$|\det A| \leqslant \sigma_1 \sigma_n^{n-1} = \frac{\|A\|^{n-1}}{\|A^{-1}\|},$$

откуда

$$\|A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A\|^{n-1}}{|\det A|}.$$

Основным объектом исследований является линейная однородная система с дискретным временем

$$x(m+1) = A(m)x(m), \tag{1}$$

где аргумент m пробегает множество $\mathbb{N}$ натуральных значений; неизвестная функция x принимает значения в $\mathbb{R}^n$; коэффициент $A(m)$ при каждом m принадлежит пространству $M_n(\mathbb{R})$. Всюду ниже будем предполагать, что функция $A(\cdot)$ *вполне ограничена* [9], то есть при каждом m существует $A^{-1}(m)$, и найдется такое a_0, что

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \|A(m)\| \leqslant a_0, \quad \sup_{m \in \mathbb{N}} \|A^{-1}(m)\| \leqslant a_0.$$

Заметим, что при всех m выполнены неравенства

$$2a_0 \geqslant \|A(m)\| + \|A^{-1}(m)\| \geqslant \|A(m)\| + \|A(m)\|^{-1} \geqslant 2,$$

поэтому $a_0 \geqslant 1$.

Определение 1 (см. [10, с. 13–15]). *Фундаментальной системой решений* системы (1) называется совокупность n линейно независимых решений этой системы. Если $x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot)$ — фундаментальная система решений системы (1), то соответствующей *фундаментальной матрицей* называется матрица $\Phi(m) = [x^1(m), \ldots, x^n(m)]$, $m \in \mathbb{N}$.

Пусть $X(m,s)$ — матрица Коши системы (1), то есть такое отображение $X : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to M_n(\mathbb{R})$, что для каждого решения $x(\cdot)$ этой системы имеет место равенство

$$x(m) = X(m,s)x(s) \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{N}.$$

Тогда [10, с. 13–14]

$$X(m,s) = \begin{cases} \prod\limits_{l=s}^{m-1} A(l) & \text{при } m > s, \\ E & \text{при } m = s, \\ X^{-1}(s,m) & \text{при } m < s. \end{cases}$$

Здесь и всюду ниже полагаем $\prod\limits_{l=s}^{m-1} A(l) = A(m-1)A(m-2) \cdot \ldots \cdot A(s)$, то есть матрицы перемножаются в порядке убывания индекса. Заметим [10, с. 14], что матрица $X(m,1)$ является фундаментальной матрицей системы (1).

Определение 2 (см. [10, с. 49–51]). *Показателем Ляпунова* произвольного нетривиального решения $x(\cdot)$ системы (1) называется величина

$$\lambda[x] \doteq \varlimsup_{m \to \infty} m^{-1} \ln \|x(m)\|.$$

Показатель Ляпунова тривиального решения полагаем равным $-\infty$. *Спектром показателей Ляпунова* системы (1) называется множество всех чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, для каждого из которых существует нетривиальное решение $x(\cdot)$ системы (1) с показателем λ.

Известно [10, с. 51–52], что спектр показателей Ляпунова системы (1) состоит не более чем из n различных чисел и расположен на отрезке $[-\ln a_0, \ln a_0]$.

Пусть спектр системы (1) состоит из чисел $\Lambda_1(A) < \ldots < \Lambda_p(A)$, где $p \leqslant n$. Для каждого $i \in \{1, \ldots, p\}$ рассмотрим линейное подпространство $\mathcal{E}_i(\cdot)$ решений системы (1), состоящее из тех решений, показатели Ляпунова которых не превосходят $\Lambda_i(A)$, и положим $\mathcal{E}_0(\cdot)$ состоящим из тривиального решения системы (1), $\dim \mathcal{E}_0 \doteq 0$. Тогда *кратностью* показателя $\Lambda_i(A)$ называется величина $n_i \doteq \dim \mathcal{E}_i - \dim \mathcal{E}_{i-1}$. Отметим, что $n_1 + \ldots + n_p = n$.

Определение 3 (см. [10, с. 57]). *Полным спектром показателей Ляпунова* системы (1) называется набор n чисел
$$\Lambda_1(A), \ldots, \Lambda_1(A), \ldots, \Lambda_p(A), \ldots, \Lambda_p(A),$$
где каждый показатель $\Lambda_i(A)$ повторяется n_i раз. В дальнейшем будем обозначать его так: $\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$.

Определение 4 (см. [10, с. 53, 57]). Фундаментальная система решений системы (1) называется *нормальной*, если она реализует полный спектр показателей Ляпунова этой системы.

Замечание 1. Рассмотрим диагональную систему
$$y(m+1) = \operatorname{diag}\big(b_1(m), \ldots, b_n(m)\big)y(m), \quad m \in \mathbb{N}, \; y \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$
с вполне ограниченной матрицей $B(\cdot) = \operatorname{diag}\big(b_1(\cdot), \ldots, b_n(\cdot)\big)$. Пусть $Y(m,s)$ — матрица Коши системы (2). Тогда при всех $m > 1$
$$Y(m,1) = \prod_{l=1}^{m-1} B(l) = \operatorname{diag}\Big(\prod_{l=1}^{m-1} b_1(l), \ldots, \prod_{l=1}^{m-1} b_n(l)\Big),$$
то есть $Y(m,1) = \big[y^1(m), \ldots, y^n(m)\big]$, где
$$y^i(m) = e^i \prod_{l=1}^{m-1} b_i(l), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$
Матрица $Y(m,1)$ является фундаментальной матрицей системы (2). Используя понятие несжимаемости [10, с. 55], нетрудно проверить, что соответствующая фундаментальная система решений $\big\{y^1(\cdot), \ldots, y^n(\cdot)\big\}$ нормальна.

Определение 5 (см. [10, с. 100]). *Преобразованием Ляпунова* системы (1) называется линейное преобразование вида
$$x(m) = L(m)y(m), \tag{4}$$
где матрица $L : \mathbb{N} \to M_n(\mathbb{R})$ вполне ограничена. Матрица $L(\cdot)$ при этом называется *матрицей Ляпунова*.

Замечание 2. Применяя преобразование (4) к системе (1), получим систему
$$y(m+1) = L^{-1}(m+1)x(m+1) = L^{-1}(m+1)A(m)x(m) = L^{-1}(m+1)A(m)L(m)y(m).$$
Таким образом, преобразование (4) переводит (1) в систему
$$y(m+1) = B(m)y(m), \tag{5}$$
где
$$B(m) = L^{-1}(m+1)A(m)L(m).$$

Заметим, что если матрица $A(\cdot)$ системы (1) вполне ограничена, то матрица $B(\cdot)$ системы (5) также вполне ограничена, то есть *свойство полной ограниченности матрицы системы инвариантно относительно преобразований Ляпунова.* Известно также [10, с. 125], что *полный спектр показателей Ляпунова инвариантен относительно преобрзований Ляпунова.* Кроме того, если $x^1(\cdot),\ldots,x^n(\cdot)$ — фундаментальная система решений системы (1), то совокупность функций $y^1(\cdot),\ldots,y^n(\cdot)$, где $y^j(m)\doteq L^{-1}(m)x^j(m)$, образует фундаментальную систему решений системы (5).

Определение 6. Система (1) называется *приводимой* к системе (5), если существует преобразование Ляпунова (4), связывающее эти системы.

§ 2. Интегральная разделенность

Введем понятие интегральной разделенности систем с дискретным временем.

Определение 7. Система (1) называется *системой с интегральной разделенностью*, если она имеет фундаментальную систему решений $x^1(\cdot),\ldots,x^n(\cdot)$ такую, что при некоторых $\gamma>0$, $a>1$ и всех натуральных $j<m$, $i\in\{1,\ldots,n-1\}$ выполнены неравенства

$$\frac{\|x^{i+1}(m)\|}{\|x^{i+1}(j)\|}\geqslant \gamma a^{m-j}\frac{\|x^i(m)\|}{\|x^i(j)\|}. \tag{6}$$

Приведем (с доказательствами) два свойства интегрально разделенных систем, аналогичные свойствам интегрально разделенных систем с непрерывным временем (см., например, [11]).

Лемма 1. *Если* (1) *— система с интегральной разделенностью, то ее полный спектр показателей Ляпунова состоит из n различных чисел.*

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную систему решений $x^1(\cdot),\ldots,x^n(\cdot)$ системы (1), для которой выполнены неравенства (6). Полагая в этих неравенствах $j=1<m$ и логарифмируя, получим

$$\ln\frac{\|x^{i+1}(m)\|}{\|x^{i+1}(1)\|}\geqslant \ln\left(\gamma a^{m-1}\frac{\|x^i(m)\|}{\|x^i(1)\|}\right),$$

отсюда

$$\varliminf_{m\to\infty}\frac{1}{m}\big(\ln\|x^{i+1}(m)\|-\ln\|x^i(m)\|\big)\geqslant \ln a.$$

В то же время

$$\begin{aligned}\varliminf_{m\to\infty}\frac{1}{m}\big(\ln\|x^{i+1}(m)\|-\ln\|x^i(m)\|\big)&=\varliminf_{m\to\infty}\left(\frac{\ln\|x^{i+1}(m)\|}{m}+\frac{\ln\|x^i(m)\|^{-1}}{m}\right)\leqslant\\ &\leqslant\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{m}\ln\|x^{i+1}(m)\|+\varliminf_{m\to\infty}\left(-\frac{1}{m}\ln\|x^i(m)\|\right)=\\ &=\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{m}\ln\|x^{i+1}(m)\|-\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{m}\ln\|x^i(m)\|=\lambda[x^{i+1}]-\lambda[x^i],\end{aligned}$$

поэтому $\lambda[x^{i+1}]-\lambda[x^i]\geqslant\ln a>0$ при всех $i\in\{1,\ldots,n-1\}$. Это означает, что n различных чисел $\lambda[x^1],\ldots,\lambda[x^n]$ образуют полный спектр системы (1). $\square$

Следствие 1. *Фундаментальная система решений системы* (1), *для которой выполнены неравенства* (6), *нормальна.*

Лемма 2. *Интегральная разделенность инвариантна относительно ляпуновских преобразований.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть интегрально разделенная система (1) ляпуновским преобразованием (4) приводится к системе (5). Покажем, что эта система также интегрально разделена. Рассмотрим ее фундаментальную систему решений

$$Y(\cdot) = \{L^{-1}(\cdot)x^1(\cdot), L^{-1}(\cdot)x^2(\cdot), \ldots, L^{-1}(\cdot)x^n(\cdot)\},$$

где $x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot)$ — та фундаментальная система решений системы (1), для которой справедливы неравенства (6). Пусть постоянная $\ell \geqslant 1$ такова, что $\|L(m)\| \leqslant \ell$, $\|L^{-1}(m)\| \leqslant \ell$ при всех натуральных m. Тогда

$$\|L^{-1}(m)x(m)\| \leqslant \|L^{-1}(m)\|\,\|x(m)\| \leqslant \ell\|x(m)\|$$

и

$$\|x(m)\| = \|L(m)L^{-1}(m)x(m)\| \leqslant \|L(m)\|\,\|L^{-1}(m)x(m)\| \leqslant \ell\|L^{-1}(m)x(m)\|,$$

откуда

$$\|L^{-1}(m)x(m)\| \geqslant \frac{\|x(m)\|}{\ell}.$$

Теперь проверим непосредственно неравенства (6) для фундаментальной системы решений $Y(\cdot)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\|L^{-1}(m)x^{i+1}(m)\|\,\|L^{-1}(j)x^i(j)\|}{\|L^{-1}(j)x^{i+1}(j)\|\,\|L^{-1}(m)x^i(m)\|} \geqslant \\ &\geqslant \frac{\|x^{i+1}(m)\|}{\ell} \cdot \frac{\|x^i(j)\|}{\ell} \cdot \frac{1}{\ell\|x^{i+1}(j)\|\,\ell\|x^i(m)\|} = \\ &= \frac{\|x^{i+1}(m)\|\,\|x^i(j)\|}{\ell^4\|x^{i+1}(j)\|\,\|x^i(m)\|} \geqslant \frac{1}{\ell^4}\gamma a^{m-j} \doteq \widetilde{\gamma} a^{m-j}. \end{aligned}$$

□

Определение 8. Функция $c_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется *интегрально отделенной* от функции $c_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, если при некоторых $\gamma > 0$, $a > 1$ и всех натуральных $s < m$ выполнены неравенства

$$\prod_{l=s}^{m-1} \frac{|c_2(l)|}{|c_1(l)|} \geqslant \gamma a^{m-s}.$$

Совокупность функций $b_1, \ldots, b_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется *интегрально разделенной*, если существует перестановка $(i_1, \ldots, i_n)$ индексов $(1, \ldots, n)$ такая, что для каждого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ функция $b_{i_{j+1}}(\cdot)$ интегрально отделена от функции $b_{i_j}(\cdot)$.

Лемма 3. *Если диагональ $b_1(\cdot), \ldots, b_n(\cdot)$ системы (2) интегрально разделена, то эта система интегрально разделена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(i_1, \ldots, i_n)$ — такая перестановка индексов $(1, \ldots, n)$, что

$$\prod_{l=s}^{m-1} \frac{|b_{i_{j+1}}(l)|}{|b_{i_j}(l)|} \geqslant \gamma a^{m-s} \tag{7}$$

при некоторых $\gamma > 0$, $a > 1$ и всех натуральных $m > s$ и $j \leqslant n-1$. Рассмотрим фундаментальную систему решений $\Psi(\cdot) = \{y^{i_1}(\cdot), \ldots, y^{i_n}(\cdot)\}$, где $y^i(\cdot)$ определены равенствами (3). Так как при всех натуральных $m > s$ и $j \leqslant n$

$$\frac{\|y^{i_j}(m)\|}{\|y^{i_j}(s)\|} = \prod_{l=s}^{m-1} |b_{i_j}(l)|,$$

то из неравенства (7) вытекает

$$\frac{\|y^{i_{j+1}}(m)\|}{\|y^{i_{j+1}}(s)\|} \geqslant \gamma a^{m-s} \frac{\|y^{i_j}(m)\|}{\|y^{i_j}(s)\|}$$

при всех натуральных $m > s$ и $j \leqslant n-1$. Это означает, что система (2) интегрально разделена. □

§ 3. Приведение к диагональному виду

Рассмотрим теперь вопрос о приведении системы (1) к диагональному виду. Условия диагонализируемости систем с непрерывным временем были получены Б. Ф. Быловым в [1, 12].

Теорема 1. *Система* (1) *приводима к системе* (2) *с вполне ограниченной диагональной матрицей* $B(\cdot) = \operatorname{diag}\big(b_1(\cdot), \ldots, b_n(\cdot)\big)$ *тогда и только тогда, когда она имеет фундаментальную матрицу* $\Phi(\cdot) = [x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot)]$ *такую, что при некотором* $\rho > 0$ *и всех натуральных* m *выполнено неравенство*

$$|\det \Phi(m)| \geqslant \rho \prod_{j=1}^{n} \|x^j(m)\|. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть преобразование Ляпунова (4) приводит систему (1) к диагональному виду (2). Система (2) имеет нормальную фундаментальную матрицу $\Psi(m) = \big[y_1(m)e^1, \ldots, y_n(m)e^n\big]$, где $y_j(m) = \prod\limits_{l=1}^{m-1} b_j(l)$. Положим

$$\Phi(m) \doteq \big[x^1(m), \ldots, x^n(m)\big] = L(m)\Psi(m).$$

Это фундаментальная матрица системы (1). Пусть $L(m) = \big[l^1(m), \ldots, l^n(m)\big]$. Тогда

$$x^j(m) = l^j(m) y_j(m),$$

поэтому

$$\frac{|\det \Phi(m)|}{\prod\limits_{j=1}^{n} \|x^j(m)\|} = \frac{|\det L(m)|\,|\det \Psi(m)|}{\prod\limits_{j=1}^{n} \|l^j(m)\| \cdot \prod\limits_{j=1}^{n} |y_j(m)|} = \frac{|\det L(m)|}{\prod\limits_{j=1}^{n} \|l^j(m)\|}.$$

Так как матрица $L(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$, то при некотором $\ell \geqslant 1$ и всех $m \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства $\|L(m)\| \leqslant \ell$, $\|L^{-1}(m)\| \leqslant \ell$, поэтому

$$\|l^j(m)\| = \|L(m)e^j\| \leqslant \|L(m)\| \leqslant \ell,$$
$$|\det L(m)| \geqslant \frac{1}{\|L^{-1}(m)\|^n} \geqslant \frac{1}{\ell^n},$$

следовательно,

$$\frac{|\det L(m)|}{\prod\limits_{j=1}^{n} \|l^j(m)\|} \geqslant \frac{1}{\ell^{2n}} \doteq \rho,$$

и неравенство (8) выполнено.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\Phi(m) = \big[x^1(m), \ldots, x^n(m)\big]$ — фундаментальная матрица, для которой выполнено условие (8). Положим

$$l^j(m) = \frac{x^j(m)}{\|x^j(m)\|}, \quad j = 1, \ldots, n, \;\; m \in \mathbb{N},$$

и построим матрицу $L(m) = \big[l^1(m), \ldots, l^n(m)\big]$. Тогда для матрицы

$$D(m) \doteq \operatorname{diag}\big(\|x^1(m)\|, \ldots, \|x^n(m)\|\big)$$

справедливо равенство

$$\Phi(m) = L(m)D(m), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Докажем, что $L(\cdot)$ — матрица Ляпунова. Действительно,

$$\|L(m)\| = \sup_{\|h\|=1} \|L(m)h\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \|l^j(m)\| = n,$$

$$|\det L(m)| = \frac{|\det \Phi(m)|}{|\det D(m)|} \geqslant \frac{\rho \prod\limits_{j=1}^{n} \|x^j(m)\|}{\prod\limits_{j=1}^{n} \|x^j(m)\|} = \rho,$$

поэтому

$$\|L^{-1}(m)\| \leqslant \frac{\|L(m)\|^{n-1}}{|\det L(m)|} \leqslant \frac{n^{n-1}}{\rho}.$$

К системе (1) применим преобразование Ляпунова (4) с построенной матрицей $L(\cdot)$. Это преобразование переводит систему (1) в систему (5), которая имеет фундаментальную матрицу $\Psi(m) = L^{-1}(m)\Phi(m)$, то есть выполнено равенство $\Phi(m) = L(m)\Psi(m)$. Сравнивая его с (9), получаем тождество

$$\Psi(m) = D(m), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Так как фундаментальная матрица линейной однородной системы обращает в тождество эту систему, получаем $\Psi(m+1) = B(m)\Psi(m)$, откуда

$$B(m) = \Psi(m+1)\Psi^{-1}(m) = D(m+1)D^{-1}(m) = \operatorname{diag}\Big(\frac{\|x^1(m+1)\|}{\|x^1(m)\|}, \ldots, \frac{\|x^n(m+1)\|}{\|x^n(m)\|}\Big),$$

то есть $B(m)$ — диагональная матрица. Полная ограниченность $B(\cdot)$ вытекает из замечания 2. $\square$

Для произвольной фундаментальной системы решений $\Phi(\cdot) = \{x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot)\}$ системы (1) обозначим через $\mathcal{L}_i(m)$ линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, натянутое на векторы $x^1(m), \ldots, x^i(m)$, и через $\beta_i(m) \in (0, \pi/2]$ — угол между $\mathcal{L}_i(m)$ и вектором $x^{i+1}(m)$ (то есть угол между вектором $x^{i+1}(m)$ и его проекцией на $\mathcal{L}_i(m)$), $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $m \in \mathbb{N}$. В случае необходимости ниже будем подчеркивать зависимость подпространств и углов от выбора $\Phi(\cdot)$ следующим образом: $\mathcal{L}_i(m) = \mathcal{L}_i(m; \Phi)$, $\beta_i(m) = \beta_i(m; \Phi)$.

Следствие 2. *Система (1) приводима к системе (2) с вполне ограниченной диагональной матрицей $B(\cdot) = \operatorname{diag}\big(b_1(\cdot), \ldots, b_n(\cdot)\big)$ тогда и только тогда, когда она имеет фундаментальную матрицу $\Phi(\cdot) = [x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot)]$ такую, что при некотором $\beta \in (0, \pi/2]$ и всех $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ для углов $\beta_i(\cdot) = \beta_i(\cdot; \Phi)$ выполнены неравенства*

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} \beta_i(m) \geqslant \beta. \tag{10}$$

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [12, формула (3)]), что

$$|\det \Phi(m)| = \|x^1(m)\| \ldots \|x^n(m)\| \sin\beta_1(m) \ldots \sin\beta_{n-1}(m),$$

поэтому условие (8) эквивалентно неравенству

$$\sin\beta_1(m) \ldots \sin\beta_{n-1}(m) \geqslant \rho, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Если это неравенство выполнено, то при всех $i \in \{1, \ldots, n-1\}$

$$\beta_i(m) \geqslant \sin\beta_i(m) \geqslant \frac{\rho}{\prod\limits_{j \neq i} \sin\beta_j(m)} \geqslant \rho,$$

то есть оценка (10) справедлива для $\beta = \rho$.

Обратно, если имеет место условие (10), то

$$\sin\beta_i(m) \geqslant \frac{2}{\pi}\beta_i(m) \geqslant \frac{2}{\pi}\beta,$$

поэтому

$$\sin\beta_1(m)\ldots\sin\beta_{n-1}(m) \geqslant \bigl(2\beta/\pi\bigr)^{n-1}, \quad m\in\mathbb{N},$$

и оценка (11) выполнена при $\rho = \bigl(2\beta/\pi\bigr)^{n-1}$. □

Лемма 4. *Пусть* $\Phi(\cdot) = \bigl\{x^1(\cdot),\ldots,x^n(\cdot)\bigr\}$ *— фундаментальная система решений системы* (1) *такая, что при некотором* $j\in\{1,\ldots,n-1\}$ *и всех натуральных* $i\leqslant j-1$ *выполнены неравенства* (6) *и* (10). *Тогда существует такое* $C_j>0$, *что для каждого решения* $z(\cdot)\in\mathcal{L}_j(\cdot)$ *и всех натуральных* $m\geqslant s$ *выполнены неравенства*

$$\frac{\|z(m)\|}{\|z(s)\|} \leqslant C_j\frac{\|x^j(m)\|}{\|x^j(s)\|}. \tag{12}$$

Доказательство. Возьмем произвольное нетривиальное решение $z(\cdot)\in\mathcal{L}_j(\cdot)$ и зафиксируем произвольный начальный момент времени $s\in\mathbb{N}$. Пронормируем $x^1(\cdot),\ldots,x^j(\cdot)$ так, чтобы $\|x^l(s)\| = 1$ при всех $l\in\{1,\ldots,j\}$, то есть вместо $x^1(\cdot),\ldots,x^j(\cdot)$ рассмотрим $\widetilde{x}^1(\cdot),\ldots,\widetilde{x}^j(\cdot)$, где

$$\widetilde{x}^l(\cdot) \doteq \frac{x^l(\cdot)}{\|x^l(s)\|}, \quad l=1,\ldots,j.$$

Отметим, что $\widetilde{x}^1(m),\ldots,\widetilde{x}^j(m)$ образуют базис линейного подпространства $\mathcal{L}_j(m)$, и нормировка решений не влияет на углы $\beta_i(\cdot)$. Тогда для решения

$$\widetilde{z}(\cdot) \doteq \frac{z(\cdot)}{\|z(s)\|} \in \mathcal{L}_j(\cdot)$$

справедливо представление

$$\widetilde{z}(m) = \sum_{l=1}^{j} c_l\widetilde{x}^l(m), \quad m\in\mathbb{N},$$

с не зависящими от m константами $c_1,\ldots,c_j$. В равенстве

$$\widetilde{z}(s) = \sum_{l=1}^{j} c_l\widetilde{x}^l(s)$$

все векторы по норме равны 1, при этом для всех $1\leqslant l<j$ справедливы неравенства $\beta_l(s)\geqslant\beta$. Отсюда следует [1, лемма 1], что найдется такая не зависящая от выбора $z(\cdot)\in\mathcal{L}_j(\cdot)$ и $s\in\mathbb{N}$ величина $C>0$, что $|c_l|\leqslant C$. Следовательно, для каждых $z(\cdot)\in\mathcal{L}_j(\cdot)$ и $m\geqslant s\in\mathbb{N}$

$$\frac{\|z(m)\|}{\|z(s)\|} = \|\widetilde{z}(m)\| \leqslant \sum_{l=1}^{j}|c_l|\,\|\widetilde{x}^l(m)\| = \sum_{l=1}^{j}|c_l|\,\frac{\|x^l(m)\|}{\|x^l(s)\|} \leqslant \sum_{l=1}^{j} C\,\frac{\|x^l(m)\|}{\|x^l(s)\|}. \tag{13}$$

Из неравенств (6) следует, что для каждого $l\in\{1,\ldots,j-1\}$

$$\frac{\|x^l(m)\|}{\|x^l(s)\|} \leqslant \gamma^{-1}a^{-(m-s)}\frac{\|x^{l+1}(m)\|}{\|x^{l+1}(s)\|} \leqslant \ldots \leqslant \gamma^{l-j}a^{-(j-l)(m-s)}\frac{\|x^j(m)\|}{\|x^j(s)\|} \leqslant \gamma^{l-j}\frac{\|x^j(m)\|}{\|x^j(s)\|}.$$

Продолжая оценку (13), получим

$$\frac{\|z(m)\|}{\|z(s)\|} \leqslant C\cdot\Bigl(\frac{1}{\gamma^{j-1}}+\frac{1}{\gamma^{j-2}}+\ldots+1\Bigr)\frac{\|x^j(m)\|}{\|x^j(s)\|} =: C_j\frac{\|x^j(m)\|}{\|x^j(s)\|}.$$

Таким образом, существует такое $C_j>0$, что при всех $z(\cdot)\in\mathcal{L}_j(\cdot)$ и $m\geqslant s\in\mathbb{N}$ имеет место неравенство (12). □

Теорема 2. *Система* (1) *интегрально разделена тогда и только тогда, когда она приводима к интегрально разделенной диагональной системе* (2).

Доказательство. Достаточность вытекает непосредственно из леммы 2.

Необходимость. Пусть $\Phi(\cdot) = \{x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot)\}$ — фундаментальная система решений системы (1), для которой выполнены условия (6). Докажем, что для углов $\beta_i(m) = \beta_i(m;\Phi)$ справедливы условия (10).

Предположим, что это не так, и пусть $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ — наименьший номер, для которого условие (10) не выполнено. Тогда существуют строго возрастающая последовательность моментов времени $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ и последовательность решений $(z^k(\cdot))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_i(\cdot)$ такие, что

$$\beta_i(m_k) = \sphericalangle\big(z^k(m_k), x^{i+1}(m_k)\big) < \frac{1}{k}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|z^k(m_k)\| = \|x^{i+1}(m_k)\| = 1$. Тогда

$$0 \leqslant \|z^k(m_k) - x^{i+1}(m_k)\| = 2\sin\big(\beta_i(m_k)/2\big) \leqslant \beta_i(m_k) < 1/k,$$

поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \|z^k(m_k) - x^{i+1}(m_k)\| = 0.$$

Для любого фиксированного $M \in \mathbb{N}$ имеем оценки

$$\|z^k(m_k+M) - x^{i+1}(m_k+M)\| = \|X(m_k+M, m_k)z^k(m_k) - X(m_k+M, m_k)x^{i+1}(m_k)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|X(m_k+M, m_k)\|\,\|z^k(m_k) - x^{i+1}(m_k)\| \leqslant \prod_{l=m_k}^{m_k+M-1} \|A(l)\| \cdot \|z^k(m_k) - x^{i+1}(m_k)\| \leqslant$$
$$\leqslant a_0^M \|z^k(m_k) - x^{i+1}(m_k)\|,$$

следовательно, для каждого фиксированного $M \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to\infty} \|z^k(m_k+M) - x^{i+1}(m_k+M)\| = 0. \tag{14}$$

С другой стороны, в силу нашего предположения о минимальности номера i, для которого не выполнено условие (10), из леммы 4 мы имеем оценку

$$\|z^k(m_k+M)\| = \frac{\|z^k(m_k+M)\|}{\|z^k(m_k)\|} \leqslant C_i \frac{\|x^i(m_k+M)\|}{\|x^i(m_k)\|},$$

из которой

$$\|z^k(m_k+M) - x^{i+1}(m_k+M)\| \geqslant \|x^{i+1}(m_k+M)\| - \|z^k(m_k+M)\| \geqslant$$
$$\geqslant \|x^{i+1}(m_k+M)\| - C_i \frac{\|x^i(m_k+M)\|}{\|x^i(m_k)\|} = \frac{\|x^{i+1}(m_k+M)\|}{\|x^{i+1}(m_k)\|} - C_i \frac{\|x^i(m_k+M)\|}{\|x^i(m_k)\|} \geqslant$$
$$\geqslant \gamma a^M \frac{\|x^i(m_k+M)\|}{\|x^i(m_k)\|} - C_i \frac{\|x^i(m_k+M)\|}{\|x^i(m_k)\|} =$$
$$= \big(\gamma a^M - C_i\big) \frac{\|x^i(m_k+M)\|}{\|x^i(m_k)\|} \geqslant \big(\gamma a^M - C_i\big) a_0^{-M}.$$

Так как $a > 1$, а C_i не зависит от M, то при достаточно больших $M \in \mathbb{N}$ величина в правой части последнего неравенства строго положительна и не зависит от k, что противоречит равенству (14).

Из следствия 2 получаем, что система (1) приводима к диагональной системе (2). Интегральная разделенность этой системы вытекает из леммы 2. $\square$

§ 4. Некоторые свойства интегрально разделенных систем

Теорема 3. *Если (1) — система с интегральной разделенностью, то для всякой нормальной фундаментальной системы решений* $\Psi(\cdot)=\{y^1(\cdot),\dots,y^n(\cdot)\}$ *этой системы, упорядоченной по возрастанию показателей, найдутся такие* $\gamma_1>0$ *и* $a>1$*, что при всех натуральных* $m\geqslant s$ *и* $i\leqslant n-1$ *выполнены неравенства*

$$\frac{\|y^{i+1}(m)\|}{\|y^{i+1}(s)\|}\geqslant \gamma_1 a^{m-s}\frac{\|y^i(m)\|}{\|y^i(s)\|}.$$

Доказательство. Пусть $\Phi(\cdot)=\{x^1(\cdot),\dots,x^n(\cdot)\}$ — фундаментальная система решений системы (1), для которой выполнены условия определения 7. Тогда $\Phi(\cdot)$ нормальна и, следовательно, несжимаема [10, с. 55], то есть для любой нетривиальной линейной комбинации $y(\cdot)=\sum\limits_{k=1}^{n}c_kx^k(\cdot)$ имеет место равенство $\lambda[y]=\max\limits_{c_k\neq 0}\lambda[x_k]$.

Зафиксируем произвольное $s\in\mathbb{N}$. Вместо фундаментальных систем $\Phi(\cdot)$ и $\Psi(\cdot)$ будем рассматривать фундаментальные системы $\widetilde{\Phi}(\cdot)$ и $\widetilde{\Psi}(\cdot)$, состоящие из решений $\widetilde{x}^j(\cdot)=x^j(\cdot)/\|x^j(s)\|$ и $\widetilde{y}^j(\cdot)=y^j(\cdot)/\|y^j(s)\|$ соответственно, то есть пронормируем все решения в момент времени s. Очевидно, что фундаментальная система $\widetilde{\Phi}(\cdot)$ несжимаема, поэтому

$$\widetilde{y}^j(\cdot)=\sum_{k=1}^{j}c_k^j\widetilde{x}^k(\cdot),\quad j=1,\dots,n,$$

где $c_j^j\neq 0$. Точно так же, как в доказательстве леммы 4, из [1, лемма 1] получаем существование такого $C>0$, что $|c_k^j|\leqslant C$ при всех $j\in\{1,\dots,n\}$ и $k\in\{1,\dots,j\}$.

Докажем для каждого $j\in\{1,\dots,n\}$ существование такого $B_j>0$, что для всех натуральных $m\geqslant s$

$$\|\widetilde{y}^j(m)\|\geqslant B_j\|\widetilde{x}^j(m)\|. \tag{15}$$

Действительно, если $j=1$ или если $c_j^1=\ldots=c_{j-1}^j=0$ при $j>1$, то из условия $\|\widetilde{y}^j(s)\|=$ $=\|\widetilde{x}^j(s)\|=1$ получаем

$$\widetilde{y}^j(m)=\sum_{k=1}^{j}c_k^j\widetilde{x}^k(m)=c_j^j\widetilde{x}^j(m)=\pm\widetilde{x}^j(m),$$

поэтому неравенство (15) выполнено при $B_j=1$.

Пусть теперь $j>1$ и не все коэффициенты $c_1^j,\dots,c_{j-1}^j$ равны нулю. Положим

$$z^j(\cdot)=\sum_{k=1}^{j-1}c_k^j\widetilde{x}^k(\cdot).$$

Тогда $z^j(\cdot)\in\mathcal{L}_{j-1}(\cdot;\widetilde{\Phi})$, причем $z^j(\cdot)$ — нетривиальное решение. Так как нормировка решений не влияет на выполнение неравенств (6), то из доказательства необходимости теоремы 2 получаем, что для всех углов $\beta_i(\cdot)=\beta_i(\cdot;\widetilde{\Phi})$ справедливы неравенства (10), а из леммы 4 — существование такого $C_{j-1}>0$, что при всех $m\geqslant s$

$$\frac{\|z^j(m)\|}{\|z^j(s)\|}\leqslant C_{j-1}\frac{\|\widetilde{x}^{j-1}(m)\|}{\|\widetilde{x}^{j-1}(s)\|}=C_{j-1}\|\widetilde{x}^{j-1}(m)\|=$$
$$=C_{j-1}\frac{\|x^{j-1}(m)\|}{\|x^{j-1}(s)\|}\leqslant\frac{C_{j-1}}{\gamma a^{m-s}}\frac{\|x^j(m)\|}{\|x^j(s)\|}=\frac{C_{j-1}}{\gamma a^{m-s}}\|\widetilde{x}^j(m)\|.$$

Поэтому

$$\|z^j(m)\| \leqslant \frac{C_{j-1}}{\gamma a^{m-s}}\|z^j(s)\| \cdot \|\widetilde{x}^j(m)\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_{j-1}}{\gamma a^{m-s}} \cdot \Bigl(\sum_{k=1}^{j-1}|c_k^j|\,\|\widetilde{x}^k(s)\|\Bigr) \cdot \|\widetilde{x}^j(m)\| \leqslant \frac{C_{j-1}Cn}{\gamma a^{m-s}}\|\widetilde{x}^j(m)\|.$$

Из равенства

$$\widetilde{y}^j(m) = \sum_{k=1}^{j} c_k^j \widetilde{x}^k(m) = z^j(m) + c_j^j \widetilde{x}^j(m)$$

получаем оценку

$$\|\widetilde{y}^j(m)\| \geqslant |c_j^j|\,\|\widetilde{x}^j(m)\| - \|z^j(m)\| \geqslant \Bigl(|c_j^j| - \frac{C_{j-1}Cn}{\gamma a^{m-s}}\Bigr)\|\widetilde{x}^j(m)\|.$$

Так как $a > 1$, то найдется такое $M \in \mathbb{N}$, что при всех $m \geqslant s + M$ выполнено неравенство

$$\|\widetilde{y}^j(m)\| \geqslant \frac{|c_j^j|}{2}\|\widetilde{x}^j(m)\|.$$

Положим

$$D_j = \min\Bigl\{\frac{\|\widetilde{y}^j(m)\|}{\|\widetilde{x}^j(m)\|} \;:\; m = s, s+1, \ldots, s+M-1\Bigr\}.$$

Тогда при всех $m \in \{s, s+1, \ldots, s+M-1\}$

$$\|\widetilde{y}^j(m)\| \geqslant D_j\|\widetilde{x}^j(m)\|.$$

Наконец, пусть $B_j \doteq \min\bigl\{D_j,\, |c_j^j|/2\bigr\}$. Тогда неравенство (15) имеет место при всех натуральных $m \geqslant s$.

Заметим, что $y^i(\cdot) \in \mathcal{L}_i(\cdot;\Phi)$, поэтому в силу леммы 4 при всех $m \geqslant s$ имеет место неравенство

$$\frac{\|y^i(m)\|}{\|y^i(s)\|} \leqslant C_i\frac{\|x^i(m)\|}{\|x^i(s)\|}, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Используя это неравенство и оценку (15), получим, что при всех натуральных $m \geqslant s$ и $i \leqslant n-1$

$$\frac{\|y^{i+1}(m)\|}{\|y^{i+1}(s)\|} = \|\widetilde{y}^{i+1}(m)\| \geqslant B_{i+1}\|\widetilde{x}^{i+1}(m)\| = B_{i+1}\frac{\|x^{i+1}(m)\|}{\|x^{i+1}(s)\|} \geqslant$$
$$\geqslant B_{i+1}\gamma a^{m-s}\frac{\|x^i(m)\|}{\|x^i(s)\|} \geqslant \frac{B_{i+1}}{C_i}\gamma a^{m-s}\frac{\|y^i(m)\|}{\|y^i(s)\|} =: \gamma_1 a^{m-s}\frac{\|y^i(m)\|}{\|y^i(s)\|}.$$

Теорема доказана. □

Следствие 3. *Для всякой нормальной фундаментальной системы решений* $\Phi(\cdot)$ *системы с интегральной разделенностью* (1)*, упорядоченной по возрастанию показателей, для углов* $\beta_i(\cdot) = \beta_i(\cdot;\Phi)$ *имеют место неравенства* (10) *при некотором* $\beta \in (0, \pi/2]$ *и всех натуральных* $i \leqslant n-1$.

Доказательство вытекает из теоремы 3 и из доказательства необходимости теоремы 2. □

Следствие 4. *Диагональная система* (2) *интегрально разделена тогда и только тогда, когда ее диагональ интегрально разделена.*

Доказательство. Достаточность представляет собой утверждение леммы 3.

Необходимость. Пусть система (2) интегрально разделена. Рассмотрим ее фундаментальную систему решений $\Psi(\cdot) = \{y^1(\cdot), \ldots, y^n(\cdot)\}$, где $y^i(\cdot)$ определены равенствами (3). Тогда, в силу замечания 1, $\Psi(\cdot)$ нормальна. Пусть $(i_1, \ldots, i_n)$ — такая перестановка индексов $(1, \ldots, n)$, что

$$\lambda[y_{i_{j+1}}] > \lambda[y_{i_j}], \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Тогда из теоремы 3 получаем, что при некоторых $\gamma > 0$, $a > 1$ и всех натуральных $m > s$ и $j \leqslant n-1$ выполнены неравенства

$$\frac{\|y^{i_{j+1}}(m)\|}{\|y^{i_{j+1}}(s)\|} \geqslant \gamma a^{m-s} \frac{\|y^{i_j}(m)\|}{\|y^{i_j}(s)\|}.$$

Но

$$\frac{\|y^{i_j}(m)\|}{\|y^{i_j}(s)\|} = \prod_{l=s}^{m-1} |b_{i_j}(l)|,$$

поэтому

$$\prod_{l=s}^{m-1} |b_{i_{j+1}}(l)| \geqslant \gamma a^{m-s} \prod_{l=s}^{m-1} |b_{i_j}(l)|,$$

то есть при всех натуральных $m > s$ и $j \leqslant n-1$ справедливы оценки

$$\prod_{l=s}^{m-1} \frac{|b_{i_{j+1}}(l)|}{|b_{i_j}(l)|} \geqslant \gamma a^{m-s}.$$

Это означает, что диагональ системы (2) интегрально разделена. □

Следствие 5. *Система* (1) *интегрально разделена тогда и только тогда, когда она приводима к диагональной системе* (2) *с интегрально разделенной диагональю.*

Доказательство вытекает непосредственно из теоремы 2 и следствия 4.

Определение 9 (см. [10, с. 64]). *Сопряженной системой* к линейной однородной системе (1) называется система

$$\psi(m+1) = \psi(m)A^{-1}(m), \quad \psi^T \in \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

Теорема 4. *Если* (1) *— система с интегральной разделенностью, то сопряженная система* (16) *также является системой с интегральной разделенностью.*

Доказательство. Пусть ляпуновское преобразование (4) приводит систему (1) к диагональному виду (2) с интегрально отделенными функциями $b_i(\cdot)$, $b_{i+1}(\cdot)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Тогда, в силу замечания 2, выполнено равенство

$$A(m) = L(m+1)B(m)L^{-1}(m),$$

поэтому

$$L(m+1) = A(m)L(m)B^{-1}(m).$$

Применим ляпуновское преобразование $\eta(m) = \psi(m)L(m)$ к системе (2), получим

$$\eta(m+1) = \psi(m+1)L(m+1) = \psi(m)A^{-1}(m)A(m)L(m)B^{-1}(m) = \\ = \psi(m)L(m)B^{-1}(m) = \eta(m)B^{-1}(m).$$

Таким образом, преобразование $\eta(m) = \psi(m)L(m)$ приводит систему (16) к диагональной системе

$$\eta(m+1) = \eta(m)H(m), \quad \eta^T \in \mathbb{R}^n, \tag{17}$$

где

$$H(m) = \operatorname{diag}(h_1(m), \ldots, h_n(m)) = B^{-1}(m),$$

следовательно,

$$h_i(m) = \big(b_i(m)\big)^{-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

При всех натуральных $m > s$ и $i \leqslant n-1$ справедливы неравенства

$$\frac{\prod\limits_{l=s}^{m-1} |h_i(l)|}{\prod\limits_{l=s}^{m-1} |h_{i+1}(l)|} = \frac{\prod\limits_{l=s}^{m-1} |b_i(l)|^{-1}}{\prod\limits_{l=s}^{m-1} |b_{i+1}(l)|^{-1}} = \frac{\prod\limits_{l=s}^{m-1} |b_{i+1}(l)|}{\prod\limits_{l=s}^{m-1} |b_i(l)|} \geqslant \gamma a^{m-s},$$

то есть функция $h_i(\cdot)$ при каждом $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ интегрально отделена от функции $h_{i+1}(\cdot)$. Это означает, что система (17) интегрально разделена, а потому и (16) интегрально разделена. Теорема доказана. □

§ 5. Устойчивость показателей и интегральная разделенность

В заключение работы обсудим связь между свойством устойчивости показателей Ляпунова системы (1) и интегральной разделенностью этой системы. Напомним определение устойчивости показателей Ляпунова.

Определение 10 (см. [13]). Полный спектр показателей Ляпунова системы (1) называется *устойчивым*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякой возмущенной системы вида

$$y(m+1) = A(m)R(m)y(m), \quad m \in \mathbb{N}, \ y \in \mathbb{R}^n,$$

с вполне ограниченным на $\mathbb{N}$ мультипликативным возмущением $R(\cdot)$ таким, что

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|R(m) - E\| < \delta,$$

выполнены неравенства

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(AR)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Имеет место следующий критерий устойчивости показателей Ляпунова (см. [13]). Для систем с непрерывным временем он был установлен В. М. Миллионщиковым в работе [2] и Б. Ф. Быловым, Н. А. Изобовым в работе [3].

Теорема 5. *Показатели Ляпунова системы* (1) *устойчивы тогда и только тогда, когда существует преобразование Ляпунова* (4)*, приводящее систему* (1) *к системе*

$$y(m+1) = D(m)y(m), \quad m \in \mathbb{N}, \ y \in \mathbb{R}^n, \tag{18}$$

с вполне ограниченной блочно-диагональной матрицей $D(m) = \operatorname{diag}\big(D_1(m), \ldots, D_p(m)\big)$*, обладающей следующими свойствами:*

1) *для каждого* $j\in\{1,\ldots,p\}$ *матрица* $D_j(m)$ *нижняя треугольная размером* $n_j\times n_j$;
2) *имеют место равенства* $\Omega(D_j)=\overline{\omega}(D_j)=\Lambda_j(A),\ j=1,\ldots,p$;
3) *блоки* $D_1(\cdot),\ldots,D_p(\cdot)$ *интегрально отделены, то есть существуют такие* $a>1$ *и* $\gamma>0$, *что при всех* $m>s$ *и* $j\in\{1,\ldots,p-1\}$ *справедливы неравенства*

$$\Big\|\big(\prod_{l=s}^{m-1}D_{j+1}(l)\big)^{-1}\Big\|^{-1}\geqslant\gamma a^{m-s}\Big\|\prod_{l=s}^{m-1}D_j(l)\Big\|.$$

Здесь величины $\Omega(D_j)$ и $\overline{\omega}(D_j)$ — это верхний центральный показатель Винограда и младший центральный показатель Миллионщикова матрицы $D_j(\cdot)$, определяемые равенствами

$$\Omega(D_j)=\lim_{T\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{mT}\sum_{k=1}^{m}\ln\Big\|\prod_{l=(k-1)T+1}^{kT}D_j(l)\Big\|,$$

$$\overline{\omega}(D_j)=\lim_{T\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{mT}\sum_{k=1}^{m}\ln\Big\|\big(\prod_{l=(k-1)T+1}^{kT}D_j(l)\big)^{-1}\Big\|^{-1}.$$

Для доказательства завершающей теоремы нашей работы нам понадобится еще одна лемма. Аналогичное утверждение для функций непрерывного аргумента приведено в [11, с. 51–52].

Лемма 5. *Пусть функция* $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ *вполне ограничена, то есть существует такое* $M\geqslant1$, *что* $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}}|f(m)|\leqslant M$, $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}}|f(m)|^{-1}\leqslant M$. *Тогда для каждого фиксированного* $T\in\mathbb{N}$

$$\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\ln|f(l)|=\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{kT}\sum_{l=1}^{kT}\ln|f(l)|.$$

Доказательство. Зафиксируем любое натуральное T. Очевидно, что выполнено неравенство

$$\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\ln|f(l)|\geqslant\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{kT}\sum_{l=1}^{kT}\ln|f(l)|.$$

Докажем противоположное неравенство.

Заметим, что при всех $m\in\mathbb{N}$

$$\ln|f(m)|\leqslant\ln M,\quad -\ln|f(m)|=\ln|f(m)|^{-1}\leqslant\ln M,$$

поэтому $\big|\ln|f(m)|\big|\leqslant\ln M$ при всех натуральных m.

Пусть $\left(m_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, на которой реализуется $\varlimsup\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{m}\sum\limits_{l=1}^{m}\ln|f(l)|$. Положим $k_j\doteq\left[m_j/T\right]$. Без ограничения общности можно считать, что $k_j\geqslant1$. Так как $m_j\in\left[k_jT,(k_j+1)T\right)$, то $m_j-k_jT<T$ и $1\leqslant\dfrac{m_j}{k_jT}<1+\dfrac{1}{k_j}$. Тогда

$$\frac{1}{k_jT}\sum_{l=1}^{k_jT}\ln|f(l)|=\frac{1}{k_jT}\Big(\sum_{l=1}^{m_j}\ln|f(l)|-\sum_{l=k_jT+1}^{m_j}\ln|f(l)|\Big)=$$

$$=\frac{m_j}{k_jT}\cdot\frac{1}{m_j}\sum_{l=1}^{m_j}\ln|f(l)|-\frac{1}{k_jT}\sum_{l=k_jT+1}^{m_j}\ln|f(l)|\geqslant$$

$$\geqslant\frac{m_j}{k_jT}\cdot\frac{1}{m_j}\sum_{l=1}^{m_j}\ln|f(l)|-\frac{1}{k_jT}\sum_{l=k_jT+1}^{m_j}\big|\ln|f(l)|\big|>\frac{m_j}{k_jT}\cdot\frac{1}{m_j}\sum_{l=1}^{m_j}\ln|f(l)|-\frac{T\ln M}{k_jT}.$$

Так как $k_j \to \infty$ при $j \to \infty$, то $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{m_j}{k_jT} = 1$ и $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{T\ln M}{k_jT} = 0$, поэтому

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{kT}\sum_{l=1}^{kT} \ln|f(l)| \geqslant \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{1}{k_jT}\sum_{l=1}^{k_jT} \ln|f(l)| \geqslant \lim_{j\to\infty} \frac{1}{m_j}\sum_{l=1}^{m_j} \ln|f(l)| = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} \ln|f(l)|,$$

что и требовалось. □

Теорема 6. *Система (1) интегрально разделена тогда и только тогда, когда ее полный спектр показателей Ляпунова устойчив и состоит из n различных чисел.*

Доказательство. Необходимость. Из леммы 1 получаем, что спектр показателей Ляпунова системы (1) состоит из n различных чисел $\Lambda_1(A) < \ldots < \Lambda_n(A)$, и кратность каждого показателя равна 1. Итак, в рассматриваемом случае $p = n$ и $n_i = 1$ при всех $i \in \{1,\ldots,n\}$. Из следствия 5 вытекает существование преобразования Ляпунова (4), приводящего систему (1) к диагональному виду (2) с интегрально разделенной диагональю $b_1(\cdot),\ldots,b_n(\cdot)$. Полагая $D_j(m) = b_j(m) \in M_1(\mathbb{R})$, получим, что свойство 1 теоремы 5 выполнено.

Далее, в силу замечания 1 нормальной фундаментальной системой решений системы (2) является $\Phi(\cdot) = \{y^1(\cdot),\ldots,y^n(\cdot)\}$, где $y^i(\cdot)$ определяются равенствами (3). Без ограничения общности можно считать, что $\Lambda_i(A) = \lambda[y^i]$, $i = 1,\ldots,n$. Тогда

$$\Lambda_i(A) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\|y^i(m)\| = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\Big|\prod_{l=1}^{m-1} b_i(l)\Big| = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\sum_{l=1}^{m-1}\ln|b_i(l)|.$$

С другой стороны,

$$\Omega(D_j) = \lim_{T\to\infty}\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT}\sum_{k=1}^{m}\ln\Big\|\prod_{l=(k-1)T+1}^{kT} D_j(l)\Big\| = \lim_{T\to\infty}\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT}\sum_{k=1}^{m}\ln\Big|\prod_{l=(k-1)T+1}^{kT} b_j(l)\Big| =$$
$$= \lim_{T\to\infty}\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT}\sum_{l=1}^{mT}\ln|b_j(l)| = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\ln|b_j(l)|,$$

последнее равенство здесь вытекает из леммы 5. Следовательно, $\Omega(D_j) = \Lambda_j(A)$ при каждом $j \in \{1,\ldots,n\}$. Аналогично:

$$\overline{\omega}(D_j) = \lim_{T\to\infty}\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT}\sum_{k=1}^{m}\ln\Big\|\Big(\prod_{l=(k-1)T+1}^{kT} D_j(l)\Big)^{-1}\Big\|^{-1} = \lim_{T\to\infty}\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT}\sum_{k=1}^{m}\ln\Big|\prod_{l=(k-1)T+1}^{kT} b_j(l)\Big| =$$
$$= \lim_{T\to\infty}\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT}\sum_{l=1}^{mT}\ln|b_j(l)| = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\ln|b_j(l)| = \Lambda_j(A).$$

Таким образом, свойство 2 теоремы 5 также выполнено.

Наконец, в силу интегральной разделенности функций $b_1(\cdot),\ldots,b_n(\cdot)$ при некоторых $a > 1$, $\gamma > 0$ и всех натуральных $m > s$, $j \leqslant n-1$ выполнены неравенства

$$\Big\|\Big(\prod_{l=s}^{m-1} D_{j+1}(l)\Big)^{-1}\Big\|^{-1} = \prod_{l=s}^{m-1}|b_{j+1}(l)| \geqslant \gamma a^{m-s}\prod_{l=s}^{m-1}|b_j(l)| = \gamma a^{m-s}\Big\|\prod_{l=s}^{m-1} D_j(l)\Big\|.$$

Это означает, что и свойство 3 теоремы 5 выполнено. Следовательно, полный спектр показателей Ляпунова системы (1) устойчив.

Достаточность. Пусть полный спектр показателей Ляпунова системы (1) состоит из n различных чисел и устойчив. Тогда $p = n$, и из свойства 1 теоремы 5 получаем, что система (1) некоторым преобразованием Ляпунова (4) приводима к блочно-диагональному виду (18), где

$$D(m) = \operatorname{diag}\big(D_1(m), \dots, D_n(m)\big) \doteq \operatorname{diag}\big(b_1(m), \dots, b_n(m)\big)$$

с одномерными блоками $D_j(\cdot) = b_j(\cdot)$, то есть система (1) приводима к диагональному виду (2). Из свойства 3 теоремы 5 следует, что при некоторых $a > 1$, $\gamma > 0$ и всех натуральных $m > s$, $j \leqslant n-1$ выполнены неравенства

$$\prod_{l=s}^{m-1} |b_{j+1}(l)| = \Big\| \Big(\prod_{l=s}^{m-1} D_{j+1}(l)\Big)^{-1} \Big\|^{-1} \geqslant \gamma a^{m-s} \Big\| \prod_{l=s}^{m-1} D_j(l) \Big\| = \gamma a^{m-s} \prod_{l=s}^{m-1} |b_j(l)|.$$

Это означает, что диагональ системы (2) интегрально разделена. Таким образом, преобразование (4) приводит систему (1) к диагональной системе с интегрально разделенной диагональю. Из следствия 5 получаем, что система (1) интегрально разделена. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Былов Б.Ф. О приведении системы линейных уравнений к диагональному виду // Математический сборник. 1965. Т. 67 (109). № 3. С. 338–344.
2. Миллионщиков В.М. Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 10. С. 1775–1784.
3. Былов Б.Ф., Изобов Н.А. Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 10. С. 1794–1803.
4. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
5. Czornik A. Perturbation theory for Lyapunov exponents of discrete linear systems. Kraków: AGH University of Science and Technology Press, 2012. 110 p.
6. Babiarz A., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Pole placement theorem for discrete time-varying linear systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 2017. Vol. 55. № 2. P. 671–692. DOI: 10.1137/15M1033666
7. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. On assignability of Lyapunov spectrum of discrete linear time-varying system with control // 21st International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR). 2016. P. 697–701. DOI: 10.1109/MMAR.2016.7575221
8. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
9. Демидович В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.
10. Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001. 400 с.
11. Адрианова Л.Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 1992. 240 с.
12. Былов Б.Ф. О приведении линейной системы к блочно-треугольному виду // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 12. С. 2027–2031.
13. Банщикова И.Н., Попова С.Н. О спектральном множестве линейной дискретной системы с устойчивыми показателями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 15–26. DOI: 10.20537/vm160102

Поступила в редакцию 01.09.2017

МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 4

Банщикова Ирина Николаевна, аспирант, старший преподаватель, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: banshhikova.irina@mail.ru

Попова Светлана Николаевна, д. ф.-м. н., зав. кафедрой дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;
ведущий научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: ps@uni.udm.ru

I. N. Banshchikova, S. N. Popova

On the property of integral separation of discrete-time systems

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 4, pp. 481–498 (in Russian).

Keywords: discrete time-varying linear system, Lyapunov exponents, integral separability, diagonalizability.

MSC2010: 39A06, 39A30

DOI: 10.20537/vm170401

This paper is devoted to the study of the property of an integral separation of discrete time-varying linear systems. By definition, the system $x(m+1) = A(m)x(m)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$, is called a system with integral separation if it has a basis of solutions $x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot)$ such that for some $\gamma > 0$, $a > 1$ and all natural $m > s$, $i \leqslant n-1$ the inequalities

$$\frac{\|x^{i+1}(m)\|}{\|x^{i+1}(s)\|} \geqslant \gamma a^{m-s} \frac{\|x^i(m)\|}{\|x^i(s)\|}.$$

are satisfied. The concept of integral separation of systems with continuous time was introduced by B. F. Bylov in 1965. The criteria for the integral separation of systems with discrete time are proved: reducibility to diagonal form with an integrally separated diagonal; stability and nonmultiplicity of Lyapunov exponents. The property of diagonalizability of discrete-time systems is also studied in detail. The evidence takes into account the specifics of these systems.

REFERENCES

1. Bylov B.F. On reduction of a system of linear equations to a diagonal form, *Mat. sb. (N.S.)*, 1965, vol. 67 (109), no. 3, pp. 338–344 (in Russian).
2. Millionshchikov V.M. Structurally stable properties of linear systems of differential equations, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 10, pp. 1775–1784 (in Russian).
3. Bylov B.F., Izobov N.A. Necessary and sufficient conditions for the stability of the characteristic exponents of a linear system, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 10, pp. 1794–1803 (in Russian).
4. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* (Theory of Lyapunov exponents and its application to problems of stability), Moscow: Nauka, 1966, 576 p.
5. Czornik A. *Perturbation theory for Lyapunov exponents of discrete linear systems*, Kraków: AGH University of Science and Technology Press, 2012, 110 p.
6. Babiarz A., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Pole placement theorem for discrete time-varying linear systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2017, vol. 55, no. 2, pp. 671–692. DOI: 10.1137/15M1033666
7. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. On assignability of Lyapunov spectrum of discrete linear time-varying system with control, *21st International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, 2016, pp. 697–701. DOI: 10.1109/MMAR.2016.7575221
8. Horn R.A., Johnson C.R. *Matrix analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1986. Translated under the title *Matrichnyi analiz*, Moscow: Mir, 1989, 655 p.
9. Demidovich V.B. A certain criterion for the stability of difference equations, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 7, pp. 1247–1255 (in Russian).

10. Gaishun I.V. *Sistemy s diskretnym vremenem* (Discrete-time systems), Minsk: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2001, 400 p.
11. Adrianova L.Ya. *Vvedenie v teoriyu lineinykh sistem differentsial'nykh uravnenii* (Introduction to the theory of linear systems of differential equations), Saint Petersburg: Saint Petersburg State University, 1992, 240 p.
12. Bylov B.F. Reduction of a linear system to block-triangular form, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 12, pp. 2027–2031 (in Russian).
13. Banshchikova I.N., Popova S.N. On the spectral set of a linear discrete system with stable Lyapunov exponents, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 15–26 (in Russian). DOI: 10.20537/vm160102

Received 01.09.2017

Banshchikova Irina Nikolaevna, Post-Graduate Student, Senior Lecturer, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: banshhikova.irina@mail.ru

Popova Svetlana Nikolaevna, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;
Leading Researcher, Department of Dynamical Systems, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: ps@uni.udm.ru