ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 4

УДК 519.6

© *А. Г. Ченцов*

ОПТИМИЗИРУЮЩИЕ ВСТАВКИ В ЗАДАЧАХ МАРШРУТИЗАЦИИ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ НА ОСНОВЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Рассматривается задача маршрутизации с условиями предшествования и функциями стоимости, зависящими от списка заданий, что отвечает потребностям инженерных приложений. В частности, упомянутые особенности имеются в постановках некоторых задач, возникающих в атомной энергетике и машиностроении. Исследуются вопросы, связанные с последовательным обходом мегаполисов и выполнением, при их посещении, некоторых (внутренних) работ. Предлагается процедура локального улучшения эвристических решений для задач ощутимой размерности, использующая вставки на основе динамического программирования. Последнее реализуется в виде варианта, не предусматривающего (при наличии условий предшествования) построение «полного» массива значений функции Беллмана. На этапе поиска локализации вставки предполагается ограничиваться вариантом беллмановской процедуры, доставляющей экстремум (локального) критерия без построения соответствующего решения в виде пары «маршрут–трасса». Более полная и более затратная в смысле ресурсов памяти процедура, включающая нахождение упомянутого (локально оптимального) решения, планируется после выбора локализации вставки.

Ключевые слова: вставка, динамическое программирование, маршрут.

DOI: 10.20537/vm160410

Введение

Предметом исследования, непосредственно продолжающего [1], является задача маршрутизации перемещений, осложненная возможной зависимостью функций стоимости от списка заданий, многовариантностью самих перемещений и условиями предшествования. Упомянутые осложняющие обстоятельства типичны для многих прикладных задач. В частности, это касается задач, связанных со снижением облучаемости персонала АЭС при выполнении комплекса операций в условиях чрезвычайных ситуаций (Чернобыль, Фукусима), а также задач, возникающих в машиностроении и связанных с управлением перемещением инструмента при листовой резке деталей на машинах с ЧПУ.

В силу упомянутых причин возникающая задача маршрутизации существенно отличается от своего прототипа — известной труднорешаемой задачи коммивояжера (ЗК) — в сторону качественного усложнения постановки. В то же время трудности, связанные с NP-полнотой ЗК, сохраняются в рассматриваемой далее задаче и, более того, усугубляются. Все это требует разработки специализированных методов, сочетающих исследование точных и эвристических решений.

В частности, можно иметь в виду применение оптимизирующих вставок в решения, полученные на основе эвристических алгоритмов. Этот подход использовался, в частности, в [1–3], где рассматривались маршрутные задачи вышеупомянутого типа (последовательный обход мегаполисов с условиями предшествования). Для построения точных (оптимальных) локальных решений в [1–3] применялся аппарат широко понимаемого динамического программирования (ДП) в духе [4] (в связи с ДП отметим работы [5,6], где рассматривалось решение ЗК). При этом предполагалось, что исходная задача имеет достаточно большую размерность, что не позволяет напрямую использовать ДП для поиска оптимальных решений. Приходится использовать

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 15–01–07909, 16–01–00505, 16–01–00649).

эвристики, проигрывая в качестве. Данный проигрыш предполагается частично скомпенсировать, применяя оптимизирующие вставки. При этом фрагмент исходного решения заменяется локально оптимальным. Упомянутую замену удается осуществить так, чтобы при этом не нарушались «глобальные» условия предшествования, а стоимости, соответствующие внешней по отношению к фрагменту «части» исходного решения, не увеличивались. Данная возможность указана в [1] (в менее общей постановке см. [2, 3]).

Отметим (см. [2, 3]), что реализацию оптимизирующих вставок имеет смысл осуществлять в итерационном режиме. Это позволяет в ряде случаев добиваться ощутимого улучшения достигаемого результата. Однако в настоящей работе мы сосредоточимся (подобно [1]) на вопросах, связанных с однократным применением оптимизирующей вставки. При этом будут исследованы варианты локализации вставки, не рассматриваемые в [1]. Кроме того, отметим некоторые возможности, связанные с применением ДП для определения экстремума локальной задачи без построения доставляющего этот экстремум решения в виде пары «маршрут–трасса» (имеется в виду применение при построении вставки). Данный прием связан с вопросом экономии ресурсов памяти компьютера, что, в частности, позволяет использовать фрагменты решений, имеющие бо́льшую размерность (см. в этой связи [7]). Однако применять этот прием можно только в оценочных целях, именно: какое улучшение результата возможно при данной локализации «большой» вставки? Это обстоятельство можно учитывать и при выборе само́й локализации.

Исследованию ЗК и задач типа ЗК посвящено большое число работ как в России, так и за рубежом (см., в частности, [5, 6, 8–14]). Следует отметить метод ветвей и границ [14], широко используемый в различных задачах дискретной оптимизации и играющий важную роль в исследовании ЗК. Вопросы, связанные с маршрутизацией в задачах атомной энергетики, рассматривались в монографии [15], которой предшествовала серия журнальных статей авторов. В связи с задачей маршрутизации, возникающей при листовой резке на машинах с ЧПУ, отметим работы [16–23].

§ 1. Обозначения и определения общего характера

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки и др.); $\triangleq$ — равенство по определению, $\varnothing$ — пустое множество, def заменяет выражение «по определению». Семейством называем множество, все элементы которого — множества.

Если x — какой-либо объект, то через $\{x\}$ обозначаем синглетон, содержащий x. Для каждого множества T через $\mathcal{P}(T)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) T (итак, $\mathcal{P}(T)$ — булеан T) и $\mathcal{P}'(T) \triangleq \mathcal{P}(T)\setminus\{\varnothing\}$; $\mathrm{Fin}(T)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(T)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м T. Если A и B — непустые множества , то B^A есть def множество всех отображений из A в B (как обычно, при $\mathbf{f} \in B^A$ и $a \in A$ $\mathbf{f}(a) \in B$ есть значение $\mathbf{f}$ в точке a); если же $\varphi \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то в виде $\varphi^1(C) \triangleq \{\varphi(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ имеем образ C при действии φ, $\varphi^1(C) \in \mathcal{P}'(B)$ при $C \in \mathcal{P}'(A)$. Для любых непустых множеств P и Q через $(\mathrm{Bi})[P;Q]$ обозначаем множество всех биекций [24, с. 87] P на Q. Если S и T — непустые множества, а $\psi \in (\mathrm{Bi})[S;T]$, то определена биекция $\psi^{-1} \in (\mathrm{Bi})[T;S]$, для которой

$$\big(\psi(\psi^{-1}(t)) = t \quad \forall\, t \in T\big) \ \& \ \big(\psi^{-1}(\psi(s)) = s \quad \forall\, s \in S\big);$$

ψ^{-1} — биекция, обратная к ψ. Перестановка непустого множества A есть [24, с. 87] биекция A на себя; $(\mathrm{Bi})[A;A]$ — множество всех перестановок A.

Если p и q — объекты, то $\{p;q\}$ есть def единственное множество, содержащее p, q и не содержащее никаких других элементов; итак, введена неупорядоченная пара объектов p, q. Ясно, что $\{x\} = \{x;x\}$ для всякого объекта x. Следуя [25, с. 67], полагаем для произвольных объектов α и β, что $(\alpha,\beta) \triangleq \{\{\alpha\};\{\alpha;\beta\}\}$, получая упорядоченную пару (УП) с первым элементом α и вторым элементом β. Если же z есть какая-либо УП, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$

обозначаем соответственно первый и второй элементы УП z. Для любых трех объектов x, y и z определен триплет $(x, y, z) \triangleq ((x, y), z)$ в виде УП специального вида. Следуем стандартному соглашению [26, с. 17]: если A, B и C — непустые множества, то $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$, что согласуется с определением триплета; если при этом $\varphi \in D^{A\times B\times C}$, где D — непустое множество, $x \in A \times B$ и $y \in C$, то определено значение $\varphi(x, y) \in D$ отображения φ в точке (x, y), для которого имеем также $\varphi(x, y) = \varphi(x_1, x_2, y)$ при $x_1 \triangleq \mathrm{pr}_1(x)$ и $x_2 \triangleq \mathrm{pr}_2(x)$, где учитывается, что $(x, y) = (x_1, x_2, y)$.

Если P, Q и R — непустые множества, $g \in Q^P$ и $h \in R^Q$, то, как обычно,

$$h \circ g \triangleq (h(g(x)))_{x\in P} \in R^P$$

есть композиция g и h; при $g \in (\mathrm{Bi})[P; Q]$ и $h \in (\mathrm{Bi})[Q; R]$ имеем $h \circ g \in (\mathrm{Bi})[P; R]$. Как обычно, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \xi\} = [0, \infty[$ (неотрицательная полуось); $\mathcal{R}_+[\mathcal{S}] \triangleq$ $\triangleq (\mathbb{R}_+)^S$ есть множество всех неотрицательных вещественнозначных функций , определенных на непустом множестве S.

Полагаем, что $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$ есть натуральный ряд, $\mathbb{N}_0 \triangleq \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0; 1; 2; \ldots\}$ и

$$\overline{p, q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid (p \leqslant k)\ \&\ (k \leqslant q)\} \quad \forall\, p \in \mathbb{N}_0 \quad \forall\, q \in \mathbb{N}_0$$

(заметим, что $\overline{1, 0} = \varnothing$). Непустому конечному множеству K сопоставляется его мощность $|K| \in \mathbb{N}$, причем

$$(\mathrm{bi})[K] \triangleq (\mathrm{Bi})[\overline{1, |K|}; K] \neq \varnothing.$$

Как обычно, $|\varnothing| \triangleq 0$. Если $m \in \mathbb{N}$, то $|\overline{1, m}| = m$, а $(\mathrm{bi})[\overline{1, m}] = (\mathrm{Bi})[\overline{1, m}; \overline{1, m}]$ есть множество всех перестановок множества $\overline{1, m}$. Ниже используются хорошо известные свойства образов и прообразов множеств и, в частности, то, что образ объединения двух множеств равен объединению образов.

§ 2. Основная задача: постановка и обсуждение

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество X, $\mathbf{x}_o \in X$ в качестве базы процесса, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ со свойством $\mathbf{n} \geqslant 3$ (реально в качестве $\mathbf{n}$ используется достаточно большое число), а также множества

$$\mathbf{L}_1 \in \mathrm{Fin}(X) \quad , \ldots , \quad \mathbf{L}_\mathbf{n} \in \mathrm{Fin}(X) \tag{2.1}$$

(см. [1, § 2]); множества (2.1) именуем мегаполисами. Пусть $\mathbf{L}_i \cap \mathbf{L}_j = \emptyset$ при $i \in \overline{1, \mathbf{n}}$ и $j \in \overline{1, \mathbf{n}} \setminus \{i\}$; кроме того, пусть $\mathbf{x}_o \notin \mathbf{L}_t \ \ \forall\, t \in \overline{1, \mathbf{n}}$. Следуя [1, (2.2)], полагаем также заданными отношения

$$\mathbb{L}_1 \in \mathcal{P}'(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_1) \quad , \ldots , \quad \mathbb{L}_\mathbf{n} \in \mathcal{P}'(\mathbf{L}_\mathbf{n} \times \mathbf{L}_\mathbf{n}); \tag{2.2}$$

итак, фиксированы $\mathbf{n}$ непустых п/м декартовых «квадратов». При $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$ и $z \in \mathbb{L}_j$ рассматриваем $\mathrm{pr}_1(z)$ как пункт прибытия в мегаполис $\mathbf{L}_j$, а $\mathrm{pr}_2(z)$ — как отвечающий ему пункт отправления. Два упомянутых пункта связаны между собой (см. [1, с. 125]), что отвечает потребностям прикладных задач (см. [1, (2.4), (2.5)]).

Пусть $\mathbf{P} \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1, \mathbf{n}}]$; элементы $\mathbf{P}$ (а это — перестановки $\overline{1, \mathbf{n}}$) называем маршрутами в исходной задаче. Рассматриваемые далее процессы имеют вид [1, (2.4), (2.5)] и состоят в следующем. Исследователь выбирает маршрут $\beta \in \mathbf{P}$ и посредством его нумерует мегаполисы (2.1) и отношения (2.2). Из базы $\mathbf{x}_o$ объект перемещается в пункт $z_{1,1} \in \mathbf{L}_{\beta(1)}$, выполняет работу в мегаполисе $\mathbf{L}_{\beta(1)}$, заканчивая ее в пункте $z_{1,2} \in \mathbf{L}_{\beta(1)}$ (при этом $(z_{1,1}, z_{1,2}) \in \mathbb{L}_{\beta(1)}$), после чего перемещается в $z_{2,1} \in \mathbf{L}_{\beta(2)}$; затем выполняется работа, связанная с $\mathbf{L}_{\beta(2)}$, и т. д. При этом реализуется кортеж $(z_t)_{t\in\overline{1,\mathbf{n}}}$, элементами которого являются УП: $z_1 = (z_{1,1}, z_{1,2}) \in \mathbb{L}_{\beta(1)}, \ldots,$ $z_\mathbf{n} = (z_{\mathbf{n},1}, z_{\mathbf{n},2}) \in \mathbb{L}_{\beta(\mathbf{n})}$; данный кортеж рассматривается как трасса или траектория процесса [1, (2.4), (2.5)]. Оказывается удобным, однако, дополнить данный кортеж «стартовой» УП

$z_0 = (\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_o)$ и рассматривать в качестве трассы пополненный кортеж $(z_t)_{t\in\overline{o,\mathbf{n}}}$. Выбор маршрута и трассы находится в распоряжении исследователя; этот выбор должен удовлетворять системе ограничений, часть из которых (условия на выбор трассы) указана в [1, (2.4), (2.5)]. Ограничения на выбор собственно маршрута задаются посредством приводимых ниже условий предшествования.

Фиксируем множество $\mathfrak{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,\mathbf{n}} \times \overline{1,\mathbf{n}})$; элементами $\mathfrak{K}$ являются УП индексов из $\overline{1,\mathbf{n}}$, именуемые адресными парами. Маршрут полагается допустимым (точнее, $\mathfrak{K}$-допустимым), если при $z \in \mathfrak{K}$ мегаполис с индексом $\mathrm{pr}_1(z)$ посещается раньше, чем мегаполис с индексом $\mathrm{pr}_2(z)$. Тогда [1, (2.6)]

$$\mathcal{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbf{P} \mid \forall z \in \mathfrak{K} \;\; \forall t_1 \in \overline{1,\mathbf{n}} \;\; \forall t_2 \in \overline{1,\mathbf{n}} \;\; ((\mathrm{pr}_1(z) = \alpha(t_1)) \,\&\, (\mathrm{pr}_2(z) = \alpha(t_2))) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (t_1 < t_2)\} = \{z \in \mathbf{P} \mid \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z)) \;\; \forall z \in \mathfrak{K}\}$$

есть множество всех маршрутов, $\mathfrak{K}$-допустимых по предшествованию, Всюду в дальнейшем полагаем, что выполнено условие [1, (2.7)], т. е. $\forall \mathfrak{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathfrak{K}) \, \exists z_0 \in \mathfrak{K}_0 : \; \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \;\; \forall z \in \mathfrak{K}_0$. Тогда [4, ч. 2] $\mathcal{A} \neq \varnothing$, т. е. $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathbf{P})$. Итак, $\mathcal{A}$ — непустое конечное множество. Рассмотрим вопрос о допустимости трасс, полагая (см. [1, (2.8)]), что

$$\mathfrak{X} \triangleq \{\mathbf{x}_o\} \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{L}_i\Big).$$

Тогда $\mathfrak{X} \in \mathrm{Fin}(X)$. Следуя [1, с. 125], введем множество $\widetilde{\mathfrak{Z}}$ всех кортежей $(z_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}} : \overline{0,\mathbf{n}} \to \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$; итак, $\widetilde{\mathfrak{Z}} = (\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})^{\overline{o,\mathbf{n}}}$. Тогда при $\beta \in \mathbf{P}$ пучок трасс, согласованных с β, имеет вид [1, (2.10)], т. е.

$$\mathfrak{Z}_\beta \triangleq \{(z_i)_{i\in\overline{o,\mathbf{n}}} \in \widetilde{\mathfrak{Z}} | (z_0 = (\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_o)) \,\&\, (z_t \in \mathbb{L}_{\beta(t)} \;\; \forall t \in \overline{1,\mathbf{n}})\},$$

$\mathfrak{Z}_\beta \in \mathrm{Fin}(\widetilde{\mathfrak{Z}})$. Мы рассматриваем УП $(\beta, (z_i)_{i\in\overline{o,\mathbf{n}}})$, $\beta \in \mathcal{A}$, $(z_i)_{i\in\overline{o,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\beta$, как допустимые решения (ДР) основной задачи; $\mathbf{D} \triangleq \{(\alpha, z) \in \mathcal{A} \times \widetilde{\mathfrak{Z}} \mid z \in \mathfrak{Z}_\alpha\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A} \times \widetilde{\mathfrak{Z}})$ есть множество всех таких ДР (подробнее см. в [1, с. 125–126]).

В части определения функций стоимости следуем [1, (2.12)], полагая при $\mathbf{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1,\mathbf{n}})$ заданными

$$\mathbf{c}^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathbf{N}], \; c_1^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathbf{N}], \; \ldots, \; c_{\mathbf{n}}^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathbf{N}], \; f^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X}]$$

(как и в [1], полагаем функции стоимости «максимально продолженными», что обычно не составляет труда, но позволяет упростить обозначения). Напомним замечания 2.1, 2.2 работы [1]. Если $\beta \in \mathbf{P}$ и $(z_t)_{t\in\overline{o,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\beta$, то качество УП $(\beta, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}})$ оцениваем величиной

$$\hat{\mathfrak{C}}_\beta[(z_t)_{t\in\overline{o,\mathbf{n}}}] \triangleq \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} [\mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \beta^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{\beta(t)}^\natural(z_t, \beta^1(\overline{t,\mathbf{n}}))] + f^\natural(\mathrm{pr}_2(z_{\mathbf{n}})). \tag{2.3}$$

Посредством (2.3) определен аддитивный критерий качества, в котором учитываются стоимости внешних перемещений, внутренних работ и терминального состояния. Основная задача имеет вид

$$\hat{\mathfrak{C}}_\alpha[z] \to \min, \quad \alpha \in \mathcal{A}, \quad z \in \mathfrak{Z}_\alpha. \tag{2.4}$$

Разумеется, задача (2.4) характеризуется значением

$$V \triangleq \min_{\alpha\in\mathcal{A}} \min_{z\in\mathfrak{Z}_\alpha} \hat{\mathfrak{C}}_\alpha[z] \in [0, \infty[$$

и обладает оптимальным решением, для нахождения которого можно, в принципе, использовать вариант ДП работы [27] (см. также [7, 28, 29]). Однако в случае достаточно большой размерности задачи (2.4) и прежде всего значения $\mathbf{n}$ практическая реализация «глобального»

ДП крайне затруднена в связи со сложностью вычислений. Реально в «большой» задаче (2.4) можно расчитывать на поиск удачных эвристик; локальная коррекция последних по результату является нашей основной целью. Итак, полагаем, что в задаче (2.4) найдено некоторое ДР $(\lambda, (\mathbf{h}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in \mathbf{D}$. Тогда $\lambda \in \mathcal{A}$, $(\mathbf{h}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\lambda$ и определено значение $\hat{\mathfrak{C}}_\lambda[(\mathbf{h}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] \in \mathbb{R}_+$, которое нам хотелось бы улучшить, применяя оптимизирующую вставку на основе ДП в варианте [7, 28, 29].

§ 3. Оптимизирующая вставка: общие построения

Рассмотрим вопрос о локальном улучшении ДР $(\lambda, (\mathbf{h}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}})$, для которого

$$\hat{\mathfrak{C}}_\lambda[(\mathbf{h}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}}[\mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_t), \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c^\natural_{\lambda(t)}(\mathbf{h}_t, \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}}))] + f^\natural(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_\mathbf{n})).$$

Фиксируем $N \in \overline{2, \mathbf{n}-1}$ и $\nu \in \overline{0, \mathbf{n}-N}$. Число N характеризует «размер» вставки, а ν — ее локализацию. В этих терминах определяем [1, с. 127] отображение

$$\Lambda \triangleq (\lambda(\nu+s))_{s\in\overline{1,N}},$$

$\Lambda : \overline{1,N} \to \overline{1,\mathbf{n}}$, и множество-образ $\Gamma \triangleq \Lambda^1(\overline{1,N}) \in \mathcal{P}'(\overline{1,\mathbf{n}})$; ясно, что $|\Gamma| = N$ и $\Lambda \in (\mathrm{bi})[\Gamma]$. При этом Γ — «окно» на маршруте λ, которое будет преобразовываться посредством вставки. С Γ связаны «окно» условий предшествования (см. [1, (3.5)]):

$$Q \triangleq \{z \in \mathfrak{K} | (\mathrm{pr}_1(z) \in \Gamma) \,\&\, (\mathrm{pr}_2(z) \in \Gamma)\} \tag{3.1}$$

и сами локальные условия предшествования, определяемые множеством

$$\mathbf{K} \triangleq \{(\Lambda^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)), \Lambda^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))) : z \in Q\} \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N}), \tag{3.2}$$

для которого [1, с. 127] $\forall\, \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K})\ \exists\, z_0 \in \mathbf{K}_0 : \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \quad \forall\, z \in \mathbf{K}_0$. Итак, $\mathbf{K}$ — п/м $\overline{1,N} \times \overline{1,N}$, т. е. множество, составленное из УП индексов; оно может рассматриваться как «часть» $\mathfrak{K}$ (см. (3.1), (3.2)).

В терминах $\mathbf{K}$ формулируются локальные условия предшествования: при $\mathbb{P} \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$ в виде

$$\mathbf{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z)) \quad \forall\, z \in \mathbf{K}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P})$$

имеем множество $\mathbf{K}$-допустимых маршрутов вставки. Легко видеть, что $\Lambda \circ \alpha \in (\mathrm{bi})[\Gamma] \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{P}$. Следуя [1, определение 3.1], при $\alpha \in \mathbb{P}$ вводим $(\alpha - \mathrm{sew})[\lambda; \nu] \in \mathbf{P}$ по правилам [1, (3.9)], т. е.

$$\begin{gathered}((\alpha - \mathrm{sew})[\lambda;\nu](t) \triangleq \lambda(t) \quad \forall\, t \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \overline{\nu+1, \nu+N}) \,\& \\ \&\, ((\alpha - \mathrm{sew})[\lambda;\nu](t) \triangleq (\Lambda \circ \alpha)(t-\nu) \quad \forall\, t \in \overline{\nu+1, \nu+N}).\end{gathered} \tag{3.3}$$

Посредством (3.3) локальный маршрут α «вклеивается» в λ. Напомним [1, предложение 3.3]:

$$(\alpha - \mathrm{sew})[\lambda;\nu] \in \mathcal{A} \quad \forall\, \alpha \in \mathbf{A} \tag{3.4}$$

(процедура склеивания (3.3) не разрушает допустимость маршрута). Через $\mathbf{e}$ обозначаем тождественную перестановку $\overline{1,N}$: $\mathbf{e} \in \mathbb{P}$ и $\mathbf{e}(s) \triangleq s \quad \forall\, s \in \overline{1,N}$. Тогда [1, (3.10)] $(\mathbf{e} - \mathrm{sew})[\lambda;\nu] = \lambda$. При этом $\mathbf{e} \in \mathbf{A}$.

Приступим к построению локальной маршрутной задачи, полагая $x^0 \triangleq \mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_\nu)$ и $\forall\, s \in \overline{1,N}$

$$(M_s \triangleq \mathbf{L}_{\Lambda(s)}) \,\&\, (\mathbb{M}_s \triangleq \mathbb{L}_{\Lambda(s)}). \tag{3.5}$$

Тогда $x^0 \in \mathfrak{X}$, а множества M_s (3.5) содержатся в $\mathfrak{X}$; $\mathbb{M}_t \subset M_t \times M_t$ при $t \in \overline{1,N}$. Пусть, кроме того, $\mathbf{M}_s \triangleq \{\mathrm{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}_s\} \quad \forall\, s \in \overline{1,N}$. Тогда

$$\mathbf{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1), \quad \ldots, \quad \mathbf{M}_N \in \mathcal{P}'(M_N). \tag{3.6}$$

В терминах (3.5), (3.6) определяем, подобно [1], конечные множества $\mathbb{X}$ и $\mathbf{X}$, полагая

$$\mathbb{X} \triangleq \{x^0\} \cup \Bigl(\bigcup_{s=1}^{N} M_s\Bigr) \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X}), \quad \mathbf{X} \triangleq \{x^0\} \cup \Bigl(\bigcup_{s=1}^{N} \mathbf{M}_s\Bigr) \in \mathrm{Fin}(\mathbb{X}).$$

Множество $\mathbb{X}$ играет роль фазового пространства вставки. Введем в рассмотрение локальные трассы (траектории вставки), полагая, что $\mathbb{Z}$ — множество всех кортежей $(z_t)_{t \in \overline{0,N}} : \overline{0,N} \to \to \mathbb{X} \times \mathbb{X}$. Итак, пусть при $\alpha \in \mathbb{P}$

$$\mathcal{Z}_\alpha \triangleq \{(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathbb{Z} \mid (z_0 = (x^0, x^0)) \ \& \ (z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \quad \forall\, t \in \overline{1,N})\}; \tag{3.7}$$

ясно, что $\mathcal{Z}_\alpha \in \mathrm{Fin}(\mathbb{Z})$. В (3.7) введено множество локальных трасс, согласованных с маршрутом α. В виде

$$\tilde{\mathbf{D}} \triangleq \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{A} \times \mathbb{Z} \mid \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{A} \times \mathbb{Z})$$

имеем множество всех локальных ДР. В связи с конкретизацией функций стоимости локальной задачи будем выделять следующие две возможности:

$$\nu + N + 1 \leqslant \mathbf{n}, \quad \nu = \mathbf{n} - N. \tag{3.8}$$

В зависимости от того, какому из условий в (3.8) будет удовлетворять ν, функции стоимости упомянутой задачи будут определяться по-разному. Поэтому сначала мы, следуя [27,28], введем при $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1,N})$ произвольные функции

$$\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}], \ c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}], \ \ldots, \ c_N \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}], \ f \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X}], \tag{3.9}$$

характеризующие (по смыслу) затраты на перемещения, выполнение внутренних работ и оценку терминального состояния в локальной задаче. Тогда при $\alpha \in \mathbb{P}$ и $(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$ полагаем

$$\mathcal{B}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0,N}}] \triangleq \sum_{s=1}^{N} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}), \mathrm{pr}_1(z_s), \alpha^1(\overline{s,N})) + c_{\alpha(s)}(z_s, \alpha^1(\overline{s,N}))] + f(\mathrm{pr}_2(z_N)). \tag{3.10}$$

Разумеется, для нас (3.10) существенно при $\alpha \in \mathbf{A}$. Тогда локальную задачу определяем следующим образом:

$$\mathcal{B}_\alpha[z] \to \min, \quad \alpha \in \mathbf{A}, \quad z \in \mathcal{Z}_\alpha. \tag{3.11}$$

Итак, рассматривается задача минимизации значений (3.10) на множестве $\tilde{\mathbf{D}}$;

$$\mathbb{V} \triangleq \min_{\alpha \in \mathbf{A}} \min_{z \in \mathcal{Z}_\alpha} \mathcal{B}_\alpha[z] = \min_{(\alpha, z) \in \tilde{\mathbf{D}}} \mathcal{B}_\alpha[z] \in \mathbb{R}_+ \tag{3.12}$$

есть значение задачи (3.11), т. е. ее экстремум; оптимальность ДР определяется в терминах (3.12) понятным образом. Для определения (3.12) и оптимальных ДР используем ДП в версии [27, 28], которую сейчас напомним в предельно кратком алгоритмическом варианте.

Если $K \in \mathfrak{N}$, то полагаем, что $\Xi[K] \triangleq \{h \in \mathbf{K} \mid (\mathrm{pr}_1(h) \in K) \ \& \ (\mathrm{pr}_2(h) \in K)\}$. В этих терминах определяем [4, ч. 2] отображение $\mathbf{I} \in \mathfrak{N}^{\mathfrak{N}}$ следующим правилом:

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{\mathrm{pr}_2(h) : h \in \Xi[K]\} \quad \forall\, K \in \mathfrak{N}.$$

Называем $\mathbf{I}$ оператором вычеркивания (заданий из списка). Данный оператор использовался в [4, 27–29] при построении расширения задачи (3.11). Опуская данный этап, перейдем сразу к построению слоев функции Беллмана (см. [29, § 6]).

Полагая $\mathcal{G} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K} \ \ (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \Rightarrow (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}$ (элементы $\mathcal{G}$ — существенные списки заданий), введем в рассмотрение

$$\mathcal{G}_s \triangleq \{K \in \mathcal{G} \mid s = |K|\} \ \ \forall s \in \overline{1,N}.$$

Тогда $\mathcal{G}_1 = \{\{t\} : t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\}$, где $\mathbf{K}_1 \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$. Кроме того, отметим (см. [29, (6.2)]), что

$$\mathcal{G}_{s-1} = \{K \setminus \{t\} : K \in \mathcal{G}_s, t \in \mathbf{I}(K)\} \ \ \forall s \in \overline{2,N}.$$

Ясно также, что $\mathcal{G}_N = \{\overline{1,N}\}$. Введем слои пространства $\mathbf{X} \times (\mathfrak{N} \cup \{\varnothing\})$, элементы которого именуем позициями. Упомянутые слои обозначаем через $D_0, D_1, \ldots, D_N$. Полагаем $D_N \triangleq \{(x^0, \overline{1,N})\}$ и $D_0 \triangleq \{(x, \emptyset) : \ x \in \mathfrak{M}\}$, где

$$\mathfrak{M} \triangleq \bigcup_{i \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1} \mathbf{M}_i.$$

При $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$ полагаем, что

$$\mathcal{J}_s(K) \triangleq \{t \in \overline{1,N} \setminus K \mid \{t\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\}, \ \ \mathcal{M}_s[K] \triangleq \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s(K)} \mathbf{M}_j, \ \ \mathbb{D}_s[K] \triangleq \{(x, K) : \ x \in \mathcal{M}_s[K]\}.$$

В этих терминах определяем промежуточные слои $D_1, \ldots, D_{N-1}$. Итак, полагаем, что

$$D_s \triangleq \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \mathbb{D}_s[K] \ \ \forall s \in \overline{1, N-1}.$$

Тем самым определены все слои $D_0, D_1, \ldots, D_N$. Отметим важное свойство [29, (6.9)]:

$$(y, K \setminus \{k\}) \in D_{s-1} \quad \forall s \in \overline{1,N} \quad \forall K \in \mathcal{G}_s \quad \forall k \in \mathbf{I}(K) \quad \forall y \in \mathbf{M}_k.$$

Как следствие,

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{k\}) \in D_{s-1} \ \ \forall s \in \overline{1,N} \ \ \forall (x, K) \in D_s \ \ \forall k \in \mathbf{I}(K) \ \ \forall z \in \mathbb{M}_k. \tag{3.13}$$

Заметим, что [29, с. 69] $D_0 \neq \varnothing, \ D_1 \neq \varnothing, \ldots, D_N \neq \varnothing$. С учетом этого рекуррентно определяем функции $v_0 \in \mathcal{R}_+[D_0], \ v_1 \in \mathcal{R}_+[D_1], \ \ldots, v_N \in \mathcal{R}_+[D_N]$. При этом $v_0(x, \varnothing) \triangleq f(x) \ \ \forall x \in \mathfrak{M}$ (функция v_0 определена); далее при $s \in \overline{1,N}$ преобразование v_{s-1} в v_s определяется следующим выражением [29, предложение 6.11], использующим (3.13):

$$v_s(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + v_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] \ \ \forall (x, K) \in D_s. \tag{3.14}$$

Итак, получили следующую рекуррентную процедуру:

$$v_0 \to v_1 \to \ \ldots \ \to v_N$$

(v_0 полностью определяется функцией f; регулярный шаг процедуры соответствует (3.14)). Функция v_N определяется единственным значением $v_N(x^0, \overline{1,N}) \in \mathbb{R}_+$, причем (см. (3.12); [29, с. 69])

$$\mathbb{V} = v_N(x^0, \overline{1,N}). \tag{3.15}$$

В связи с (3.14), (3.15) естественным образом возникает

Алгоритм 1^0 определения значения локальной задачи

1. В терминах f определяем функцию v_0 (учитываем представление D_0).

2. При $s \in \overline{1,N}$ преобразование v_{s-1} в v_s осуществляем посредством (3.14).

3. После преобразования v_{s-1} в v_s, где $s \in \overline{1,N}$, массив значений функции v_{s-1} уничтожается и заменяется массивом значений функции v_s.

4. Определяем значение локальной задачи выражением

$$\mathbb{V} = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})]. \tag{3.16}$$

При данном построении в памяти компьютера находится массив значений только одного слоя функции Беллмана. Отметим здесь же, что равенство (3.15), обеспечивающее финальный этап процедуры, т. е. соотношение (3.16), вытекает из [29, следствие 5.1]. Подчеркнем, что данный (естественный для теории ДП) алгоритм не позволяет найти оптимальное решение, доставляющее $\mathbb{V}$ (3.15); итак, мы находим только экстремум задачи (3.11), т. е. значение (3.12). Оптимальное решение доставляет следующий

Алгоритм 2^0 определения оптимальных маршрута и трассы

Сначала производится построение массивов значений всех функций $v_0, v_1, \ldots, v_N$, что реализуется так же, как и в предыдущем алгоритме, с одним отличием: в памяти компьютера сохраняются все функции $v_0, v_1, \ldots, v_N$.

$1'$. Полагаем $\mathbf{z}^{(0)} \triangleq (x^0, x^0)$ и с учетом (3.16) определяем $\mathbf{k}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $\mathbf{z}^{(1)} \in \mathbb{M}_{\mathbf{k}_1}$, для которых

$$\mathbb{V} = \mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N}) + c_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1\}). \tag{3.17}$$

Отметим, что согласно (3.13) $(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1\}) \in D_{N-1}$ и в силу (3.14)

$$\begin{aligned} v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1\}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1\}) + \\ + c_j(z, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1\}) + v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1; j\})], \end{aligned} \tag{3.18}$$

где $(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1; j\}) = (\mathrm{pr}_2(z), (\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1\}) \setminus \{j\}) \in D_{N-2}$ при $j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1\})$ и $z \in \mathbb{M}_j$ (см. (3.13)).

$2'$. С учетом (3.18) выбираем $\mathbf{k}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1\})$ и $\mathbf{z}^{(2)} \in \mathbb{M}_{\mathbf{k}_2}$, для которых

$$\begin{aligned} v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1\}) = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1\}) + \\ + c_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1\}) + v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2\}), \end{aligned} \tag{3.19}$$

где $(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2\}) \in D_{N-2}$.

Далее процедуры выбора, подобные $1'$ и $2'$, следует продолжать вплоть до исчерпывания списка $\overline{1,N}$; при этом в случае $2 < N$ реализуются этапы $3', \ldots, N'$.

Замечание 3.1. В связи с (3.17), (3.19) отметим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{V} = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(0)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N}) + \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1\}) + \\ + c_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}) + c_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1\}) + v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2\}). \end{aligned}$$

Из последнего равенства легко следует, что при $N = 2$ УП $((\mathbf{k}_i)_{i \in \overline{1,N}}, (\mathbf{z}^{(i)})_{i \in \overline{0,N}})$ является оптимальным решением локальной задачи. $\square$

Возвращаясь к общему случаю $N \geqslant 2$, отметим, что после выполнения N этапов, подобных $1'$ и $2'$, будут построены маршрут $\alpha_* \triangleq (\mathbf{k}_j)_{j \in \overline{1,N}} \in \mathbf{A}$ и трасса $(\mathbf{z}^{(j)})_{j \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha_*}$, для которых $\mathfrak{B}_{\alpha_*}[(\mathbf{z}^{(j)})_{j \in \overline{0,N}}] = \mathbb{V}$; итак, $(\alpha_*, (\mathbf{z}^{(j)})_{j \in \overline{0,N}}) \in \tilde{\mathbf{D}}$ есть оптимальное ДР локальной задачи. $\square$

Заметим, что в [7] проведено сравнение алгоритмов 1^0 и 2^0 с точки зрения возможной размерности маршрутной задачи; так, при использовании 1^0 (в схеме на основе ДП) был найден экстремум $\mathbb{V}$ при $N = 37$, а с применением 2^0 оптимальное ДР было построено при $N = 34$ (рассматривалось решение модельных задач в случае, когда функции стоимости не зависят от списка заданий).

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 4

§ 4. Построение оптимизирующей вставки, 1

В настоящем параграфе мы используем оптимизирующую вставку в случае, когда выполнено первое неравенство в (3.8). Итак, всюду в настоящем параграфе полагаем, что $\nu < \mathbf{n} - N$. В этом случае определено непустое множество $\lambda^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}})$. С учетом этого конкретизируем функции (3.9) следующим образом: при $z \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ полагаем, что

$$\begin{gathered}(\mathbf{c}(z, K) \triangleq \mathbf{c}^\natural(z, \Lambda^1(K) \cup \lambda^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}})))\,\&\,(c_j(z, K) \triangleq \\ \triangleq c^\natural_{\Lambda(j)}(z, \Lambda^1(K) \cup \lambda^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}}))\quad \forall\, j \in \overline{1, N});\end{gathered} \tag{4.1}$$

кроме того, при $x \in \mathbb{X}$ полагаем, что

$$f(x) \triangleq \mathbf{c}^\natural(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{\nu+N+1}),\ \lambda^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}})). \tag{4.2}$$

Итак, посредством (4.1), (4.2) определен вариант функций (3.9), связываемый с первым неравенством в (3.8).

При условиях (4.1), (4.2) реализуется локальная задача (3.11), отвечающая соответствующей конкретизации критерия (3.10). Данная задача обладает, как уже отмечалось, значением $\mathbb{V}$ (3.12) и непустым множеством оптимальных ДР, содержащимся в $\tilde{\mathbf{D}}$. Выберем и зафиксируем произвольное оптимальное ДР $(\alpha^0, (z^0_i)_{i \in \overline{0,N}}) \in \tilde{\mathbf{D}}$; итак,

$$\mathfrak{B}_{\alpha^0}[(z^0_i)_{i \in \overline{0,N}}] = \mathbb{V} \tag{4.3}$$

(такое ДР может быть при «умеренном» значении N построено посредством алгоритма 2^0, однако сейчас для нас важен только факт существования упомянутого ДР со свойством (4.3)). Располагая α^0, мы получаем (см. (3.4)), что

$$\eta \triangleq (\alpha^0 - \mathrm{sew})[\lambda; \nu] \in \mathcal{A}. \tag{4.4}$$

Далее, действуя в духе [1, § 4], введем в рассмотрение кортеж $(\hat{\mathbf{h}}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \tilde{\mathfrak{Z}}$ по следующему правилу:

$$(\hat{\mathbf{h}}_t \triangleq z^0_{t-\nu}\quad \forall\, t \in \overline{\nu + 1, \nu + N})\,\&\,(\hat{\mathbf{h}}_t \triangleq \mathbf{h}_t\quad \forall\, t \in \overline{0, \mathbf{n}} \setminus \overline{\nu + 1, \nu + N}). \tag{4.5}$$

Известно [1, предложение 4.1], что склеивание (4.5) доставляет трассу, согласованную с η (4.4): $(\hat{\mathbf{h}}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\eta$. Следовательно,

$$(\eta, (\hat{\mathbf{h}}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}) \in \mathbf{D}. \tag{4.6}$$

Заметим, кроме того, что по исходной трассе можно ввести ее сужение

$$(\tilde{\mathbf{h}}_t)_{t \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_{\mathbf{e}} \tag{4.7}$$

(см. [1, предложение 3.4]) по очевидному правилу

$$(\tilde{\mathbf{h}}_0 \triangleq (x^0, x^0))\,\&\,(\tilde{\mathbf{h}}_t \triangleq \mathbf{h}_{\nu+t}\quad \forall\, t \in \overline{1, N}). \tag{4.8}$$

Из (4.7), (4.8) следует, что (по исходному решению «большой» задачи) определено значение $\mathfrak{B}_{\mathbf{e}}[(\tilde{\mathbf{h}}_t)_{t \in \overline{0,N}}] \in \mathbb{R}_+$, а также

$$\kappa \triangleq \mathfrak{B}_{\mathbf{e}}[(\tilde{\mathbf{h}}_t)_{t \in \overline{0,N}}] - \mathbb{V} \in \mathbb{R}_+. \tag{4.9}$$

Подчеркнем, что для определения $\mathbb{V}$ можно использовать менее затратный алгоритм 1^0.

Предложение 4.1. *Справедливо равенство*

$$\hat{\mathfrak{C}}_\eta[(\hat{\mathbf{h}}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}] = \hat{\mathfrak{C}}_\lambda[(\mathbf{h}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}] - \kappa. \tag{4.10}$$

Доказательство предложения приведено в [1, §§ 4, 5]. Подчеркнем, однако, что в настоящем варианте мы ориентируемся на определение κ (4.9) посредством алгоритма 1^0. Из предложения 4.1 вытекает, что

$$V \leqslant \hat{\mathfrak{C}}_\lambda[(\mathbf{h}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}] - \kappa. \tag{4.11}$$

§ 5. Построение оптимизирующей вставки, 2

В настоящем параграфе полагаем выполненным равенство $\nu = \mathbf{n} - N$ (данный случай в [1] не рассматривался); исследуется финальная оптимизирующая вставка. В этом случае несколько иначе определяются функции (3.9). Итак, полагаем в настоящем параграфе, что при $z \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$

$$(\mathbf{c}(z, K) \triangleq \mathbf{c}^{\natural}(z, \Lambda^1(K))) \,\&\, (c_j(z, K) \triangleq c^{\natural}_{\Lambda(j)}(z, \Lambda^1(K)) \quad \forall j \in \overline{1, N}). \tag{5.1}$$

Кроме того, полагаем в данном параграфе, что

$$f(x) \triangleq f^{\natural}(x) \quad \forall x \in \mathbb{X}. \tag{5.2}$$

Соответственно, значения (3.10) определяются в терминах (5.1), (5.2); мы получаем новую локальную задачу. Как уже отмечалось, $\tilde{\mathbf{D}} \neq \varnothing$ и для некоторых $\alpha^0 \in \mathbf{A}$ и $(z_t^0)_{t \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha^0}$ реализуется равенство (4.3); иными словами, $(\alpha^0, (z_t^0)_{t \in \overline{0,N}}) \in \tilde{\mathbf{D}}$ есть оптимальное ДР упомянутого варианта задачи (3.11). В терминах данного ДР определяем $\eta \in \mathcal{A}$, используя (3.4) и (4.4); в данном случае

$$(\eta(t) = \lambda(t) \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n} - N}) \,\&\, (\eta(t) = (\Lambda \circ \alpha^0)(t - \mathbf{n} + N) \quad \forall t \in \overline{\mathbf{n} - N + 1, \mathbf{n}}).$$

Кроме того, полагаем, что $(\hat{\mathbf{h}}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \tilde{\mathfrak{Z}}$ в данном случае имеет следующий вид:

$$(\hat{\mathbf{h}}_t \triangleq \mathbf{h}_t \quad \forall t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}) \,\&\, (\hat{\mathbf{h}}_t \triangleq z^0_{t - \mathbf{n} + N} \quad \forall t \in \overline{\mathbf{n} - N + 1, \mathbf{n}});$$

при этом, как легко видеть, $(\hat{\mathbf{h}}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\eta$, а $(\eta, (\hat{\mathbf{h}}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}) \in \mathbf{D}$. Итак, и в данном случае имеем (4.6). Вместе с тем по правилу (4.8) определяем трассу $(\tilde{\mathbf{h}}_t)_{t \in \overline{0,N}}$ (4.7), для которой реализуется значение κ (4.9).

Предложение 5.1. *При* $\nu = \mathbf{n} - N$ *справедливо равенство* (4.10).

Доказательство в идейном отношении осуществляется по схеме [1, § 5], но является более простым и по этой причине в данном изложении опущено. Как следствие, мы получаем (и в случае $\nu = \mathbf{n} - N$) оценку (4.11).

§ 6. Анализ исходного допустимого решения «большой» задачи

Из построений двух предыдущих параграфов следует, что во всех возможных случаях мы располагаем неравенством (4.11), позволяющим оценивать значение «большой» задачи в терминах стоимости ее исходного ДР и величины κ (4.9), которая, в свою очередь, определяется стоимостью фрагмента упомянутого ДР и экстремумом локальной задачи. На данном этапе знание оптимального ДР локальной задачи не требуется: оценку (4.11) можно получить, применяя алгоритм 1^0; варьируя ν в пределах $\overline{0, \mathbf{n} - N}$, можно оптимизировать данную оценку. В самом деле, κ в (4.9) зависит (при фиксации N) от $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$, т. е. $\kappa = \kappa(\nu)$. Максимизируя $\kappa(\nu)$ посредством выбора ν, мы уточняем оценку (4.11). Это соображение можно положить в основу построения при выборе параметра ν. А именно: конкретный выбор параметра ν из вышеупомянутых соображений максимизации значения $\kappa(\nu)$ предлагается осуществить, используя только алгоритм 1^0. После достижения требуемого (или приемлемого) значения $\kappa(\nu)$ и нахождения соответствующего ему значения $\nu = \nu_0$ следует (при данном ν_0) задействовать для решения локальной задачи алгоритм 2^0, т. е. реализовать «окончательную» (для данного этапа) оптимизирующую вставку, в результате которой будет уже скорректировано исходное решение $(\lambda, (\mathbf{h}_t)_{t \in \overline{0,N}})$: имеется в виду его замена получившейся при $\nu = \nu_0$ версией $(\eta, (\hat{\mathbf{h}}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}})$ (имеется в виду построение локального решения $(\alpha^0, (z_t^0)_{t \in \overline{0,N}})$, в процессе которого однократно (на этапе коррекции $(\lambda, (\mathbf{h}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}})$) следует использовать алгоритм 2^0). Итак, менее затратный (в смысле ресурсов памяти ЭВМ) алгоритм 1^0 используется при поиске локализации вставки, а сама «окончательная» вставка конструируется с применением 2^0.

Замечание 6.1. Вышеупомянутая схема может быть реализована в режиме итераций, когда скорректированное ДР $(\eta, (\hat{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}})$ заменяет $(\lambda, (\mathbf{h}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}})$ и используется в качестве новой эвристики, подлежащей улучшению посредством вставки, локализация которой определяется с использованием алгоритма 1^0, после чего для коррекции данной эвристики используется алгоритм 2^0 (имеется в виду решение локальной задачи). Далее процедура повторяется.

§ 7. Заключительные замечания

В работе указана одна из возможностей непосредственного применения ДП для решения задач маршрутизации большой размерности. Речь идет о локальных улучшениях, реализуемых посредством оптимизирующих вставок умеренной размерности; как уже отмечалось, такие вставки могут формироваться многократно при использовании итерационных режимов (см. [2, 3]). Тем самым реализуется поэтапное улучшение результата. Существенно то обстоятельство, что при построении улучшающих вставок оказывается возможным задействовать оценки глобального экстремума основной задачи, определяемые без построения локальных оптимизирующих решений: удается применять локальные версии ДП, в которых определяются лишь сами экстремумы (локальных задач), что позволяет на этапах поиска локализации вставок достигать некоторой экономии ресурсов памяти вычислителя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ченцов А.Г. Беллмановские вставки в задаче маршрутизации с ограничениями и усложненными функциями стоимости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 4. С. 122–141. DOI: 10.20537/vm140410
2. Ченцов А.А., Ченцов А.Г. Задача последовательного обхода мегаполисов // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2014. Т. 19. Вып. 2. С. 454–475.
3. Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Локальные вставки на основе динамического программирования в задаче маршрутизации с ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 2. С. 56–75. DOI: 10.20537/vm140204
4. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2008. 240 с.
5. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
6. Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
7. Ченцов А.Г., Ченцов А.А. К вопросу о нахождении значения маршрутной задачи с ограничениями // Проблемы управления и информатики. 2016. № 1. С. 41–54.
8. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
9. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.
10. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.
11. Gutin G., Punnen A.P. The traveling salesman problem and its variations. Springer, 2002. 850 p.
12. Cook W.J. In pursuit of the traveling salesman: Mathematics at the limits of Computation. Princeton University Press, 2012. xvi+228 p.
13. Иванко Е.Е. Устойчивость и неустойчивость в дискретных задачах. Екатеринбург: УрО РАН, 2013. 208 с.
14. Литтл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и математические методы. 1965. Т. 1. Вып. 1. С. 90–107.
15. Коробкин В.В., Сесекин А.Н., Ташлыков О.Л., Ченцов А.Г. Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения безопасности и эффективности эксплуатации атомных станций. М.: Новые технологии, 2012. 234 с.

16. Петунин А.А. О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестник УГАТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. Т. 13. № 2 (35). С. 280–286.
17. Фроловский В.Д. Автоматизация проектирования управляющих программ тепловой резки металла на оборудовании с ЧПУ // Информационные технологии в проектировании и производстве. 2005. № 4. С. 63–66.
18. Ганелина Н.Д., Фроловский В.Д. Исследование методов построения кратчайшего пути обхода отрезков на плоскости // Сибирский журнал вычислительной математики. 2006. Т. 9. № 3. С. 241–252.
19. Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. К вопросу о маршрутизации движения инструмента в машинах листовой резки с числовым программным управлением // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2013. Вып. 2 (169). С. 103–111.
20. Верхотуров М.А., Тарасенко П.Ю. Математическое обеспечение задачи оптимизации пути режущего инструмента при плоском фигурном раскрое на основе цепной резки // Вестник УГАТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2008. Т. 10. № 2 (27). С. 123–130.
21. Wang G.G., Xie S.Q. Optimal process planning for a combined punch-and-laser cutting machine using ant colony optimization // International Journal of Production Research. 2005. Vol. 43. Issue 11. P. 2195–2216. DOI: 10.1080/00207540500070376
22. Lee M.K., Kwon K.B. Cutting path optimization in CNC cutting processes using a two-step genetic algorithm // International Journal of Production Research. 2006. Vol. 44. Issue 24. P. 5307–5326. DOI: 10.1080/00207540600579615
23. Ye J., Chen Z.G. An optimized algorithm of numerical cutting–path control in garment manufacturing // Advanced Materials Research. 2013. Vol. 796. P. 454–457. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.796.454
24. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2002. 960 с.
25. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
26. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
27. Ченцов А.Г. Задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 170–190.
28. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Элементы динамического программирования в экстремальных задачах маршрутизации // Проблемы управления. 2013. № 5. С. 12–21.
29. Ченцов А.Г. К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 59–82. DOI: 10.20537/vm130107

Поступила в редакцию 15.10.2016

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

A. G. Chentsov

The Bellmann insertions in route problems with constraints and complicated cost functions. II

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 565–578 (in Russian).

Keywords: insertion, dynamic programming, route.

MSC2010: 28A33

DOI: 10.20537/vm160410

The route problem with precedence conditions and cost functions depending on the jobs list is considered; these singularities correspond to engineering applications. In particular, the above-mentioned singularities exist in statements of some problems arising in nuclear energetics and in machines with numerical control. Problems involved in sequentially circuiting megalopolises and in carrying out some (interior) work during

these circuits are investigated. A procedure for local improvement of heuristic solutions for problems of perceptible dimension is proposed; this procedure exploits insertions on the dynamic programming base. Dynamic programming is realized in the form of a variant that does not provide for construction of a “full” array of values of the Bellman function. The search for localization of an insertion involves restricting to the variant of the Bellman procedure that realizes the extremum of the (local) criterion without constructing a corresponding solution in the form of a route-track pair. A more complete and more cost-intensive (in the sense of memory resources) procedure including determination of the above-mentioned (local optimal) solution is planned after the choice of the insertion localization.

REFERENCES

1. Chentsov A.G. The Bellmann insertions in the route problem with constraints and complicated cost functions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, issue 4, pp. 122–141 (in Russian). DOI: 10.20537/vm140410
2. Chentsov A.A., Chentsov A.G. The problem of megalopolises consistent detouring, *Vestn. Tambov. Univ. Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2014, vol. 19, no. 2, pp. 454–475 (in Russian).
3. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. Local dynamic programming incuts in routing problems with restrictions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, issue 2, pp. 56–75 (in Russian). DOI: 10.20537/vm140204
4. Chentsov A.G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadanii: voprosy teorii* (Extremal problems of routing and assignment of tasks: questions of theory), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, Institute of Computer Science, 2008, 240 p.
5. Bellman R. Application of dynamic programming method for the traveling salesman problem, *Kibernet. Sb.*, Moscow: Mir, 1964, vol. 9, pp. 219–228 (in Russian).
6. Kheld M., Karp R.M. Application of dynamic programming method for the sorting problems, *Kibernet. Sb.*, Moscow: Mir, 1964, vol. 9, pp. 202–218 (in Russian).
7. Chentsov A.G., Chentsov A.A. On the question of finding the value of routing problem with constraints, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2016, vol. 48, no. 2, pp. 11–27. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i2.30
8. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. I: Theoretical issues, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 9, pp. 1147–1173.
9. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman's problem. Exact methods, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 10, pp. 1303–1324.
10. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Approximate algorithms, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 11, pp. 1459–1479.
11. Gutin G., Punnen A.P. *The traveling salesman problem and its variations*, Springer, 2002, 850 p.
12. Cook W.J. *In pursuit of the traveling salesman: Mathematics at the limits of Computation*, Princeton University Press, 2012, xvi+228 p.
13. Ivanko E.E. *Ustoichivost' i neustoichivost' v diskretnykh zadachakh* (Stability and instability in discrete problems), Yekaterinburg: Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2013, 208 p.
14. Little J., Murty K., Sweeney D., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem, *Ekonom. Mat. Met.*, 1965, vol. 1, no. 1, pp. 90–107 (in Russian).
15. Korobkin V.V., Sesekin A.N., Tashlykov O.L., Chentsov A.G. *Metody marshrutizatsii i ikh prilozheniya v zadachakh povysheniya bezopasnosti i effektivnosti ekspluatatsii atomnykh stantsii* (Routing methods and their applications in problems of improving the safety and efficiency of operation of nuclear power plants), Moscow: Novye tekhnologii, 2012, 234 p.
16. Petunin A.A. About some strategies of the programming of tool route by developing of control programs for thermal cutting machines, *Vestnik UGATU*, 2009, vol. 13, no. 2 (35), pp. 280–286 (in Russian).
17. Frolovskii V.D. Automation of designing control programs for thermal cutting of metal by CNC equipment, *Informatsionnye Tekhnologii v Proektirovanii i Proizvodstve*, 2005, no. 4, pp. 63–66 (in Russian).
18. Ganelina N.D., Frolovskii V.D. On constructing the shortest circuits on a set of line segments, *Sib. Zh. Vychisl. Mat.*, 2006, vol. 9, no. 3, pp. 241–252 (in Russian).
19. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. To the question about instrument routing in the automated machines of the sheet cutting, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Computer Science. Telecommunication and Control Systems*, 2013, issue 2 (169), pp. 103–111 (in Russian).
20. Verkhoturov M.A., Tarasenko P.Yu. The software for the problem of the cutting instrument route optimization based on chain cutting when a flat figure is cut, *Vestnik UGATU*, 2008, vol. 10, no. 2 (27), pp. 123–130 (in Russian).

21. Wang G.G., Xie S.Q. Optimal process planning for a combined punch-and-laser cutting machine using ant colony optimization, *International Journal of Production Research*, 2005, vol. 43, issue 11, pp. 2195–2216. DOI: 10.1080/00207540500070376
22. Lee M.K., Kwon K.B. Cutting path optimization in CNC cutting processes using a two-step genetic algorithm, *International Journal of Production Research*, 2006, vol. 44, issue 24, pp. 5307–5326. DOI: 10.1080/00207540600579615
23. Ye J., Chen Z.G. An optimized algorithm of numerical cutting–path control in garment manufacturing, *Advanced Materials Research*, 2013, vol. 796, pp. 454–457. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.796.454
24. Cormen T., Leiserson Ch., Rivest R. *Introduction to algorithms* (1st ed.), MIT Press and McGraw-Hill, 1990. Translated under the title *Algoritmy. Postroenie i analiz* (The algorithms. Construction and analysis), Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 1999, 960 p.
25. Kuratovskii K., Mostovskii A. *Teoriya mnozhestv* (Theory of sets), Moscow: Mir, 1970, 416 p.
26. Dieudonne J. *Osnovy sovremennogo analiza* (Foundations of modern analysis), Moscow: Mir, 1964, 430 p.
27. Chentsov A.G. Problem of successive megalopolis traversal with the precedence conditions, *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, issue 4, pp. 728–744. DOI: 10.1134/S0005117914040122
28. Chentsov A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. Elements of dynamic programming in extremal routing problems, *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, issue 3, pp. 537–550. DOI: 10.1134/S0005117914030102
29. Chentsov A.G. To question of routing of works complexes, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, issue 1, pp. 59–82 (in Russian). DOI: 10.20537/vm130107

Received 15.10.2016

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru