ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 4

УДК 519.615.5, 519.642.6

© *И. Ф. Юманова*

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ МЕТОДА СТЕФФЕНСЕНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Рассматривается аналог метода Стеффенсена для решения нелинейных операторных уравнений. Предложенный метод представляет собой двухшаговый итерационный процесс. Исследуется сходимость рассматриваемого метода, доказывается единственность решения, а также определяется порядок сходимости нового метода. Показывается, что предложенная модификация метода Стеффенсена, не использующая производных оператора, имеет порядок сходимости больше, чем порядок сходимости метода Ньютона, известных обобщений метода хорд или других известных модификаций метода Стеффенсена. Метод прилагается к системам нелинейных уравнений. В качестве примера рассматривается задача о пересечении кривых. Проводятся численные эксперименты на четырех тестовых системах, результаты сравниваются с результатами, полученными методом Ньютона, модифицированным методом Ньютона, а также модификациями метода Вегстейна и метода Эйткена, предложенными автором в предыдущих работах.

Ключевые слова: нелинейные операторные уравнения, метод Стеффенсена, метод Ньютона, задача о пересечении кривых.

DOI: 10.20537/vm160411

Введение

Среди эффективных методов приближенного решения нелинейных уравнений известен итерационный метод Эйткена–Стеффенсена (или просто метод Стеффенсена) [1–3], представляющий собой особую разновидность метода хорд. Его отличие от обычного метода хорд состоит в том, что для определения очередного приближения используются одно предыдущее приближение и его первая простая итерация.

В сравнении с обычным методом хорд метод Стеффенсена имеет ряд преимуществ. Например, он не требует подбора двух начальных приближений, имеет более высокий порядок сходимости (второй, как и у метода Ньютона), кроме того, в ряде случаев сходится быстрее метода Ньютона.

Интерес к методу Стеффенсена не пропадает, что объясняется возможностью обобщения его на решение нелинейных функциональных уравнений в абстрактных пространствах с сохранением указанных выше преимуществ. Такие обобщения были сделаны и исследованы, например, в [4–7].

Пусть дано уравнение

$$F(x) = 0. \tag{0.1}$$

Здесь F — отображение из X в X, где X — банахово пространство. Уравнение (0.1) также можно записать в виде задачи о неподвижной точке:

$$x = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — отображение из X в X.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 14–35–00005), исследования поддержаны Программой повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (Соглашение с Минобрнауки РФ 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.).

Аналог метода Стеффенсена для решения операторного уравнения (0.1) строим следующим образом:

$$\widetilde{x}^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[F\left(\widetilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right),$$
$$x^{(k)} = \widetilde{x}^{(k)} - \left[F\left(\widetilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1} F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right), \tag{0.2}$$

где $F(x)$ — непрерывный нелинейный оператор, действующий в банаховом пространстве, $F(x', x'') = E - \Phi(x', x'')$ — первая разделенная разность (см. определение 1), $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Определение 1 (см. [8]). Пусть $F(x)$ — непрерывный, вообще говоря нелинейный оператор, переводящий банахово пространство X в банахово пространство Y. Оператор $F(x', x'')$, действующий из X в Y, называется *разделенной разностью первого порядка оператора* $F(x)$, если выполнены следующие условия:

(1) для каждых фиксированных $x', x'' \in X$ оператор $F(x', x'')$ такой, что

$$F(x', x'')(x' - x'') = F(x') - F(x'');$$

(2) если существует производная Фреше $F'(x)$ [9], то

$$F(x, x) = F'(x).$$

Определенный таким образом оператор $F(x', x'')$ является линейным, то есть для любых $h, k \in X$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ справедливо $F(x', x'')(\lambda h + \mu k) = \lambda F(x', x'')h + \mu F(x', x'')k$. Отметим, что относительно x', x'' оператор $F(x', x'')$, очевидно, линейным не является.

Отметим следующее преимущество метода Стеффенсена (простого и предложенного аналога) перед методом Ньютона при решении нелинейных операторных уравнений: реализация метода требует только вычисления значений исходного оператора и не требует вычисления значений его производной, что имеет место при реализации метода Ньютона. Данное свойство позволяет фактически применять аналог метода Стеффенсена и в тех случаях, когда не известно аналитическое выражение оператора $F(x)$, а известен дискретный алгоритм вычисления его значений и, следовательно, применение обычного метода Ньютона невозможно.

§ 1. Исследование сходимости

Будем предполагать непрерывность оператора $\Phi(x)$ и существование обратного оператора разделенной разности $[F(x', x'')]^{-1} = [E - \Phi(x', x'')]^{-1}$ в интересующей нас области. Исследуем предложенный метод (0.2) на сходимость и определим порядок сходимости.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\left\|F(\widetilde{x}^{(0)})\right\| = \left\|\widetilde{x}^{(0)} - \Phi\left(\widetilde{x}^{(0)}\right)\right\| \leqslant \eta$;

2) *существует открытая область $\Omega \subseteq X$ такая, что для каждого x', x'', x''' из Ω справедливы оценки*

а) $\left\|[F(x', x'')]^{-1}\right\| = \left\|[E - \Phi(x', x'')]^{-1}\right\| \leqslant B$,

б) $\|\Phi(x', x'')\| \leqslant M$,

в) $\|\Phi(x', x'') - \Phi(x'', x''')\| \leqslant K\,\|x' - x'''\|$, *где B, M, K — константы;*

3) $h := C_2 B^2 K M \eta < 1$, *где C_2 — положительная константа;*

4) *замкнутый шар*

$$\left\|x - \widetilde{x}^{(0)}\right\| \leqslant R, \tag{1.1}$$

где $R = \dfrac{C_1 S_0}{C_2 B K M}$, $S_k = \sum\limits_{n=k}^{\infty} h^{2^n}$ *и C_1 — положительная константа, целиком содержится в Ω.*

Тогда все члены последовательности $\left(x^{(k)}\right)$, *определяемые методом* (0.2), *начинающимся с заданного* $\widetilde{x}^{(0)}$, *лежат в шаре* (1.1); *последовательность* $\left(x^{(k)}\right)$ *имеет в шаре* (1.1) *предел* $\widetilde{x}^{*}$, *служащий решением уравнения* (0.1); *справедлива оценка*

$$\left\|\widetilde{x}^{*}-\widetilde{x}^{(k)}\right\| \leqslant \frac{C_1}{C_2 BKM} S_k \quad (k=0,\,1,\,2,\,\ldots).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем (0.2) в виде

$$\begin{aligned} &\widetilde{x}^{(k+1)}=\widetilde{x}^{(k)}-\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\left(F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)+F\left(x^{(k)}\right)\right),\\ &x^{(k)}=\widetilde{x}^{(k)}-\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Используя (1.2), получаем

$$\widetilde{x}^{(k+1)}-\widetilde{x}^{(k)}=-\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\left(F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)+F\left(x^{(k)}\right)\right); \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} &\widetilde{x}^{(k+1)}-\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)=\widetilde{x}^{(k)}-\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\left(F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)+F\left(x^{(k)}\right)\right)-\\ &-\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)=F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)-\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\left(F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)+F\left(x^{(k)}\right)\right)=\\ &=\left[E-\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\right]F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)-\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}F\left(x^{(k)}\right)=\\ &=-\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\left(E-F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right)F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)-\\ &-\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}F\left(x^{(k)}\right)=-\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\times\\ &\times\left[\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)+F\left(x^{(k)}\right)\right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x^{(k)}-\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)=\widetilde{x}^{(k)}-\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)-\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)=\\ &=F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)-\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)=\\ &=\left(E-\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\right)F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)=\\ &=\left(\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)-\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\right)\times\\ &\times F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)=-\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\left(E-F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right)F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)=\\ &=-\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right). \end{aligned}$$

Согласно определению 1 и равенствам (1.2) получаем

$$\begin{aligned} &F\left(x^{(k)}\right)=F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)+F\left(x^{(k)},\widetilde{x}^{(k)}\right)\left(x^{(k)}-\widetilde{x}^{(k)}\right)=F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)-F\left(x^{(k)},\widetilde{x}^{(k)}\right)\times\\ &\times\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)=\left(E-F\left(x^{(k)},\widetilde{x}^{(k)}\right)\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\right)\times\\ &\times F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)=\left(F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}-\right.\\ &\left.-F\left(x^{(k)},\widetilde{x}^{(k)}\right)\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\right)F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)=\\ &=-\left(F\left(x^{(k)},\widetilde{x}^{(k)}\right)-F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right)\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &F\left(\widetilde{x}^{(k+1)}\right)=F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)+F\left(\widetilde{x}^{(k+1)},\widetilde{x}^{(k)}\right)\left(\widetilde{x}^{(k+1)}-\widetilde{x}^{(k)}\right)=\\ &=-F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\left(x^{(k)}-\widetilde{x}^{(k)}\right)+F\left(\widetilde{x}^{(k+1)},\widetilde{x}^{(k)}\right)\left(\widetilde{x}^{(k+1)}-\widetilde{x}^{(k)}\right)=\\ &=-F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\left(x^{(k)}-\widetilde{x}^{(k+1)}\right)+\left(F\left(\widetilde{x}^{(k+1)},\widetilde{x}^{(k)}\right)-F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right)\times\\ &\times\left(\widetilde{x}^{(k+1)}-\widetilde{x}^{(k)}\right)=-F\left(x^{(k)}\right)-\left(F\left(\widetilde{x}^{(k+1)},\widetilde{x}^{(k)}\right)-F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right)\times\\ &\times\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\left(F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)+F\left(x^{(k)}\right)\right). \end{aligned}\tag{1.4}$$

Привлекая содержащиеся в условиях а–в оценки, из (1.3)–(1.4) получаем неравенства

$$\begin{aligned} &\left\|x^{(k)}-\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|\leqslant\left\|\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\right\|\times\\ &\times\left\|\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right\|\cdot\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|\leqslant BM\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left\|F\left(x^{(k)}\right)\right\|\leqslant\left\|F\left(x^{(k)},\widetilde{x}^{(k)}\right)-F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right\|\left\|\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\right\|\times\\ &\times\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|\leqslant KB\left\|x^{(k)}-\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|\cdot\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|\leqslant B^2KM\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left\|\widetilde{x}^{(k+1)}-\widetilde{x}^{(k)}\right\|\leqslant\left\|\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\right\|\cdot\left(\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|+\left\|F\left(x^{(k)}\right)\right\|\right)\leqslant\\ &\leqslant B\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|+B^3KM\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|^2; \end{aligned}\tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} &\left\|\widetilde{x}^{(k+1)}-\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|\leqslant\left\|\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\right\|\times\\ &\times\left(\left\|\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right\|\cdot\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|+\left\|F\left(x^{(k)}\right)\right\|\right)\leqslant\\ &\leqslant B\left(M\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|+\left\|F\left(x^{(k)}\right)\right\|\right)\leqslant BM\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|+B^3KM\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|^2; \end{aligned}\tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} &\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k+1)}\right)\right\|\leqslant\left\|F\left(x^{(k)}\right)\right\|+\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k+1)},\widetilde{x}^{(k)}\right)-F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right\|\times\\ &\times\left\|\left[F\left(\widetilde{x}^{(k)},\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\right\|\cdot\left(\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|+\left\|F\left(x^{(k)}\right)\right\|\right)\leqslant\\ &\leqslant B^2KM\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|^2+BK\left\|\widetilde{x}^{(k+1)}-\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|\cdot\left(\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|+\left\|F\left(x^{(k)}\right)\right\|\right)\leqslant\\ &\leqslant B^2KM\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|^2+BK\left(B\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|+B^3KM\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|^2\right)\times\\ &\times\left(\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|+B^2KM\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|^2\right)\leqslant\\ &\leqslant B^2KM\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|^2+2B^4K^2M\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|^3+B^4K^2M\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|^4. \end{aligned}\tag{1.7}$$

Рассмотрим неравенства (1.5), (1.6) и (1.7). Существуют такие положительные константы C_1, C_2 и C_3, что

$$\left\|\widetilde{x}^{(k+1)}-\widetilde{x}^{(k)}\right\|\leqslant C_1B\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|,\tag{1.8}$$

$$\left\|\widetilde{x}^{(k+1)}-\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\| \leqslant C_3 B M\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\| \tag{1.9}$$

и

$$\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k+1)}\right)\right\| \leqslant C_2 B^2 K M\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\|^2. \tag{1.10}$$

Из оценок (1.8), (1.9) и (1.10), учитывая условия теоремы, по индукции получим оценки

$$\left\|\widetilde{x}^{(k+1)}-\widetilde{x}^{(k)}\right\| \leqslant \frac{C_1\left(C_2 B^2 K M\right)^{2^k}}{C_2 B K M}\left\|F\left(\widetilde{x}^{(0)}\right)\right\|^{2^k},$$

$$\left\|\widetilde{x}^{(k+1)}-\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\| \leqslant \frac{C_3\left(C_2 B^2 K M\right)^{2^k}}{C_2 B K}\left\|F\left(\widetilde{x}^{(0)}\right)\right\|^{2^k}$$

и

$$\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k+1)}\right)\right\| \leqslant\left(C_2 B^2 K M\right)^{2^{n+1}-1}\left\|F\left(\widetilde{x}^{(0)}\right)\right\|^{2^{n+1}},$$

или, с учетом введенного в условии 3 теоремы обозначения $h=C_2 B^2 K M$,

$$\left\|\widetilde{x}^{(k+1)}-\widetilde{x}^{(k)}\right\| \leqslant \frac{C_1 h^{2^k}}{C_2 B K M}, \tag{1.11}$$

$$\left\|\widetilde{x}^{(k+1)}-\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right\| \leqslant \frac{C_3 h^{2^k}}{C_2 B K}$$

и

$$\left\|F\left(\widetilde{x}^{(k+1)}\right)\right\| \leqslant h^{2^{n+1}-1}\eta,$$

где $k=0,\,1,\,2,\,\ldots$.

На основании (1.11)

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{x}^{(k+p)}-\widetilde{x}^{(k)}\right\| \leqslant\left\|\widetilde{x}^{(k+p)}-\widetilde{x}^{(k+p-1)}\right\|+\cdots+\left\|\widetilde{x}^{(k+1)}-\widetilde{x}^{(k)}\right\| \leqslant \\ \leqslant \frac{C_1}{C_2 B K M}\left(h^{2^k}+h^{2^{k+1}}+\cdots+h^{2^{k+p-1}}\right);\end{aligned} \tag{1.12}$$

переходя к пределу в (1.12) при $p \rightarrow \infty$, получим

$$\left\|\widetilde{x}^*-\widetilde{x}^{(k)}\right\| \leqslant \frac{C_1}{C_2 B K M} \sum_{n=k}^{\infty} h^{2^n}=\frac{C_1}{C_2 B K M} S_k \quad(k=0,\,1,\,2,\,\ldots).$$

Переходя к пределу $(k \rightarrow \infty)$ в формулах (0.2), убеждаемся, что $\widetilde{x}^*$ является решением уравнения (0.1).

Покажем принадлежность элементов $\widetilde{x}^0$, $\Phi\left(\widetilde{x}^0\right)$, $\widetilde{x}^1$, $\Phi\left(\widetilde{x}^1\right)$, $\ldots$, $\widetilde{x}^k$, $\Phi\left(\widetilde{x}^k\right)$ шару (1.1). Это следует из индуктивно доказуемых неравенств

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{x}^{(k)}-\widetilde{x}^{(0)}\right\| \leqslant\left\|\widetilde{x}^{(k)}-\widetilde{x}^{(k-1)}\right\|+\left\|\widetilde{x}^{(k-1)}-\widetilde{x}^{(k-2)}\right\|+\cdots+ \\ +\left\|\widetilde{x}^{(1)}-\widetilde{x}^{(0)}\right\| \leqslant \frac{C_1 h^{2^{k-1}}}{C_2 B K M}+\cdots+\frac{C_1 h^{2^0}}{C_2 B K M} \leqslant \frac{C_1}{C_2 B K M} \sum_{n=0}^{k-1} h^{2^n}\end{aligned}$$

и

$$\left\|\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)-\widetilde{x}^{(0)}\right\| \leqslant\left\|\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)-\widetilde{x}^{(k+1)}\right\|+\left\|\widetilde{x}^{(k+1)}-\widetilde{x}^{(0)}\right\| \leqslant \\ \leqslant \frac{C_3 h^{2^k}}{C_2 B K}+\frac{C_1}{C_2 B K M} \sum_{n=0}^{k} h^{2^n}. \tag{1.13}$$

Из неравенства (1.13) при $k \rightarrow \infty$ получаем оценку

$$\left\|\Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)-\widetilde{x}^{(0)}\right\| \leqslant \frac{C_1 S_0}{C_2 B K M}$$

и убеждаемся, что $\widetilde{x}^*$ принадлежит шару (1.1). □

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *уравнение* (0.1) *имеет решение в шаре*

$$\left\|x-\tilde{x}^{(0)}\right\| \leqslant \rho; \tag{1.14}$$

2) *для каждого* x', x'', x''' *из шара*

$$\left\|x-\tilde{x}^{(0)}\right\| \leqslant (1+\alpha)\, \rho \tag{1.15}$$

справедливы оценки
а) $\left\|[F(x', x'')]^{-1}\right\|=\left\|[E-\Phi(x', x'')]^{-1}\right\| \leqslant B$,
б) $\|\Phi(x', x'')\| \leqslant M$,
в) $\|\Phi(x', x'')-\Phi(x'', x''')\| \leqslant K\,\|x'-x'''\|$, *где* B, M, K — *константы, причем* $\alpha=\max\{l^2 \rho^2,\, M\}$, *где* $l=\sqrt{2C} B K M$, C — *положительная константа;*
3) $l \rho<1$.

Тогда решение $\tilde{x}^*$ *уравнения* (0.1) *в шаре* (1.14) *единственно и последовательность* $\left(\tilde{x}^{(k)}\right)$, *определяемая методом* (0.2), *сходится к* x^*, *причем*

$$\left\|\tilde{x}^*-\tilde{x}^{(k)}\right\| \leqslant \frac{1}{l}\,(l \rho)^{3^k} \quad (k=0,\, 1,\, 2,\, \ldots). \tag{1.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $k=0$. Тогда оценка (1.16) справедлива на основании условия 1 теоремы. Элементы $\tilde{x}^{(0)}$ и $\Phi\left(\tilde{x}^{(0)}\right)$ принадлежат шару (1.15), так как

$$\left\|\Phi\left(\widetilde{x}^{(0)}\right)-\widetilde{x}^{(0)}\right\|=\left\|\Phi\left(\widetilde{x}^{(0)}\right)-\Phi\left(\widetilde{x}^*\right)+\widetilde{x}^*-\widetilde{x}^{(0)}\right\| \leqslant \\ \leqslant\left\|\Phi\left(\widetilde{x}^*, \widetilde{x}^{(0)}\right)\right\|+\left\|\widetilde{x}^*-\widetilde{x}^{(0)}\right\| \leqslant (1+M)\, \rho \leqslant (1+\alpha)\, \rho.$$

Проанализируем поведение погрешности, используя (0.2):

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}^*-\tilde{x}^{(k+1)}=\tilde{x}^*-x^{(k)}+\left[F\left(\tilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right)= \\
&=\tilde{x}^*-x^{(k)}-\left[F\left(\tilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\left(F\left(\tilde{x}^*\right)-F\left(x^{(k)}\right)\right)= \\
&=\tilde{x}^*-x^{(k)}-\left[F\left(\tilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1} F\left(\tilde{x}^*, x^{(k)}\right)\left(\tilde{x}^*-x^{(k)}\right)= \\
&=\left(E-\left[F\left(\tilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1} F\left(\tilde{x}^*, x^{(k)}\right)\right)\left(\tilde{x}^*-x^{(k)}\right)= \\
&=\left[F\left(\tilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1}\left(F\left(\tilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right)-F\left(\tilde{x}^*, x^{(k)}\right)\right)\left(\tilde{x}^*-x^{(k)}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{x}^* - x^{(k)} &= \tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k)} + \left[F\left(\tilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1} F\left(\tilde{x}^{(k)}\right) = \\
&= \tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k)} - \left[F\left(\tilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1} \left(F\left(\tilde{x}^*\right) - F\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right) = \\
&= \tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k)} - \left[F\left(\tilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1} F\left(\tilde{x}^*, \tilde{x}^{(k)}\right) \left(\tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k)}\right) = \\
&= \left(E - \left[F\left(\tilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1} F\left(\tilde{x}^*, \tilde{x}^{(k)}\right)\right) \left(\tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k)}\right) = \\
&= \left[F\left(\tilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right)\right]^{-1} \left(F\left(\tilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right) - F\left(\tilde{x}^*, \tilde{x}^{(k)}\right)\right) \left(\tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k)}\right)
\end{aligned}$$

и

$$\tilde{x}^* - \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right) = \Phi\left(\tilde{x}^*\right) - \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right) = \Phi\left(\tilde{x}^*, \tilde{x}^{(k)}\right) \left(\tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k)}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\left\|F\left(\tilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right) - F\left(\tilde{x}^*, x^{(k)}\right)\right\| = \\
&= \left\|F\left(\tilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right) - F\left(\Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right), \tilde{x}^*\right) + F\left(\Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right), \tilde{x}^*\right) - F\left(\tilde{x}^*, x^{(k)}\right)\right\| \leqslant \\
&\leqslant \left\|F\left(\tilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right) - F\left(\Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right), \tilde{x}^*\right)\right\| + \\
&+ \left\|F\left(\Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right), \tilde{x}^*\right) - F\left(\tilde{x}^*, x^{(k)}\right)\right\| \leqslant K\left\|\tilde{x}^* - \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right\| + \\
&+ K\left\|\Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right) - x^{(k)}\right\| \leqslant 2K\left\|\tilde{x}^* - \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right\| + K\left\|\tilde{x}^* - x^{(k)}\right\| \leqslant \\
&\leqslant 2KM\left\|\tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k)}\right\| + K\left\|\tilde{x}^* - x^{(k)}\right\|,
\end{aligned}$$

$$\left\|\tilde{x}^* - x^{(k)}\right\| \leqslant BK\left\|\tilde{x}^* - \Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)\right\| \cdot \left\|\tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k)}\right\| \leqslant BKM\left\|\tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k)}\right\|^2$$

и

$$\begin{aligned}
\left\|\tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k+1)}\right\| &\leqslant B^2KM\left(2KM\left\|\tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k)}\right\| + BK^2M\left\|\tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k)}\right\|^2\right) \times \\
&\times \left\|\tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k)}\right\|^2 \leqslant 2B^2K^2M^2\left\|\tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k)}\right\|^3 + B^3K^3M^2\left\|\tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k)}\right\|^4.
\end{aligned}$$

Пусть существует положительная константа C такая, что

$$\left\|\tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k+1)}\right\| \leqslant 2CB^2K^2M^2\left\|\tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k)}\right\|^3. \tag{1.17}$$

Из (1.17) по индукции получим оценку (1.16).

Оценка (1.17) справедлива в предположении, что элементы $\tilde{x}^{(k)}$ и $\Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right)$ принадлежат шару (1.15). Покажем, что это действительно так. Имеем

$$\left\|\tilde{x}^{(k)} - \tilde{x}^{(0)}\right\| \leqslant \left\|\tilde{x}^{(k)} - \tilde{x}^*\right\| + \left\|\tilde{x}^* - \tilde{x}^{(0)}\right\| \leqslant \frac{1}{l}\left(l\rho\right)^{3^k} + \rho \leqslant \left(1 + l^2\rho^2\right)\rho \leqslant (1+\alpha)\,\rho$$

и

$$\begin{aligned}
\left\|\Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right) - \tilde{x}^{(0)}\right\| &\leqslant \left\|\Phi\left(\tilde{x}^{(k)}\right) - \Phi\left(\tilde{x}^*\right) + \tilde{x}^* - \tilde{x}^{(0)}\right\| \leqslant \\
&\leqslant \left\|\Phi\left(\tilde{x}^*, \tilde{x}^{(k)}\right)\left(\tilde{x}^* - \tilde{x}^{(k)}\right)\right\| + \left\|\tilde{x}^* - \tilde{x}^{(0)}\right\| \leqslant \\
&\leqslant Ml^2\rho^3 + \rho < (1+M)\,\rho \leqslant (1+\alpha)\,\rho.
\end{aligned}$$

Из (1.17) и сказанного выше следует, что $\lim \tilde{x}^{(k)} = \tilde{x}^*$ при $k \to \infty$. Если уравнение (0.1) имело бы в шаре (1.14) решение $\tilde{x}^{**}$, то при помощи аналогичных рассуждений можно было бы показать, что $\lim \tilde{x}^{(k)} = \tilde{x}^{**}$ при $k \to \infty$. На основании единственности предельного элемента сходящейся последовательности $\left(\tilde{x}^{(k)}\right)$ решение в $\tilde{x}^*$ в шаре (1.14) единственно. □

Замечание 1. Рассмотрим шар радиуса R с центром в точке $\widetilde{x}^{(0)}$. Существуют такие K, B, M, что для любых x', x'', x''' из шара $S\left(\widetilde{x}^{(0)}, R\right)$ выполнены следующие оценки:

а) $\left\|[F(x',x'')]^{-1}\right\| = \left\|[E-\Phi(x',x'')]^{-1}\right\| \leqslant B$;

б) $\|\Phi(x',x'')\| \leqslant M$;

в) $\|\Phi(x',x'')-\Phi(x'',x''')\| \leqslant K\,\|x'-x'''\|$.

Теорема носит достаточный характер, и данные оценки, вообще говоря, не являются неулучшаемыми, а потому оценку M можно ослабить. А именно, если $M<1$, положим $M=1$.

Константу α положим равной M.

Положим $\rho = R/(1+\alpha)$.

Определим константу C так, чтобы $\sqrt{2C}BKM\rho < 1$, то есть с учетом введенных в теореме 2 обозначений $l\rho < 1$.

Заметим, что $\alpha = \max\{l^2\rho^2,\, M\} = M$, что соответствует тому, как α было определено ранее.

§ 2. Применение к системам нелинейных уравнений

Рассмотрим применение метода (0.2) к нелинейным системам из двух уравнений

$$f_1(x_1,\, x_2) = 0, \quad f_2(x_1,\, x_2) = 0,$$

то есть к уравнению (0.1), где

$$x = (x_1,\, x_2), \quad F(x) = (f_1(x_1,\, x_2),\, f_2(x_1,\, x_2)).$$

Используем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
x^{(k)} = \left(x_1^{(k)},\, x_2^{(k)}\right), \quad \widetilde{x}^{(k)} = \left(\widetilde{x}_1^{(k)},\, \widetilde{x}_2^{(k)}\right),\\
F(x^{(k)}) = \left(f_1(x_1^{(k)},\, x_2^{(k)}),\, f_2(x_1^{(k)},\, x_2^{(k)})\right),\\
F(\widetilde{x}^{(k)}) = \left(f_1(\widetilde{x}_1^{(k)},\, \widetilde{x}_2^{(k)}),\, f_2(\widetilde{x}_1^{(k)},\, \widetilde{x}_2^{(k)})\right),\\
\Delta x^{(k)} = \left(x_1^{(k)} - \widetilde{x}_1^{(k)},\, x_2^{(k)} - \widetilde{x}_2^{(k)}\right) = \left(\Delta x_1^{(k)},\, \Delta x_2^{(k)}\right),\\
\Delta \widetilde{x}^{(k)} = \left(\widetilde{x}_1^{(k+1)} - x_1^{(k)},\, \widetilde{x}_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}\right) = \left(\Delta \widetilde{x}_1^{(k)},\, \Delta \widetilde{x}_2^{(k)}\right),\\
x' = (x_1',\, x_2'), \quad x'' = (x_1'',\, x_2'').
\end{gathered}$$

Определим

$$F\left(x',\, x''\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{f_1(x_1',\, x_2') - f_1(x_1'',\, x_2')}{x_1' - x_1''} & \dfrac{f_1(x_1'',\, x_2') - f_1(x_1'',\, x_2'')}{x_2' - x_2''} \\ \dfrac{f_2(x_1',\, x_2') - f_2(x_1'',\, x_2')}{x_1' - x_1''} & \dfrac{f_2(x_1'',\, x_2') - f_2(x_1'',\, x_2'')}{x_2' - x_2''} \end{pmatrix}.$$

Так как по (0.1)

$$\begin{gathered}
F\left(\widetilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right) \Delta \widetilde{x}^{(k)} = -F\left(x^{(k)}\right),\\
F\left(\widetilde{x}^{(k)}, \Phi\left(\widetilde{x}^{(k)}\right)\right) \Delta x^{(k)} = -F\left(\widetilde{x}^{(k)}\right),
\end{gathered}$$

то для вычисления $\Delta\widetilde{x}^{(k)} = \left(\Delta\widetilde{x}_1^{(k)},\, \Delta\widetilde{x}_2^{(k)}\right)$ и $\Delta x^{(k)} = \left(\Delta x_1^{(k)},\, \Delta x_2^{(k)}\right)$, где $k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,$

получим следующую систему уравнений:

$$\frac{f_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)-f_1\left(\varphi_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right),\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)}{\widetilde{x}_1^{(k)}-\varphi_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)}\Delta\widetilde{x}_1^{(k)}+ \tag{2.1}$$

$$+\frac{f_1\left(\varphi_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right),\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)-f_1\left(\varphi_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right),\,\varphi_2\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)\right)}{\widetilde{x}_2^{(k)}-\varphi_2\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)}\Delta\widetilde{x}_2^{(k)}=-f_1\left(x_1^{(k)},\,x_2^{(k)}\right),$$

$$\frac{f_2\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)-f_2\left(\varphi_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right),\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)}{\widetilde{x}_1^{(k)}-\varphi_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)}\Delta\widetilde{x}_1^{(k)}+ \tag{2.2}$$

$$+\frac{f_2\left(\varphi_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right),\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)-f_2\left(\varphi_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right),\,\varphi_2\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)\right)}{\widetilde{x}_2^{(k)}-\varphi_2\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)}\Delta\widetilde{x}_2^{(k)}=-f_2\left(x_1^{(k)},\,x_2^{(k)}\right),$$

$$\frac{f_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)-f_1\left(\varphi_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right),\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)}{\widetilde{x}_1^{(k)}-\varphi_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)}\Delta x_1^{(k)}+ \tag{2.3}$$

$$+\frac{f_1\left(\varphi_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right),\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)-f_1\left(\varphi_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right),\,\varphi_2\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)\right)}{\widetilde{x}_2^{(k)}-\varphi_2\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)}\Delta x_2^{(k)}=-f_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right),$$

$$\frac{f_2\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)-f_2\left(\varphi_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right),\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)}{\widetilde{x}_1^{(k)}-\varphi_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)}\Delta x_1^{(k)}+ \tag{2.4}$$

$$+\frac{f_2\left(\varphi_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right),\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)-f_2\left(\varphi_1\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right),\,\varphi_2\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)\right)}{\widetilde{x}_2^{(k)}-\varphi_2\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right)}\Delta x_2^{(k)}=-f_2\left(\widetilde{x}_1^{(k)},\,\widetilde{x}_2^{(k)}\right).$$

Аналогичным образом легко сделать обобщения на нелинейные системы из любого числа уравнений.

Результаты § 1 могут быть применены к процессу (2.1)–(2.4), при этом в качестве пространства $\langle X,\cdot\rangle$ может быть взято $\mathbb{R}^2$ с соответствующей нормой; в общем случае может быть взято $\mathbb{R}^n$.

Пример 1. В качестве теста возьмем 4 системы нелинейных уравнений [10] с известным точным решением. Приведение уравнений вида (0.1) к виду задачи о неподвижной точке $x=\Phi(x)$ будем осуществлять по формуле $x=x-\left[F'\left(x^{(0)}\right)\right]^{-1}F\left(x\right)$, лежащей в основе модифицированного (упрощенного) метода Ньютона — частного случая метода простых итераций.

Результаты сравнительного тестирования рассматриваемых методов представлены в таблице 1 (среда MATLAB). В таблице 1 система уравнений имеет вид $F(x)=0$, $\widetilde{x}^{(0)}$ — начальное приближение из [10], i — количество итераций, NOEF — количество вычислений функции, ММВ — метод на базе метода Вегстейна [11], МЭМ — метод на базе метода Эйткена [11], МЭН — метод на базе метода Эйткена с нормами [11], МН — метод Ньютона, ММН — модифицированный метод Ньютона, МЭС — рассматриваемый метод (0.2). Вычисления производились при точности $\varepsilon=10^{-6}$.

Как видно из таблицы 1, модифицированный метод Ньютона показал наихудшие результаты (расходится в трех случаях из четырех), по количеству вычислений функций наилучшие результаты показали метод на базе метода Вегстейна и метод (0.2), по количеству итераций — метод (0.2). Результаты, полученные методом на базе метода Эйткена, лучше ньютоновских как по количеству итераций, так и по количеству вычислений функций (в одном случае метод Ньютона по количеству вычислений функций превзошел МЭМ при условии, что $F'(x)$ было заранее известно). Метод на базе метода Эйткена с нормами показал плохие результаты; тем

Таблица 1. Результаты тестирования рассматриваемых методов

№ п/п	Система	$\widetilde{x}^{(0)}$	Корень	Метод	i	NOEF
1	$f_2 = x_1x_2 - 1$ $f_1 = x_1 - 1$	$(-1; 2)$	$(1; 1)$	ММВ МЭМ МЭН МН ММН МЭС	4 2 62 3 - 1	4 5 125 6 - 3
2	$f_2 = x_1^2 + x_2^2 - 4$ $f_1 = x_1^2 - x_2^2 - 1$	$(1; 1)$	$(1.5811; 1.2247)$	ММВ МЭМ МЭН МН ММН МЭС	7 4 6 5 34 3	8 9 13 10 35 9
3	$f_2 = x_1^2 - x_2$ $f_1 = 4x_1^3 - 3x_1 - x_2$	$(0.8; 1.2)$	$(1; 1)$	ММВ МЭМ МЭН МН ММН МЭС	11 6 16 6 - 4	12 13 33 12 - 12
4	$f_2 = 10(x_2 - x_1^2)$ $f_1 = 1 - x_1$	$(-1.2; 1)$	$(1; 1)$	ММВ МЭМ МЭН МН ММН МЭС	4 4 35 - - 1	5 9 71 - - 3

не менее он сходится, в то время как расходятся метод Ньютона и модифицированный метод Ньютона.

Пример 2. Рассмотрим задачу о пересечении кривых:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = e^{1-x^2-y^2} - 1 = 0, \\ f_2(x,y) = u(x,y) = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

где $u(x,y)$ — функция, определяемая условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -(u+y^2)^{1/3} - 1.42x^2, \quad u(-1.5, y) = 4.5 + y.$$

Значения $u\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right)$, $u\left(\widetilde{x}^{(k)}, \widetilde{y}^{(k)}\right)$ будем вычислять при помощи метода Рунге–Кутты–Фельберга 4(5)-го порядка с адаптивным шагом. В результате для начального приближения $\widetilde{x}_0 = -1$, $\widetilde{y}_0 = -1$ при точности $\varepsilon = 10^{-6}$ получена сходимость приближений (2.1)–(2.4) к решению $x^* \approx -0.0234271, y^* \approx 0.9997255$ системы (2.5) за 4 итерации. Применение дифференциальных методов типа Ньютона к системе (2.5) затруднительно, поскольку неизвестна производная $\partial u/\partial y$; метод простых итераций расходится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Steffensen J.F. Remarks on iteration // Scandinavian Actuarial Journal. 1933. Vol. 1933. Issue 1. P. 64–72. DOI: 10.1080/03461238.1933.10419209
2. Островский А.М. Решение уравнений и систем уравнений. М.: ИЛ, 1963. 220 с.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962. 639 с.

4. Chen K.W. Generalization of Steffensen's method for operator equations in Banach space // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. 1964. Vol. 5. Issue 2. P. 47–77.
5. Ульм С.Ю. Обобщение метода Стеффенсена для решения операторных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4. № 6. С. 1093–1097.
6. Бельтюков Б.А. Об одном методе решения нелинейных функциональных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. Т. 5. № 5. С. 927–931.
7. Коппель Х. О сходимости обощенного метода Стеффенсена // Известия АН Эстонской ССР. 1966. Т. 15. № 4. С. 531–539.
8. Ульм С.Ю. Об обобщенных разделенных разностях. I // Известия АН Эстонской ССР. 1967. Т. 16. № 1. С. 13–26.
9. Вайнберг М.М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: ГИТТЛ, 1956. 345 с.
10. Роозе А., Кулла В., Ломп М., Мерессоо Т. Набор тестовых систем нелинейных уравнений. Изд. 2. Таллинн: Валгус, 1989. 132 с.
11. Юманова И.Ф. О применении метода Вегстейна к нелинейным системам // Современные проблемы математики. Тезисы международной (44-ой Всероссийской) молодежной школы-конференции. Институт математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2013. С. 166—169.

Поступила в редакцию 30.10.2016

Юманова Ирина Фарисовна, ассистент, кафедра вычислительной математики, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, ул. Ленина, 51.
E-mail: irina.iumanova@urfu.ru

I. F. Yumanova

One specification of Steffensen's method for solving nonlinear operator equations

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 579–590 (in Russian).

Keywords: nonlinear operator equation, Steffensen's method, Newton's method, problem of the intersection curves.

MSC2010: 45G10, 65J15

DOI: 10.20537/vm160411

We consider an analogue of Steffensen's method for solving nonlinear operator equations. The proposed method is a two-step iterative process. We study the convergence of the proposed method, prove the uniqueness of the solution and find the order of convergence. The proposed method uses no derivative operators. The convergence order is greater than that in Newton's method and some generalizations of the method of chords and Aitken–Steffensen's method. The method is applied to some test systems of nonlinear equations and the problem of curves intersection which are defined implicitly as solutions of differential equations. Numerical results are compared with the results obtained by Newton's method, the modified Newton method, and modifications of Wegstein's and Aitken's methods which were proposed by the author in previous works.

REFERENCES

1. Steffensen J.F. Remarks on iteration, *Scandinavian Actuarial Journal*, 1933, vol. 1933, issue 1, pp. 64–72. DOI: 10.1080/03461238.1933.10419209
2. Ostrowski A.M. *Solution of equations and systems of equations*, New York: Academic Press, 1960, 202 p. Translated under the title *Reshenie uravnenii i sistem uravnenii*, Moscow: Inostr. Lit., 1963, 220 p.
3. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Metody vychislenii. Tom 2* (Numerical methods. Volume 2), Moscow: Fizmatgiz, 1962, 639 p.
4. Chen K.W. Generalization of Steffensen's method for operator equations in Banach space, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 1964, vol. 5, issue 2, pp. 47–77.

5. Ul'm S.Yu. Extension of Steffensen's method for solving nonlinear operator equations, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1964, vol. 4, issue 6, pp. 159–165. DOI: 10.1016/0041-5553(64)90087-4
6. Bel'tyukov B.A. A method of solving non-linear functional equations, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1965, vol. 5, issue 5, pp. 210–217. DOI: 10.1016/0041-5553(65)90016-9
7. Koppel' H. On the convergence of the generalized Steffensen's method, *Izv. Akad. Nauk Est. SSR, Ser. Fiz.-Mat. Tekh. Nauk*, 1966, vol. 15, pp. 531–539 (in Russian).
8. Ul'm S.Yu. On generalized divided differences. I, *Izv. Akad. Nauk Est. SSR, Fiz.-Mat.*, 1967, vol. 16, no. 1, pp. 13–26 (in Russian).
9. Vainberg M.M. *Variatsionnye metody issledovaniya nelineinykh operatorov* (Variational methods for the study of nonlinear operators), Moscow: Gos. Izd. Tekh. Teor. Lit., 1956, 345 p.
10. Roose A., Kulla V., Lomp M., Meressoo T. *Nabor testovykh sistem nelineinykh uravnenii. Izd. 2* (A set of test systems of nonlinear equations. Ed. 2), Tallinn: Valgus, 1989, 132 p.
11. Yumanova I.F. On application of the Wegstein method to nonlinear systems, *Sovremennye problemy matematiki. Tezisy mezhdunarodnoi (44-oi Vserossiiskoi) molodezhnoi shkoly-konferentsii* (Actual problems of mathematics. Proceedings of International (44th All-Russian) Youth School-Conference), Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 2013, pp. 166–169 (in Russian).

Received 30.10.2016

Yumanova Irina Farisovna, Assistant Lecture, Department of Computational Mathematics, Ural Federal University, ul. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.
E-mail: irina.iumanova@urfu.ru