ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 4

УДК 517.977.58

© *В. Н. Ушаков, А. А. Ершов*

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ С ФИКСИРОВАННЫМ МОМЕНТОМ ОКОНЧАНИЯ[1]

Рассматривается нелинейная управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве на конечном промежутке времени. Изучается задача о сближении системы с заданным компактом в конечный момент времени. Обсуждается проблема приближенного решения задачи о сближении. Используется подход к построению приближенного решения задачи, основу которого составляют конструкции, базирующиеся на понятии множества разрешимости задачи о сближении. Вводится понятие управления-компенсатора как с дополнительными управляющими воздействиями, так и без них. Предлагается новая схема приближенного попятного построения множества разрешимости, а также схема конструирования программного управления, разрешающего приближенно задачу о сближении. В ней управляющее воздействие разбивается на «основное» и «компенсирующее». Построена оценка отклонения управляемой системы от целевого множества в конечный момент времени и тем самым показано, что использование в процессе управления дополнительного управления-компенсатора может существенно улучшить результат управления системой.

Ключевые слова: задача управления, задача о сближении, управление-компенсатор, управляемая система, интегральная воронка, множество разрешимости.

DOI: 10.20537/vm160409

Введение

Рассматривается нелинейная управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве на конечном промежутке времени. Предполагается, что управления, воздействующие на систему, стеснены геометрическими ограничениями. Изучается задача о сближении управляемой системы с заданным компактом в фазовом пространстве системы в конечный момент времени. Основу представленного в работе подхода составляет построение решений задачи, базирующееся на использовании так называемых множеств разрешимости W [1–4]. Эти множества, если их рассматривать с точки зрения их эволюции в так называемом «обратном» времени, представляют собой интегральные воронки управляемой системы, записанной в «обратном» времени. Поэтому приближенное построение множества разрешимости W можно разворачивать в «обратном» времени как последовательное пошаговое построение множеств достижимости управляемой системы, записанной в «обратном» времени. Мы ведем здесь речь о приближенном построении решения задачи о сближении, поскольку точное построение решения задачи возможно лишь в редких случаях. В настоящей работе приближенное построение множества W реализуется в виде построения некоторого конечного множества $\widehat{\mathcal{W}}^a$ в пространстве позиций (t, x) управляемой системы. В работе приведено описание процедуры построения на заданном промежутке времени программного управления, разрешающего приближенно задачу о сближении системы из начальной позиции $(t_0, x^{(0)})$, содержащейся в $\widehat{\mathcal{W}}^a$. Описанная в работе процедура построения разрешающего управления дополняет хорошо известные в теории управления способы управления, в основе которых лежит принцип экстремального прицеливания Н.Н. Красовского [1]. В работе развиваются конструкции приближенного решения задачи о сближении, изложенные ранее в [1–4]. Особенностью работы является то, что она предполагает наличие более слабых условий на управляемую систему. Та часть работы, в которой обсуждается проблематика, связанная с конструированием интегральных воронок и множеств разрешимости, близка к работам [2, 4–7].

[1]Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 15–11–10018).

§ 1. Задача о сближении

На промежутке времени $[t_0, \theta]$, $t_0 < \theta < \infty$, задана нелинейная система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u); \tag{1.1}$$

здесь t — время, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, u — вектор управляющих воздействий, удовлетворяющий включению

$$u \in P,$$

где $P \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^p)$, $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^p)$ — метрическое пространство с хаусдорфовой метрикой, в котором элементами являются компакты в $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^p$ — p-мерное евклидово пространство.

Предполагается, что выполнены следующие условия.

Условие A. Вектор-функция $f(t, x, u)$ определена и непрерывна на $[t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P$, и для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ найдется константа $L = L(D) \in (0, \infty)$ такая, что

$$||f(t, x^{(1)}, u) - f(t, x^{(2)}, u)|| \leqslant L||x^{(1)} - x^{(2)}||, \quad (t, x^{(i)}, u) \in D \times P, \ \ i = 1, 2; \tag{1.2}$$

здесь $||f||$ — норма вектора f в евклидовом пространстве.

Условие B. Существует такая константа $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$||f(t, x, u)|| \leqslant \gamma(1 + ||x||), \quad (t, x, u) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P. \tag{1.3}$$

Замечание 1. Учитывая условие A, получаем, что для любой области D из этого условия функция

$$\omega^*(\delta) = \max\{||f(t_*, x, u) - f(t^*, x, u)|| : |t_* - t^*| \leqslant \delta, \ (t_*, x, u) \text{ и } (t^*, x, u) \text{ из } D \times P\}, \ \delta > 0, \tag{1.4}$$

такова, что $\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$ и при этом

$$d(F(t_*, x_*), F(t^*, x^*)) \leqslant \omega^*(\delta) + L||x_* - x^*||, \quad (t_*, x_*) \text{ и } (t^*, x^*) \text{ из } D, \ |t_* - t^*| \leqslant \delta;$$

здесь $d(F_*, F^*)$ — хаусдорфово расстояние между F_* и F^* из $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 2. В этой работе мы не предполагаем выполнение следующего условия.

Условие C. Множество $\mathcal{F}(t, x) = f(t, x, P) = \{f(t, x, u) : u \in P\} \subset \mathbb{R}^n$ выпукло при любых $(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$.

Условие C, которое наряду с условиями A, B использовалось в работах [4, 6, 7], существенно ограничивает класс исследуемых задач о сближении.

Напомним, что под допустимым управлением $u(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, в системе (1.1) понимаем измеримую по Лебегу на $[t_0, \theta]$ вектор-функцию $u(t) \in P$, $t \in [t_0, \theta]$. Обозначим через $X(t^*, t_*, x_*)$ $(x_* \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \theta)$ множество достижимости в $\mathbb{R}^n$ системы (1.1), отвечающее моменту t^* и начальному условию $x(t_*) = x_*$;

$$X(t_*, x_*) = \bigcup_{t^* \in [t_*, \theta]} (t^*, X(t^*, t_*, x_*)) \quad ((t_*, x_*) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n)$$

— интегральная воронка системы (1.1) с начальной позицией (t_*, x_*);

$$X(t_*, X_*) = \bigcup_{x_* \in X_*} X(t_*, x_*),$$

где $(t_*, X_*) = \{(t_*, x_*) : x_* \in X_*\}$, $X_* \subset \mathbb{R}^n$.

При условиях A и B множество $\mathrm{cl}\, X(t^*, t_*, x_*)$ совпадает с множеством разрешимости $Y(t^*, t_*, x_*)$ дифференциального включения (д. в.)

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x) = \mathrm{co}\, \mathcal{F}(t, x), \quad x(t_*) = x_*, \tag{1.5}$$

которое удовлетворяет включению $Y(t^*, t_*, x_*) \in \mathrm{comp}\,(\mathbb{R}^n)$. Полагаем, что наряду с системой (1.1) задано множество $M \in \mathrm{comp}\,(\mathbb{R}^n)$ — целевое множество для (1.1) в задаче о сближении. Сформулируем следующие задачи, относящиеся к сближению системы (1.1) с M в момент θ.

Задача 1. Требуется выделить в $[t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ множество W всех тех исходных позиций (t_*, x_*) системы (1.1), для каждой из которых существует допустимое управление $u(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, переводящее систему (1.1) в момент θ на M (то есть $x(\theta) \in M$).

Множество W, следуя работам [1, 2, 4], будем называть множеством разрешимости задачи о сближении.

Задача 2. Пусть $(t_0, x^{(0)}) \in W$. Требуется построить допустимое управление $u^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, порождающее движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x^{(0)}$, системы (1.1), для которого $x^*(\theta) \in M$.

Так как в подавляющем большинстве задач о сближении мы не в состоянии выделить точно множество W, то мы будем рассматривать здесь вопрос о его приближенном конструировании. В связи с этим будем рассматривать и вопрос о приближенном конструировании управления $u^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, как управления, приводящего движение $x^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, системы (1.1) в некоторую достаточно малую окрестность множества M.

Для решения задачи 1 рассмотрим наряду с «прямым» временем $t \in [t_0, \theta]$ так называемое «обратное» время $\tau = t_0 + \theta - t \in [t_0, \theta]$ и сопоставим системе (1.1) управляемую систему, отвечающую «обратному» времени τ:

$$\frac{dz}{d\tau} = h(\tau, z, v), \quad \tau \in [t_0, \theta], \tag{1.6}$$

а дифференциальному включению (1.5) — дифференциальное включение

$$\frac{dz}{d\tau} \in H(\tau, z) = \mathrm{co}\, \mathscr{H}(\tau, z), \quad z(\tau_*) = z_*; \tag{1.7}$$

здесь $h(\tau, z, v) = -f(t_0 + \theta - \tau, z, v)$, $\mathscr{H}(\tau, z) = \{h(\tau, z, v) : v \in P\}$, $(\tau, z, v) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P$.

Символами $Z(t_0, z^{(0)}) \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ и $\widehat{Z}(t_0, z^{(0)}) \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ обозначим соответственно интегральные воронки системы (1.6) и дифференциального включения (1.7) с исходной позицией $(t_0, z^{(0)})$, а символами $Z = Z(t_0, M)$ и $\widehat{Z} = \widehat{Z}(t_0, M)$ — соответствующие интегральные воронки системы (1.6) и дифференциального включения (1.7) с исходным множеством $(t_0, M) = \{(t_0, z^{(0)}) : z^{(0)} \in M\}$.

Таким образом, $Z(t_0, M) = \bigcup\limits_{z^{(0)} \in M} Z(t_0, z^{(0)})$ и $\widehat{Z}(t_0, M) = \bigcup\limits_{z^{(0)} \in M} \widehat{Z}(t_0, z^{(0)})$. Справедливы равенства $\widehat{Z}(t_0, z^{(0)}) = \mathrm{cl}\, Z(t_0, z^{(0)})$, $(t_0, z^{(0)}) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ и $\widehat{Z}(t_0, M) = \mathrm{cl}\, Z(t_0, M)$.

Введем в рассмотрение множества $W \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ и $\widehat{W} \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$, задав сечения $W(t) = \{w \in \mathbb{R}^n : (t, w) \in W\}$ и $\widehat{W}(t) = \{w \in \mathbb{R}^n : (t, w) \in \widehat{W}\}$, $t \in [t_0, \theta]$, этих множеств равенствами

$$W(t) = Z(\tau) = \{z \in \mathbb{R}^n : (\tau, z) \in Z\}$$

и

$$\widehat{W}(t) = \widehat{Z}(\tau) = \{z \in \mathbb{R}^n : (\tau, z) \in \widehat{Z}\},$$

$t = t_0 + \theta - \tau$, $\tau \in [t_0, \theta]$.

При $t = t_0 + \theta - \tau$, $\tau \in [t_0, \theta]$ справедливы равенства

$$\widehat{W}(t) = \mathrm{cl}\, W(t), \qquad \widehat{Z}(\tau) = \mathrm{cl}\, Z(\tau).$$

Из того, что $\widehat{Z}$ — компакт в $[t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$, следует, что $\widehat{W}$ — компакт в $[t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$.

Из определения множества W следует, что W есть множество разрешимости в задаче 1, т. е. W есть множество всех тех исходных позиций $(t_*, x_*) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$, из которых разрешима задача о сближении системы (1.1) с M в момент θ.

Принимая во внимание условия A, B, наложенные на систему (1.1), и компактность целевого множества M, можем считать, что множества Z и W, $\widehat{Z}$ и $\widehat{W}$, а также аппроксимирующие их множества, которые возникнут в процессе последующих построений, содержатся в некоторой достаточно большой ограниченной и замкнутой цилиндрической области

$$D = \{(\tau, z) : (\tau, z) \in [t_0, \theta] \times D_*\} = \{(t, x) : (t, x) \in [t_0, \theta] \times D_*\}, \quad D_* \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n).$$

Заметим, что выбор области D, имеющей цилиндрическую форму, обусловлен потребностью работать с областью, имеющей форму, не зависящую от направления времени. Именно эту область и связанные с ней величины мы будем использовать в последующих построениях и рассуждениях. В частности, будем использовать константу

$$K = \max\{||f(t, x, u)|| : (t, x, u) \in D \times P\} < +\infty.$$

При конструировании приближенного решения задачи 1 возьмем за ориентир для построения множество $\widehat{W}$, близкое к W (в том смысле, что $\widehat{W} = \operatorname{cl} W$). При этом мы будем конструировать приближенно множество $\widehat{Z} = \operatorname{cl} Z$ и, стало быть, множество Z.

Итак, введем на оси «обратного» времени τ конечное разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \ldots, \tau_N = \theta\}$ отрезка $[t_0, \theta]$ с одинаковыми шагами $\Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i = \Delta > 0$, $i = \overline{0, N-1}$, где диаметр $\Delta = \Delta(\Gamma)$ разбиения Γ считается малым.

Сечения $\widehat{Z}(\tau_i) \subset \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0, N-1}$, интегральной воронки $\widehat{Z} = \widehat{Z}(t_0, M)$ дифференциального включения (1.7) удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\widehat{Z}(\tau_{i+1}) = \widehat{Z}(\tau_{i+1}, \tau_i, \widehat{Z}(\tau_i)), \quad i = \overline{0, N-1}, \tag{1.8}$$

где $\widehat{Z}(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ — множество достижимости д. в. (1.7) в момент $\tau^* \in [t_0, \theta]$ с исходным множеством (τ_*, Z_*), $Z_* \subset \mathbb{R}^n$, отвечающим моменту $\tau_* \in [t_0, \tau^*]$.

В идеале нашей целью является точное вычисление при малых $\Delta > 0$ множеств $\widehat{Z}(\tau_{i+1}, \tau_i, \widehat{Z}(\tau_i))$, $i = \overline{0, N-1}$. Однако такое вычисление удается реализовать лишь в относительно редких случаях. Поэтому мы вынуждены прибегнуть к приближенному вычислению этих множеств.

В конечном итоге вместо множеств $Z(\tau_{i+1})$, $i = \overline{0, N-1}$, в результате приближенного вычисления мы получим их некоторые аппроксимации $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_{i+1})$, $i = \overline{0, N-1}$, представляющие собой конечные множества в $\mathbb{R}^n$.

Описание схемы построения множеств $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_{i+1})$ начнем с описания схемы построения множеств $\widehat{Z}^a(\tau_{i+1})$, $i = \overline{0, N-1}$, которые затем сузим до множеств $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_{i+1})$ в случае необходимости.

В связи с этим зададим многозначное отображение $(\tau^*, \tau_*, Z_*) \mapsto Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, Z_*) \subset \mathbb{R}^n$ равенством

$$Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, Z_*) = \bigcup_{z_* \in Z_*} Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, z_*),$$

$t_0 \leqslant \tau_* < \tau^* \leqslant \theta$, Z_* — конечное множество в $\mathbb{R}^n$, $\delta = \tau^* - \tau_*$.

Здесь $Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, z_*) = z_* + \delta H^{(\delta)}(\tau_*, z_*)$, где отображение $(\tau_*, z_*) \mapsto H^{(\delta)}(\tau_*, z_*)$ — некоторая конечнозначная аппроксимация отображения $(\tau_*, z_*) \mapsto H(\tau_*, z_*)$, $(\tau_*, z_*) \in D$, удовлетворяющая неравенству

$$\sup_{(\tau_*, z_*) \in D} d(H(\tau_*, z_*), H^{(\delta)}(\tau_*, z_*)) \leqslant \zeta^*(\delta), \quad \delta \in (0, \infty),$$

где функция $\zeta^*(\delta)$ выбрана удовлетворяющей условию $\zeta^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$.

Таким образом, многозначное отображение $(\tau^*, \tau_*, Z_*) \mapsto Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ есть конечнозначное отображение.

Отображение $(\tau_*, z_*) \mapsto H^{(\delta)}(\tau_*, z_*)$, $(\tau_*, z_*) \in D$, и функцию $\zeta^*(\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$, можно задавать различными способами. Уточним способ их задания в этой работе.

Для этого сначала введем отображение

$$(\tau_*, z_*) \mapsto H_\delta(\tau_*, z_*) = \operatorname{co} \mathscr{H}_\delta(\tau_*, z_*), \quad (\tau_*, z_*) \in D, \quad \delta > 0,$$

где $\mathscr{H}_\delta(\tau_*, z_*) = h(\tau_*, z_*, P^{(\delta)})$, $P^{(\delta)}$ — конечное множество в P такое, что $d(P, P^{(\delta)}) \leqslant \delta$ ($d(P, P^{(\delta)})$ — хаусдорфово расстояние между P и $P^{(\delta)}$).

Введем функцию на $(0, \infty)$:

$$\xi^\nabla(\delta) = \max\{||h(\tau_*, z_*, v^{(1)}) - h(\tau_*, z_*, v^{(2)})|| : (\tau_*, z_*, v^{(1)}) \text{ и } (\tau_*, z_*, v^{(2)}) \text{ из } D \times P, ||v^{(1)} - v^{(2)}|| \leqslant \delta\}.$$

Полагая $\zeta^*(\delta) = 2\zeta^\nabla(\delta)$, получаем $\zeta^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$.

Тогда для любого вектора $h_* = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \alpha_k h(\tau_*, z_*, v_k) \in H(\tau_*, z_*)$, $(\tau_*, z_*) \in D$, $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$, $\alpha_k \geqslant 0$ и $v_k \in P$, $k = \overline{1, n+1}$, найдется набор точек $v_k^{(\delta)} \in P^{(\delta)}$, $k = \overline{1, n+1}$, такой, что $||v_k^{(\delta)} - v_k|| \leqslant \delta$, $k = \overline{1, n+1}$, и при этом

$$\Big\|h_* - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k h(\tau_*, z_*, v_k^{(\delta)})\Big\| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k ||h(\tau_*, z_*, v_k) - h(\tau_*, z_*, v_k^{(\delta)})|| \leqslant \zeta^\nabla(\delta). \tag{1.9}$$

Введем также в рассмотрение n-мерный симплекс $s_n = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum\limits_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1 \text{ и } \alpha_k \geqslant 0,\ k = \overline{1, n+1}\}$.

В симплексе s_n выделим некоторое конечное множество $s_n^{(\delta)}$ точек $\alpha^{(\delta)} = (\alpha_1^{(\delta)}, \alpha_2^{(\delta)}, \ldots, \alpha_{n+1}^{(\delta)})$ такое, что

$$d^*(s_n^{(\delta)}, s_n) \leqslant \frac{\zeta^*(\delta)}{2(n+1)K}, \quad \delta > 0; \tag{1.10}$$

здесь $d^*(s_n^{(\delta)}, s_n)$ — расстояние между множествами $s_n^{(\delta)}$ и s_n, определяемое равенством

$$d^*(s_n^{(\delta)}, s_n) = \max\Big(\max_{\alpha \in s_n} \min_{\alpha^{(\delta)} \in s_n^{(\delta)}} ||\alpha - \alpha^{(\delta)}||^*, \max_{\alpha^{(\delta)} \in s_n^{(\delta)}} \min_{\alpha \in s_n} ||\alpha - \alpha^{(\delta)}||^*\Big),$$

где $||\alpha - \alpha^{(\delta)}||^* = \max\limits_{k = \overline{1, n+1}} |\alpha_k - \alpha_k^{(\delta)}|$.

Тогда для любого вектора $h_\delta = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \alpha_k h(\tau_*, z_*, v_k^{(\delta)}) \in H_\delta(\tau_*, z_*)$, $(\tau_*, z_*) \in D$ ($\sum\limits_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$, $\alpha_k \geqslant 0$ и $v_k^{(\delta)} \in P^{(\delta)}$, $k = \overline{1, n+1}$), найдется $\alpha^{(\delta)} = (\alpha_1^{(\delta)}, \alpha_2^{(\delta)}, \ldots, \alpha_{n+1}^{(\delta)}) \in s_n^{(\delta)}$, при котором

$$||h_\delta - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(\delta)} h(\tau_*, z_*, v_k^{(\delta)})|| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |\alpha_k - \alpha_k^{(\delta)}| \cdot ||h(\tau_*, z_*, v_k^{(\delta)})|| \leqslant (n+1) \frac{\zeta^*(\delta)}{2(n+1)K} K \leqslant \zeta^\nabla(\delta). \tag{1.11}$$

Учитывая (1.9) и (1.11), получим: для любого $h_* = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \alpha_k h(\tau_*, z_*, v_k) \in H(\tau_*, z_*)$, $(\tau_*, z_*) \in D$, $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$, $\alpha_k \geqslant 0$ и $v_k \in P$, $k = \overline{1, n+1}$, найдется конечный набор $v_k^{(\delta)} \in P^{(\delta)}$, $k = \overline{1, n+1}$ и $\alpha^{(\delta)} = (\alpha_1^{(\delta)}, \alpha_2^{(\delta)}, \ldots, \alpha_{n+1}^{(\delta)}) \in s_n^{(\delta)}$ такие, что

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k h(\tau_*, z_*, v_k) - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(\delta)} h(\tau_*, z_*, v_k^{(\delta)})\Big\| \leqslant \zeta^\nabla(\delta) + \zeta^\nabla(\delta) = \zeta^*(\delta), \quad \delta > 0.$$

Отображение $(\tau_*, z_*) \mapsto H^{(\delta)}(\tau_*, z_*)$, $(\tau_*, z_*) \in D$, зададим равенством

$$H^{(\delta)}(\tau_*, z_*) = \{h^{(\delta)} = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(\delta)} h(\tau_*, z_*, v_k^{(\delta)}) : \alpha^{(\delta)} \in s_n^{(\delta)}, v_k^{(\delta)} \in P^{(\delta)}, k = \overline{1, n+1}\}.$$

Замечание 3. Считаем, что выбор того или иного вектора $h^{(\delta)} \in H^{(\delta)}(\tau_*, z_*)$ в процессе конструирования разрешающего управления $u^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, в задаче о сближении с M из начальной позиции $(t_0, x^{(0)})$ системы (1.1) означает, что мы вместе с тем знаем и запоминаем $\alpha^{(\delta)} \in s_n^{(\delta)}$ и $v_k^{(\delta)} \in P^{(\delta)}$, $k = \overline{1, n+1}$, порождающие этот вектор $h^{(\delta)}$.

Замечание 4. Конечное множество $s_n^{(\delta)}$, удовлетворяющее (1.10), можно выделить из симплекса s_n следующим образом.

Полагаем $N = \left[\dfrac{2(n+1)K\sqrt{n}}{\zeta^*(\delta)}\right] + 1$, где с помощью квадратных скобок $[\ldots]$ обозначена операция взятия целой части числа.

В одномерном случае $(n = 1)$ можно задать $(N+1)$-точечное множество

$$s_1^{(\delta)} = \Big\{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1\Big\}.$$

В двумерном случае $(n = 2)$ можно выбрать $\dfrac{(N+1)(N+2)}{2}$-точечное множество

$$s_2^{(\delta)} = \Big\{(0,0), \Big(0, \frac{1}{N}\Big), \ldots, \Big(0, \frac{N-1}{N}\Big), (0,1),$$
$$\Big(\frac{1}{N}, 0\Big), \Big(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\Big), \Big(\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\Big), \ldots, \Big(\frac{1}{N}, \frac{N-1}{N}\Big), \Big(\frac{2}{N}, 0\Big), \ldots\Big\}.$$

При этом $s_2^{(\delta)} = \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{(N+1)(N+2)/2}$, где

$$y_k = \frac{1}{N}\Big[N - \sqrt{2k + \frac{1}{4}} + \frac{3}{2}\Big], \quad x_k = \frac{1}{N}\Big(k - 1 - \frac{1}{2}(N - y_k)(N + 1 - y_k)\Big).$$

В случае $n = 3$ построенное подобным образом множество $s_3^{(\delta)} = \Big\{(0,0,0), \Big(0, 0, \dfrac{1}{N}\Big), \ldots\Big\}$ будет состоять из $\dfrac{N^3 + 6N^2 + 11N + 6}{6}$ точек. Явная формула для k-го элемента быстро усложняется с увеличением размерности, поэтому в случае большой размерности удобно построить $s_n^{(\delta)}$ следующим образом: вначале взять конечное приближение

$$\mathscr{K}_n^{(\delta)} = \Big\{\Big(\frac{i_1}{N}, \frac{i_2}{N}, \ldots, \frac{i_n}{N}\Big)\Big\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{N}$$

n-мерного куба, а затем выбрать только те точки, которые принадлежат симплексу s_n, то есть $\dfrac{i_1}{N} + \dfrac{i_2}{N} + \ldots + \dfrac{i_n}{N} \leqslant 1$.

Итак, вернемся к описанию последовательности $\{\widehat{Z}^a(\tau_{i+1})\}$.

Определение последовательности $\{\widehat{Z}^a(\tau_{i+1})\}$ начнем с определения стартового множества $\widehat{Z}^a(\tau_0)$ для нее. Полагаем $\widehat{Z}^a(\tau_0) \subset \mathbb{R}^n$ состоящим из конечного числа точек и удовлетворяющим неравенству

$$d(\widehat{Z}^a(\tau_0), \widehat{Z}(\tau_0)) = d(\widehat{Z}^a(\tau_0), M) \leqslant \sigma^*(\Delta),$$

где $\sigma^*(\delta)$ — некоторая функция такая, что $\sigma^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$.

Множества $\widehat{Z}^a(\tau_{i+1})$, $i = \overline{0, N-1}$, задаем рекуррентно:

$$\widehat{Z}^a(\tau_{i+1}) = Z^{(\Delta)}(\tau_{i+1}, \tau_i, \widehat{Z}^a(\tau_i)).$$

При условиях A, B, которыми стеснена система (1.1), а следовательно, и система (1.6), а также тех условиях, которым удовлетворяют множества $\widehat{Z}^a(\tau_{i+1})$, $i = \overline{0, N-1}$, вкупе с выбранной нами цилиндрической областью $D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ $(\widehat{Z}^a(\tau_{i+1}) \subset D_*$, $i = \overline{0, N-1})$ имеет место оценка, идентичная оценке из [6]:

$$d(\widehat{Z}^a(\tau_i), \widehat{Z}(\tau_i)) \leqslant e^{L(\tau_i - \tau_0)}\big(\sigma^*(\Delta) + (\tau_i - \tau_0)(\zeta^*(\Delta) + \omega^*(\Delta) + LK\Delta)\big). \tag{1.12}$$

Из оценки (1.12) и определения функций $\omega^*(\delta)$, $\zeta^*(\delta)$, $\sigma^*(\delta)$ вытекает предельное соотношение

$$\max_{\tau_i\in\Gamma} d(\widehat{Z}^a(\tau_i),\widehat{Z}(\tau_i)) \to 0 \text{ при } \Delta=\Delta(\Gamma)\downarrow 0.$$

Отметим, что скорость стремления к нулю величины $\max\limits_{\tau_i\in\Gamma} d(\widehat{Z}^a(\tau_i),\widehat{Z}(\tau_i))$ при $\Delta=\Delta(\Gamma)\downarrow 0$ диктуется порядком стремления к нулю правой части оценки (1.12).

Таким образом, множества $\widehat{Z}^a(\tau_i)$, $i=\overline{0,N}$, суть конечные аппроксимации множеств $\widehat{Z}(\tau_i)$, $i=\overline{0,N}$, а вместе с ними и множеств $Z(\tau_i)$, $i=\overline{0,N}$, — сечений интегральной воронки $Z = Z(t_0,M)$ системы (1.12), отвечающих моментам $\tau_i\in\Gamma$.

В процессе вычисления аппроксимирующих множеств $\widehat{Z}^a(\tau_i)$, $i=\overline{0,N}$, может оказаться, что количество $m(\widehat{Z}^a(\tau_i))$ элементов этих множеств возрастет с увеличением номера i настолько, что будет затруднительно проведение эффективных вычислений последующих множеств $\widehat{Z}^a(\tau_i)$.

В таком случае, начиная с какого-то момента τ_i, возникает необходимость в прореживании множеств $\widehat{Z}^a(\tau_i)$, При этом прореживание не должно быть чрезмерным, то есть в результате прореживания мы должны получить множество, не сильно отличающееся в хаусдорфовой метрике от множества $\widehat{Z}^a(\tau_i)$.

Для этого выберем некоторую функцию $\chi(\delta)$, $\delta\in(0,\infty)$, такую, что $\chi^*(\delta)=\delta^{-1}\chi(\delta)\downarrow 0$ при $\delta\downarrow 0$, и фазовое пространство $\mathbb{R}^n$ системы (1.6), или, что одно и то же, дифференциального включения (1.7), разобьем на замкнутые кубы $\mathbb{U}_\alpha$, $\alpha\in\mathbb{N}$, с ребрами длины $n^{-1/2}\chi(\delta)$; здесь $\mathbb{N}$ — натуральный ряд.

Каждому конечному множеству $\Phi\subset\mathbb{R}^n$ сопоставим множество $\Omega^{(\Delta)}(\Phi)\subset\mathbb{R}^n$ согласно следующему правилу.

В каждом кубе $\mathbb{U}_\alpha$, удовлетворяющем $\mathbb{U}_\alpha\cap\Phi\neq\varnothing$, выделим по точке z_α из Φ и при этом каждую такую точку множества Φ будем включать только в один куб $\mathbb{U}_\alpha$. При таком определении множества $\Omega^{(\Delta)}(\Phi)$ будет справедливо неравенство $m(\Omega^{(\Delta)}(\Phi))\leqslant m(\Phi)$, а в большинстве случаев будет выполнено строгое неравенство.

Из определения множества $\Omega^{(\Delta)}(\Phi)$ вытекает также оценка

$$d(\Omega^{(\Delta)}(\Phi),\Phi)\leqslant\chi(\Delta).$$

Определив такую процедуру прореживания конечных множеств в $\mathbb{R}^n$, зададим множества $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)$, $i=\overline{0,N}$, в $\mathbb{R}^n$ рекуррентными соотношениями

$$\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_0)=\Omega^{(\Delta)}(\widehat{Z}^a(\tau_0)),\quad \widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_{i+1})=\Omega^{(\Delta)}(Z^{(\Delta)}(\tau_{i+1},\tau_i,\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i))),\quad i=\overline{0,N-1}.$$

Будем считать, что полученные таким путем множества $\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)$, $i=\overline{0,N}$, оказались приемлемы для вычислений.

Справедлива следующая оценка (см., например, [6]):

$$d(\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i),\widehat{Z}^a(\tau_i))\leqslant\frac{e^{(i+1)L\Delta}-1}{e^{L\Delta}-1}\chi(\Delta),\quad i=\overline{0,N}.$$

Допустим, что диаметр $\Delta=\Delta(\Gamma)$ разбиения Γ настолько мал, что $0<\Delta\leqslant L^{-1}\ln 2$. Тогда

$$\frac{e^{(i+1)L\Delta}-1}{e^{L\Delta}-1}\leqslant 2L^{-1}\frac{e^{L(\tau_i-t_0)}}{\Delta},\quad i=\overline{1,N},$$

и, значит,

$$d(\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i),\widehat{Z}^a(\tau_i))\leqslant 2L^{-1}e^{L(\tau_i-t_0)}\chi^*(\Delta),\quad i=\overline{1,N}. \tag{1.13}$$

Полагая $\widehat{W}^a(t_j)=\widehat{Z}^a(\tau_i)$ и $\widehat{\mathscr{W}}^a(t_j)=\widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)$ для аппроксимаций сечений $\widehat{W}(t_j)=\widehat{Z}(\tau_i)$, $t_j+\tau_i=t_0+\theta$, множества $\widehat{W}$ и учитывая оценки (1.12), (1.13), получаем

$$\begin{aligned} d(\widehat{\mathscr{W}}^a(t_j),\widehat{W}(t_j))&\leqslant d(\widehat{\mathscr{W}}^a(t_j),\widehat{W}^a(t_j))+d(\widehat{W}^a(t_j),\widehat{W}(t_j))\leqslant\\ &\leqslant e^{L(\theta-t_0)}\big(\sigma^*(\Delta)+2L^{-1}\chi^*(\Delta)+(\theta-t_0)(\zeta^*(\Delta)+\omega^*(\Delta)+LK\Delta)\big),\quad j=\overline{0,N}, \end{aligned}\tag{1.14}$$

при $\Delta \in (0, L^{-1}\ln 2)$.

Из (1.14) следует, что

$$\max_{t_j \in \Gamma} d(\widehat{\mathcal{W}}^a(t_j), \widehat{W}(t_j)) \to 0 \text{ при } \Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0.$$

Это предельное соотношение и равенство $\widehat{W} = \mathrm{cl}\, W$ означают, что последовательность $\widehat{\mathcal{W}}^a(t_j)$, $t_j \in \Gamma$, является аппроксимирующей для последовательности $W(t_j)$, $t_j \in \Gamma$.

§ 2. Конструирование разрешающего управления в задаче 2 о сближении

Этот параграф посвящен конструированию управления $u^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, решающего задачу 2 из начальных точек $x^{(0)} \in \widehat{\mathcal{W}}^a(t_0)$ приближения.

Исходим из того, что множества $\widehat{\mathcal{W}}^a(t_j) = \widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)$, $i+j=N$, $i=\overline{0,N}$, уже вычислены.

Выберем произвольную точку $x^{(0)} \in \mathcal{W}^a(t_0)$. Найдется такая ломаная $\bar{z}(\tau)$, $\tau \in [t_0, \theta]$, дифференциального включения

$$\frac{dz}{d\tau} \in H(\tau, z) = \mathrm{co}\, \mathscr{H}(\tau, z), \tag{2.1}$$

для которой $\overline{z}(\tau_N) = x^{(0)}$ и узловые точки $\overline{z}^{(i)} = \overline{z}(\tau_i)$, $i=\overline{0,N}$, которой удовлетворяют включениям $\overline{z}^{(i)} \in \widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)$, $i=\overline{0,N}$.

Узловые точки $\overline{z}^{(i)}$, $i=\overline{0,N}$, ломаной Эйлера $\overline{z}(\tau)$ стеснены рекуррентным соотношением

$$\overline{z}^{(i+1)} = \overline{z}^{(i)} + \Delta \cdot h^{(i)}, \quad i = \overline{0, N-1}, \tag{2.2}$$

где $h^{(i)} \in H^{(\delta)}(\tau_i, \overline{z}^{(i)})$, и, значит, с учетом включения $\overline{z}^{(i)} \in \widehat{\mathscr{Z}}^a(\tau_i)$ и замечания 3, получаем

$$h^{(i)} = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(i)} h(\tau_i, \overline{z}^{(i)}, v_k^{(i)}), \quad v_k^{(i)} \in P^{(\Delta)}, \quad k = \overline{1, n+1}.$$

Запишем ломаную $\overline{z}(\tau)$, $\tau \in [t_0, \theta]$, также в «прямом» времени t в виде $\overline{x}(t) = \overline{z}(\tau)$, $t+\tau = t_0+\theta$, а ее узловые точки $\overline{z}^{(i)} = \overline{z}(\tau_i)$ запишем в виде $\overline{x}^{(j)} = \overline{x}(t_j)$, $t_j+\tau_i = t_0+\theta$, $i=\overline{0,N}$.

Введя обозначение $f^{(j-1)} = -h^{(i)}$, $i+j=N$, $i=\overline{0,N-1}$, запишем соотношение (2.2) в виде

$$\overline{x}^{(j-1)} = \overline{x}^{(j)} - \Delta\, f^{(j-1)}. \tag{2.3}$$

Вектор $f^{(j-1)}$ в (2.3) представим в виде

$$f^{(j-1)} = -\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(i)} h(\tau_i, \overline{z}^{(i)}, v_k^{(i)}) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(i)} f(t_0+\theta-\tau_i, \overline{z}^{(i)}, v_k^{(i)}).$$

Полагая $\beta_k^{(j-1)} = \alpha_k^{(i)}$, $u_k^{(j-1)} = v_k^{(i)}$, $i+j=N$, $k=\overline{1,n+1}$, получаем

$$f^{(j-1)} = \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k^{(j-1)} f(t_j, \overline{x}^{(j)}, u_k^{(j-1)}),$$

где $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \beta_k^{(j-1)} = 1$, $\beta_k^{(j-1)} \geqslant 0$ и $u_k^{(j-1)} \in P^{(\Delta)}$, $k=\overline{1,n+1}$.

При этом, в соответствии с замечанием 3 (см. с. 548), считаем, что вычислению точек $\overline{x}^{(j-1)}$ сопутствует сохранение в памяти пары $\overline{x}^{(j)}$, $f^{(j-1)}$ и, кроме того, наборов $\beta_k^{(j-1)}$, $u_k^{(j-1)}$, $k=\overline{1,n+1}$.

Итак, рассмотрим конечную точку $\overline{z}^{(N)} = x^{(0)}$ ломаной Эйлера $\overline{z}(\delta)$ дифференциального включения (2.1). Приняв точку $x^{(0)}$ за начальную, построим ломаную Эйлера $\widetilde{x}(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, дифференциального включения

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x), \quad t \in [t_0, \theta], \tag{2.4}$$

полагая
$$\widetilde{x}(t)=\widetilde{x}^{(j-1)}+(t-t_{j-1})g^{(j-1)},\quad t\in[t_{j-1},t_j],\quad j=\overline{1,n}. \tag{2.5}$$

При этом вектор $g^{(j-1)}$ в (2.5) определим равенством
$$g^{(j-1)}=\sum_{k=1}^{n+1}\beta_k^{(j-1)}f(t_{j-1},\widetilde{x}^{(j-1)},u_k^{(j-1)});$$
здесь $\widetilde{x}^{(j-1)}=\widetilde{x}(t_{j-1})$, $j=\overline{1,N+1}$.

Из равенств (2.3), (2.5) получаем
$$\overline{x}^{(j)}=\overline{x}^{(j-1)}+\Delta\, f^{(j-1)},\quad \widetilde{x}^{(j)}=\widetilde{x}^{(j-1)}+\Delta g^{(j-1)},\quad j=\overline{1,N}.$$

Далее сравниваем ломаные $\widetilde{x}(t)$ и $\overline{x}(t)$ в момент $t_j\in\Gamma$, $j\in\overline{0,N}$; точнее, сравниваем узловые точки $\widetilde{x}^{(j)}$ и $\overline{x}^{(j)}$ этих ломаных. Для этого введем величину $\rho^{(j)}=||\widetilde{x}^{(j)}-\overline{x}^{(j)}||$, $j=\overline{0,N}$.

При $j=\overline{1,N}$ справедливо неравенство
$$\rho^{(j)}\leqslant\rho^{(j-1)}+\Delta||g^{(j-1)}-f^{(j-1)}||=$$
$$=\rho^{(j-1)}+\Delta\Big\|\sum_{k=1}^{n+1}\beta_k^{(j-1)}(f(t_{j-1},\widetilde{x}^{(j-1)},u_k^{(j-1)})-f(t_j,\overline{x}^{(j)},u_k^{(j-1)}))\Big\|\leqslant$$
$$\leqslant\rho^{(j-1)}+\Delta\sum_{k=1}^{n+1}\beta_k^{(j-1)}||f(t_{j-1},\widetilde{x}^{(j-1)},u_k^{(j-1)})-f(t_j,\overline{x}^{(j)},u_k^{(j-1)})||\leqslant$$
$$\leqslant\rho^{(j-1)}+\Delta\sum_{k=1}^{n+1}\beta_k^{(j-1)}||f(t_{j-1},\widetilde{x}^{(j-1)},u_k^{(j-1)})-f(t_{j-1},\overline{x}^{(j)},u_k^{(j-1)})||+$$
$$+\Delta\sum_{k=1}^{n+1}\beta_k^{(j-1)}||f(t_{j-1},\overline{x}^{(j)},u_k^{(j-1)})-f(t_j,\overline{x}^{(j)},u_k^{(j-1)})||.$$

Из этих неравенств выводим следующее неравенство:
$$\begin{aligned}\rho^{(j)}&\leqslant\rho^{(j-1)}+\Delta\sum_{k=1}^{n+1}\beta_k^{(j-1)}L||\widetilde{x}^{(j-1)}-\overline{x}^{(j)}||+\Delta\omega^*(\Delta)\leqslant\\&\leqslant\rho^{(j-1)}+\Delta L\sum_{k=1}^{n+1}\beta_k^{(j-1)}(||\widetilde{x}^{(j-1)}-\overline{x}^{(j-1)}||+||\overline{x}^{(j-1)}-\overline{x}^{(j)}||)+\Delta\omega^*(\Delta)\leqslant\\&\leqslant\rho^{(j-1)}+\Delta L\sum_{k=1}^{n+1}\beta_k^{(j-1)}\rho^{(j-1)}+\Delta L\sum_{k=1}^{n+1}\beta_k^{(j-1)}||\Delta f^{(j-1)}||+\Delta\omega^*(\Delta).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Учитывая, что $||f^{(j-1)}||=||h^{(i)}||\leqslant\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k^{(i)}||h(\tau_i,\overline{z}^{(i)},v_k^{(i)})||\leqslant\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k^{(i)}K=K$, из (2.6) получаем следующую оценку:
$$\rho^{(j)}\leqslant e^{L\Delta}\rho^{(j-1)}+\Delta^2LK+\Delta\omega^*(\Delta). \tag{2.7}$$

Введя функции $\omega(\delta)=LK\delta+\omega^*(\delta)$, $\widetilde{\omega}(\delta)=\delta\omega(\delta)$, $\delta>0$, получаем из (2.7)
$$\rho^{(j)}\leqslant e^{L\Delta}\rho^{(j-1)}+\widetilde{\omega}(\Delta),\quad j=\overline{1,N}. \tag{2.8}$$

Ломаные $\widetilde{x}(t)$ и $\overline{x}(t)$ на $[t_0,\theta]$ имеют одну и ту же начальную точку $x^{(0)}\in\widehat{\mathcal{W}}^a(t_0)$, и, значит, $\rho^{(0)}=0$. Учитывая это равенство и оценку (2.8), получаем
$$\rho^{(1)}\leqslant\widetilde{\omega}(\Delta),\quad \rho^{(2)}\leqslant(1+e^{L\Delta})\widetilde{\omega}(\Delta),\quad \rho^{(3)}\leqslant(1+e^{L\Delta}+e^{2L\Delta})\widetilde{\omega}(\Delta),\quad \ldots$$

В общем случае при $j=\overline{1,N}$ оценки сверху величины $\rho^{(j)}$ имеют вид
$$\rho^{(j)}\leqslant\frac{e^{Lj\Delta}-1}{e^{L\Delta}-1}\widetilde{\omega}(\Delta)<e^{L(t_j-t_0)}(K\Delta+L^{-1}\omega^*(\Delta)).$$

В частности, справедлива оценка

$$\rho^{(N)} = ||\widetilde{x}^{(N)} - \overline{x}^{(N)}|| < e^{L(\theta-t_0)}(K\Delta + L^{-1}\omega^*(\Delta)).$$

Так как $\overline{x}^{(N)} = \overline{x}^{(0)} \in \widehat{\mathscr{Z}}^a(t_0) \subset \widehat{Z}^a(t_0)_{\chi(\Delta)} \subset Z(t_0)_{\sigma^*(\Delta)+\chi(\Delta)}$ и $Z(t_0) = M$, то

$$\rho(\widetilde{x}^{(N)}, M) \leqslant ||\widetilde{x}^{(N)} - \overline{x}^{(N)}|| + \rho(\overline{x}^{(N)}, M) < e^{L(\theta-t_0)}(K\Delta + L^{-1}\omega^*(\Delta)) + \sigma^*(\Delta) + \chi(\Delta). \quad (2.9)$$

Перейдем теперь к конструированию управления $u^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, разрешающего (с определенной степенью точности) задачу 2 о сближении системы (1.1) с M для начальной точки $x^{(0)} \in \widehat{\mathscr{W}}^a(t_0)$. А именно, укажем, как формируется управление $u^*(t)$ на каждом промежутке $[t_j, t_{j+1}]$ разбиения Γ промежутка $[t_0, \theta]$.

Итак, пусть $[t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{0, N-1}$, — промежуток разбиения Γ. Рассмотрим отвечающее этому промежутку звено ломаной Эйлера $\widetilde{x}(t)$:

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}^{(j)} + (t - t_j)g^{(j)}, \quad t \in [t_j, t_{j+1}],$$

где $g^{(j)} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \beta_k^{(j)} f(t_j, \widetilde{x}^{(j)}, u_k^{(j)})$.

Не усложняя рассуждений, будем считать, что все $\beta_k^{(j)} > 0$. Введем в рассуждение числа $\Delta_k^{(j)} = \beta_k^{(j)}\Delta$, $k = \overline{1, n+1}$, и разбиение $\Gamma^{(j)} = \{t_1^{(j)} = t_j, t_2^{(j)}, \ldots, t_{n+1}^{(j)}, t_{n+2}^{(j)} = t_{j+1}\}$ промежутка $[t_j, t_{j+1}]$, где $t_{k+1}^{(j)} = t_k^{(j)} + \Delta_k^{(j)}$, $k = \overline{1, n+1}$.

Управление $u^*(t)$ на полуинтервале $[t_j, t_{j+1})$ определим равенством

$$u^*(t) = u_k^{(j)} \text{ при } t \in [t_k^{(j)}, t_{k+1}^{(j)}), \quad k = \overline{1, n+1}. \quad (2.10)$$

Вместе с тем мы задали кусочно-постоянное управление $u^*(t)$ на $[t_0, \theta]$, структура которого на каждом полуинтервале $[t_j, t_{j+1})$ разбиения Γ детерминирована наборами $\beta_k^{(j)}$, $u_k^{(j)}$, $k = \overline{1, n+1}$.

В случае когда система (1.1), в дополнение к условиям A, B, удовлетворяет условию C (см. с. 544), кусочно-постоянное на каждом полуинтервале $[t_j, t_{j+1})$ управление $u^*(t)$ вырождается в постоянное на $[t_j, t_{j+1})$ управление: $u^*(t) = u^{(j)}$, $t \in [t_j, t_{j+1})$. Таким образом, выполнение дополнительного условия C на систему (1.1) влечет существенное упрощение алгоритма построения разрешающего управления $u^*(t)$ на $[t_0, \theta]$.

Обозначим через $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x^{(0)}$, движение системы (1.1), порожденное управлением $u^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$. При каждом $j = \overline{0, N-1}$ движение $x^*(t)$ удовлетворяет равенству

$$x^*(t_{j+1}) = x^*(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, x^*(t), u^*(t))\, dt.$$

Оценим сверху расстояние между точками $x^*(t_{j+1})$ и $\widetilde{x}(t_{j+1})$. Для этого выпишем разность

$$x^*(t_{j+1}) - \widetilde{x}(t_{j+1}) = (x^*(t_j) - \widetilde{x}(t_j)) + \Big(\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, x^*(t), u^*(t))\, dt - \Delta g^{(j)}\Big). \quad (2.11)$$

Преобразуем интеграл, входящий в правую часть равенства (2.11):

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, x^*(t), u^*(t))dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t_j, x^*(t_j), u^*(t))\, dt + J^{(j)}(\Delta) = \\ = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{t_k^{(j)}}^{t_{k+1}^{(j)}} f(t_j, x^*(t_j), u_k^{(j)})\, dt + J^{(j)}(\Delta), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $J^{(j)}(\Delta) = \displaystyle\int_{t_j}^{t_{j+1}} \big(f(t, x^*(t), u^*(t)) - f(t_j, x^*(t_j), u^*(t))\big)\, dt$.

Принимая во внимание (2.12) и равенство

$$\Delta g^{(j)} = \Delta \sum_{k=1}^{n+1} \beta^{(j)} f(t_j, \widetilde{x}^{(j)}, u_k^{(j)}) = \sum_{k=1}^{n+1} \Delta_k^{(j)} f(t_j, \widetilde{x}^{(j)}, u_k^{(j)}),$$

запишем разность $x^*(t_{j+1}) - \widetilde{x}^{(j+1)}$ в виде

$$x^*(t_{j+1}) - \widetilde{x}^{(j+1)} = (x^*(t_j) - \widetilde{x}^{(j)}) + \sum_{k=1}^{n+1} \big(f(t_j, x^*(t_j), u_k^{(j)}) - f(t_j, \widetilde{x}^{(j)}, u_k^{(j)})\big)\Delta_k^{(j)} + J^{(j)}(\Delta).$$

Полагаем $\sigma^{(j)} = ||x^*(t_j) - \widetilde{x}^{(j)}||$, $j = \overline{0, N}$. Справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \sigma^{(j+1)} \leqslant \sigma^{(j)} + \sum_{k=1}^{n+1} ||f(t_j, x^*(t_j), u_k^{(j)}) - f(t_j, \widetilde{x}^{(j)}, u_k^{(j)})||\, \Delta_k^{(j)} + \\ + \int_{t_j}^{t_{j+1}} ||f(t, x^*(t), u^*(t)) - f(t_j, x^*(t_j), u^*(t))||\, dt. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Принимая во внимание оценки

$$||f(t_j, x^*(t_j), u_k^{(j)}) - f(t_j, \widetilde{x}^{(j)}, u_k^{(j)})|| \leqslant L||x^*(t_j) - \widetilde{x}^{(j)}|| = L\sigma^{(j)},$$

$$||f(t, x^*(t), u^*(t)) - f(t_j, x^*(t_j), u^*(t))|| \leqslant \omega^*(\Delta) + LK\Delta = \omega(\Delta), \quad t \in [t_j, t_{j+1}],$$

получаем из (2.13)

$$\sigma^{(j+1)} \leqslant e^{L\Delta}\sigma^{(j)} + \widetilde{\omega}(\Delta), \quad j = \overline{0, N-1}. \tag{2.14}$$

Учитывая оценку (2.14), получаем

$$\sigma^{(j+1)} \leqslant \frac{e^{L(j+1)\Delta} - 1}{e^{L\Delta} - 1} < e^{L(t_{j+1} - t_0)}(K\Delta + L^{-1}\omega^*(\Delta)), \quad j = \overline{0, N-1}.$$

В частности, справедливо неравенство

$$\sigma^{(N)} = ||x^*(t_N) - \widetilde{x}^{(N)}|| < e^{L(\theta - t_0)}(K\Delta + L^{-1}\omega^*(\Delta)). \tag{2.15}$$

Принимая во внимание (2.9) и (2.15), получаем

$$\begin{aligned} \rho(x^*(t_N), M) \leqslant ||x^*(t_N) - \widetilde{x}^{(N)}|| + \rho(\widetilde{x}^{(N)}, M) \leqslant \\ \leqslant 2e^{L(\theta - t_0)}(K\Delta + L^{-1}\omega^*(\Delta)) + \sigma^*(\Delta) + \chi(\Delta). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Далее, зададим некоторое $\varepsilon > 0$ и выберем по нему разбиение Γ промежутка $[t_0, \theta]$ с диаметром $\Delta = \Delta(\Gamma) > 0$, удовлетворяющим неравенствам

$$\Delta \leqslant L^{-1}\ln 2, \quad 2e^{L(\theta - t_0)}(K\Delta + L^{-1}\omega^*(\Delta)) + \sigma^*(\Delta) + \chi(\Delta) \leqslant \varepsilon. \tag{2.17}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon > 0$ и разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_N = \theta\}$ промежутка $[t_0, \theta]$ удовлетворяет (2.17). Тогда для любой начальной точки $x^{(0)} \in \widehat{\mathcal{W}}^a(t_0)$ кусочно-постоянное управление $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x^{(0)}$, управляемой системы (1.1) удовлетворяет включению $x^*(\theta) \in M_\varepsilon$.*

§ 3. Управления-компенсаторы в задаче о сближении управляемой системы (1.1) с множеством M

В предыдущем параграфе мы сконструировали разрешающее управление $u^*(t)$ на $[t_0,\theta]$ в задаче о сближении системы (1.1) с M в момент θ как кусочно-постоянное управление на $[t_0,\theta]$.

Напомним, что управление $u^*(t)$, $t\in[t_0,\theta]$, определенное равенством (2.10), решает задачу о сближении системы (1.1) с M из начальной точки $x^{(0)}\in\widehat{\mathcal{W}}^a(t_0)$ приближенно, с определенной степенью точности, и эта разность улучшается с уменьшением диаметра $\Delta=\Delta(\Gamma)$ разбиения Γ.

В процессе обоснования этого положения мы сопоставили управлению $u^*(t)$, $t\in[t_0,\theta]$, ломаную Эйлера $\widetilde{x}(t)$, $t\in[t_0,\theta]$, дифференциального включения (2.4) с начальным условием $\widetilde{x}(t_0)=x^{(0)}$. Мы показали, в частности, что конечная точка $\widetilde{x}(\theta)=\widetilde{x}(t_N)$ этой ломаной отстоит от конечной точки $\overline{x}(\theta)=\overline{x}(t_N)\in M_{\sigma^*(\Delta)+\chi(\Delta)}$ ломаной $\overline{x}(t)$, $t\in[t_0,\theta]$, начинающейся в точке $x^{(0)}$, на величину $\rho^{(N)}=||\widetilde{x}(t_N)-\overline{x}(t_N)||<e^{L(\theta-t_0)}(K\Delta+L^{-1}\omega^*(\Delta))$.

Ясно, что при больших L, K, $(\theta-t_0)$ правая часть указанной оценки может быть велика даже при относительно малых $\Delta=\Delta(\Gamma)>0$. Тогда не исключено, что и рассогласование $\rho^{(N)}$ между точками $\widetilde{x}(t_N)$ и $\overline{x}(t_N)$ окажется большим. Такое рассогласование $\rho^{(N)}$, в свою очередь, негативно отразится и на отклонении конечной точки $x^*(t_N)$ движения $x^*(t)$, $x^*(t_0)=x^{(0)}$, системы (1.1) от целевого множества M. А именно, рассогласование $\rho^{(N)}$ внесет свой вклад в отклонение $\rho(x^*(t_N),M)$, делая его значительным.

В связи с этим неблагоприятным обстоятельством возникает желание подправить некоторым образом управление $u^*(t)$ на $[t_0,\theta]$ — скорректировать его так, чтобы подправленное управление нейтрализовало хотя бы рассогласование $\rho^{(N)}$ между точками $\widetilde{x}(t_N)$ и $\overline{x}(t_N)$.

В этом параграфе для простоты мы рассмотрим систему (1.1), относительно которой будем предполагать помимо выполнения условий A, B (см. с. 544) еще и условия выполнения равенства $F(t,x)=\mathcal{F}(t,x)$, $(t,x)\in[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n$.

При выполнении этого условия, как известно (см. [4, с. 281]), разрешающее управление $u^*(t)$, $t\in[t_0,\theta]$, для задачи о сближении с M из начальной точки $x^{(0)}\in\widehat{\mathcal{W}}(t_0)=\mathcal{W}(t_0)$ представляет собой кусочно-постоянное управление $(u^*(t)=u^{(j)}$, $t\in[t_j,t_{j+1})$, $j=\overline{0,N-1})$ на промежутках $[t_j,t_{j+1})$ разбиения Γ отрезка $[t_0,\theta]$.

В этом параграфе мы предложим и проанализируем два варианта коррекции управления $u^*(t)$, $t\in[t_0,\theta]$, ведущих к нейтрализации рассогласования $\rho^{(N)}$, то есть к обнулению величины $\rho^{(N)}$. В каждом из них налагаются свои, дополнительные к уже существующим, условия на систему (1.1) и на режим управления этой системой.

Вариант I. Предположим, что мы имеем возможность влиять на динамику системы (1.1) с помощью дополнительного управления w, фактически трансформируя систему (1.1) в управляемую систему

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,u)+w, \tag{3.1}$$

где $t\in[t_0,\theta]$, $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in P$, $w\in\mathbb{B}^n(\mathbf{0};\rho)$.

Здесь w — вектор дополнительных управляющих воздействий на систему (1.1), $\mathbb{B}^n(\mathbf{0};\rho)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^n$ радиуса $\rho>0$.

Считаем при этом, что дополнительные управляющие воздействия w незначительны, то есть ρ мало.

Вернемся теперь к рассмотрению начальной точки $x^{(0)}\in\widehat{\mathcal{W}}^a(t_0)=\mathcal{W}^a(t_0)$, а также ломаной $\overline{x}(t)$, $t\in[t_0,\theta]$, начинающейся в $x^{(0)}$ (то есть $\overline{x}(t_0)=x^{(0)}$) и заканчивающейся в точке $\overline{x}(\theta)=\overline{x}(t_N)\in M_{\sigma^*(\Delta)+\chi(\Delta)}$.

В дополнение к управлению $u^*(t)$, $t\in[t_0,\theta]$, определенному по формуле (2.10) равенствами $u^*(t)=u^{(j)}$, $t\in[t_j,t_{j+1})$, $j=\overline{0,N-1}$, сконструируем кусочно-постоянное управление $w^*(t)$, $t\in[t_0,\theta)$, с промежутками постоянства $[t_j,t_{j+1})$, $j=\overline{0,N-1}$, удовлетворяющее включению $w^*(t)\in\mathbb{B}^n(\mathbf{0};\rho)$, $t\in[t_0,\theta]$. При этом оно будет сконструировано так, что паре управлений

$(u^*(t),\, w^*(t))$ на $[t_0,\theta]$ будет соответствовать ломаная Эйлера $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$, $\widetilde{\widetilde{x}}(t_0)=x^{(0)}$, уравнения

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,u^*(t))+w^*(t),$$

удовлетворяющая равенствам

$$\widetilde{\widetilde{x}}(t_j)=\overline{x}(t_j),\quad j=\overline{1,N}. \tag{3.2}$$

Так сконструированное дополнительное управление $w^*(t)$, $t\in[t_0,\theta]$, поможет нам компенсировать рассогласования $\rho^{(j)}=\|\widetilde{x}(t_j)-\overline{x}(t_j)\|$, $j=\overline{1,N}$, возникающие в случае, когда управляемая система имеет вид (1.1). Применение этого управления $w^*(t)$, $t\in[t_0,\theta]$, в трансформированной системе (3.1) вкупе с $u^*(t)$, $t\in[t_0,\theta]$, обеспечит нам, согласно (3.2), выполнение равенств $||\widetilde{\widetilde{x}}(t_j)-\overline{x}(t_j)||=0$. В том случае будет выполнено равенство $||\widetilde{\widetilde{x}}(t_N)-\overline{x}(t_N)||=0$, означающее совпадение конечных точек $\widetilde{\widetilde{x}}(t_N)$ и $\overline{x}(t_N)\in M_{\sigma^*(\Delta)+\chi(\Delta)}$ ломаных $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$ и $\overline{x}(t)$ на $[t_0,\theta]$.

Ломаная Эйлера $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$ описывается соотношениями

$$\widetilde{\widetilde{x}}(t)=\widetilde{\widetilde{x}}^{(j)}+(t-t_j)(f(t_j,\widetilde{\widetilde{x}}^{(j)},u^{(j)})+w^{(j)}),$$

$$\widetilde{\widetilde{x}}(t_0)=x^{(0)},\quad t\in[t_j,t_{j+1}),\quad j=\overline{0,N}.$$

Договоримся, что размер $\Delta=\Delta(\Gamma)$ разбиения Γ и число $\rho>0$, определяющее ограничение $\mathbb{B}^n(\mathbf{0};\rho)$ на управление w, в том числе на управления $w^{(j)}$, $j=\overline{0,N}$, удовлетворяет неравенству

$$\omega(\Delta)=LK\Delta+\omega^*(\Delta)\leqslant\rho.$$

Опишем, как последовательно по шагам $[t_j,t_{j+1}]$ разбиения Γ формируется кусочно-постоянное управление-компенсатор $w^*(t)=w^{(j)}$, $t\in[t_j,t_{j+1})$, $j=\overline{0,N-1}$.

Рассмотрим начальный промежуток $[t_0,t_1]$ разбиения Γ и конечные точки

$$\widetilde{\widetilde{x}}^{(1)}=x^{(0)}+\Delta(f(t_0,x^{(0)},u^{(0)})+w^{(0)}),$$

$$\overline{x}^{(1)}=x^{(0)}+\Delta f(t_1,\overline{x}^{(1)},u^{(0)})$$

ломаных $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$ и $\overline{x}(t)$ на этом промежутке.

Согласно замечанию 3 на с. 548, к моменту t_0 нам известна пара $\overline{x}^{(1)}$, $u^{(0)}$, и поэтому в момент t_0 мы можем сформировать вектор

$$w^{(0)}=f(t_1,\overline{x}^{(1)},u^{(0)})-f(t_0,x^{(0)},u^{(0)}).$$

При таком выборе вектора $w^{(0)}$ выполняется $\widetilde{\widetilde{x}}^{(1)}=\widetilde{x}^{(1)}$, а также $||w^{(0)}||=||f(t_1,\overline{x}^{(1)},u^{(0)})-$ $-f(t_0,x^{(0)},u^{(0)})||\leqslant\omega(\Delta)\leqslant\rho$, то есть $w^{(0)}\in\mathbb{B}^n(\mathbf{0};\rho)$.

Далее рассматриваем следующий промежуток $[t_1,t_2]$ разбиения Γ и конечные точки

$$\widetilde{\widetilde{x}}^{(2)}=\widetilde{\widetilde{x}}^{(1)}+\Delta(f(t_1,\widetilde{\widetilde{x}}^{(1)},u^{(1)})+w^{(1)}),$$

$$\overline{x}^{(2)}=\overline{x}^{(1)}+\Delta f(t_2,\overline{x}^{(2)},u^{(1)})$$

ломаных $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$ и $\overline{x}(t)$ на этом промежутке.

Согласно замечанию 3 на с. 548, к моменту t_1 нам известна пара $\overline{x}^{(2)}$, $u^{(1)}$. Следовательно, в момент t_1 мы в состоянии вычислить вектор $f(t_2,\overline{x}^{(2)},u^{(1)})-f(t_1,\widetilde{\widetilde{x}}^{(1)},u^{(1)})=f(t_2,\overline{x}^{(2)},u^{(1)})-$ $-f(t_1,\overline{x}^{(1)},u^{(1)})$. Полагаем

$$w^{(1)}=f(t_2,\overline{x}^{(2)},u^{(1)})-f(t_1,\overline{x}^{(1)},u^{(1)}).$$

При таком выборе вектора $w^{(1)}$ выполняется $\widetilde{\widetilde{x}}^{(2)}=\overline{x}^{(2)}$, а также $||w^{(1)}||\leqslant\omega(\Delta)\leqslant\rho$, то есть $w^{(1)}\in\mathbb{B}^n(\mathbf{0};\rho)$.

Продолжаем далее на последующих промежутках $[t_j,t_{j+1}]$, $j=\overline{2,N-1}$, конструировать векторы управления $w^{(j)}\in\mathbb{B}^n(\mathbf{0};\rho)$ по формуле

$$w^{(j)}=f(t_{j+1},\overline{x}^{(j+1)},u^{(j)})-f(t_j,\overline{x}^{(j)},u^{(j)}).$$

В результате применения к системе (3.1) такого управления-компенсатора $w^*(t) = w^{(j)}$, $t \in [t_j, t_{j+1})$, $j = \overline{0, N-1}$, получим ломаную Эйлера $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, $\widetilde{\widetilde{x}}(t_0) = x^{(0)}$, системы (3.1), совпадающую с ломаной $\overline{x}(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, и, следовательно, удовлетворяющую соотношению $\widetilde{\widetilde{x}}(t_N) = \overline{x}(t_N) \in M_{\sigma^*(\Delta)+\chi(\Delta)}$.

В связи с заменой ломаной $\widetilde{x}(t)$, $\widetilde{x}(t_0) = x^{(0)}$, на ломаную $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$, $\widetilde{\widetilde{x}}(t_0) = x^{(0)}$, на промежутке $[t_0, \theta]$ возникает вопрос о том, насколько сильно отличается движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x^{(0)}$, системы (1.1), порожденное парой управлений $u^*(t)$, $w^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, от ломаной Эйлера $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$, $\widetilde{\widetilde{x}}(t_0) = x^{(0)}$, системы (3.1), соответствующей паре $u^*(t)$, $w^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$. Для ответа на этот вопрос проведем соответствующие оценки рассогласования между $x^*(t)$ и $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$ на $[t_0, \theta]$.

Движение $x^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, удовлетворяет соотношению

$$x^*(t) = x^{(0)} + \int_{t_0}^{t} f(\zeta, x^*(\zeta), u^*(\zeta))\, d\zeta + \int_{t_0}^{t} w^*(\zeta)\, d\zeta.$$

Рассмотрим движение $x^*(t)$ последовательно по шагам $[t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{0, N-1}$, и сравним его с ломаной Эйлера $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$ системы (3.1) в момент $t_j \in \Gamma$.

На первом шаге $[t_0, t_1]$ разбиения Γ имеем

$$x^*(t_1) = x^{(0)} + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^*(t), u^{(0)})\, dt + \Delta w^{(0)},$$

$$\widetilde{\widetilde{x}}(t_1) = x^{(0)} + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^{(0)}, u^{(0)})\, dt + \Delta w^{(0)},$$

откуда следует равенство

$$x^*(t_1) - \widetilde{\widetilde{x}}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} (f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f(t_0, x^{(0)}, u^{(0)}))\, dt.$$

В силу выбора области $D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ (с. 546) все рассматриваемые нами позиции содержатся в D и, в частности, $(t_0, x^{(0)}) \in D$ и $(t, x^*(t)) \in D$ при $t \in [t_0, t_1]$.

Справедлива следующая оценка при $t \in [t_0, t_1]$:

$$||f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f(t_0, x^{(0)}, u^{(0)})|| \leqslant \omega^*(t - t_0) + L||x^*(t) - x^{(0)}|| \leqslant \omega^*(\Delta) + LK^\rho \Delta; \tag{3.3}$$

здесь обозначено $K^\rho = K + \rho$.

Из оценки (3.3) получаем

$$||x^*(t_1) - \widetilde{\widetilde{x}}(t_1)|| \leqslant \int_{t_0}^{t_1} ||f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f(t_0, x^{(0)}, u^{(0)})||\, dt \leqslant \widetilde{\widetilde{\omega}}(\Delta), \tag{3.4}$$

где обозначено $\widetilde{\widetilde{\omega}}(\delta) = \delta \omega^*(\delta) + LK^\rho \delta^2$, $\delta > 0$.

На втором шаге $[t_1, t_2]$ разбиения Γ имеем

$$x^*(t_2) = x^*(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(t, x^*(t), u^{(1)})\, dt + \Delta w^{(1)},$$

$$\widetilde{\widetilde{x}}(t_2) = \widetilde{\widetilde{x}}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(t_1, \widetilde{\widetilde{x}}(t_1), u^{(1)})\, dt + \Delta w^{(1)}.$$

Отсюда получаем

$$x^*(t_2) - \widetilde{\widetilde{x}}(t_2) = (x^*(t_1) - \widetilde{\widetilde{x}}(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} (f(t, x^*(t), u^{(1)}) - f(t_1, \widetilde{\widetilde{x}}(t_1), u^{(1)}))\, dt.$$

Принимая во внимание включения $(t_1, \widetilde{\widetilde{x}}(t_1)) \in D$ и $(t, x^*(t)) \in D$ при $t \in [t_1, t_2]$, оценим величину

$$||f(t, x^*(t), u^{(1)}) - f(t_1, \widetilde{\widetilde{x}}(t_1), u^{(1)})||, \quad t \in [t_1, t_2).$$

Справедлива следующая оценка:

$$||f(t,x^*(t),u^{(1)})-f(t_1,\widetilde{\widetilde{x}}(t_1),u^{(1)})||\leqslant||f(t,x^*(t),u^{(1)})-f(t_1,x^*(t_1),u^{(1)})||+$$

$$+||f(t_1,x^*(t_1),u^{(1)})-f(t_1,\widetilde{\widetilde{x}}(t_1),u^{(1)})||\leqslant\omega^*(\Delta)+LK^\rho\Delta+L||x^*(t_1)-\widetilde{\widetilde{x}}(t_1)||.$$

Учитывая это неравенство и (3.4), получаем

$$||f(t,x^*(t),u^{(1)})-f(t_1,\widetilde{\widetilde{x}}(t_1),u^{(1)})||\leqslant\omega^*(\Delta)+LK^\rho\Delta+L\widetilde{\widetilde{\omega}}(\Delta).$$

Значит, имеет место оценка

$$||x^*(t_2)-\widetilde{\widetilde{x}}(t_2)||\leqslant||x^*(t_1)-\widetilde{\widetilde{x}}(t_1)||+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}||f(t,x^*(t),u^{(1)})-f(t_1,\widetilde{\widetilde{x}}(t_1),u^{(1)})||\,dt\leqslant\widetilde{\widetilde{\omega}}(\Delta)+(1+L\Delta)\widetilde{\widetilde{\omega}}(\Delta).$$

Отсюда следует

$$||x^*(t_2)-\widetilde{\widetilde{x}}(t_2)||\leqslant\widetilde{\widetilde{\omega}}(\Delta)+e^{L\Delta}\widetilde{\widetilde{\omega}}(\Delta).$$

Для следующего шага $[t_2,t_3]$ справедливы равенства

$$x^*(t_3)=x^*(t_2)+\int_{t_2}^{t_3}f(t,x^*(t),u^{(2)})\,dt,$$

$$\widetilde{\widetilde{x}}(t_3)=\widetilde{\widetilde{x}}(t_2)+\int_{t_2}^{t_3}f(t_2,\widetilde{\widetilde{x}}(t_2),u^{(2)})\,dt,$$

из которых следует

$$x^*(t_3)-\widetilde{\widetilde{x}}(t_3)=(x^*(t_2)-\widetilde{\widetilde{x}}(t_2))+\int_{t_2}^{t_3}(f(t,x^*(t),u^{(2)})-f(t_2,\widetilde{\widetilde{x}}(t_2),u^{(2)}))\,dt.$$

Учитывая включения $(t_2,\widetilde{\widetilde{x}}(t_2))\in D$ и $(t,x^*(t))\in D$ при $t\in[t_2,t_3]$, имеем следующую оценку:

$$||f(t,x^*(t),u^{(2)})-f(t_2,\widetilde{\widetilde{x}}^{(2)},u^{(2)})||\leqslant(\omega^*(\Delta)+LK^\rho\Delta)+L(\widetilde{\widetilde{\omega}}(\Delta)+e^{L\Delta}\widetilde{\widetilde{\omega}}(\Delta)),\quad t\in[t_2,t_3).$$

Следовательно, справедлива оценка

$$||x^*(t_3)-\widetilde{\widetilde{x}}(t_3)||\leqslant||x^*(t_2)-\widetilde{\widetilde{x}}(t_2)||+\int_{t_2}^{t_3}||f(t,x^*(t),u^{(2)})-f(t_2,\widetilde{\widetilde{x}}(t_2),u^{(2)})||\,dt\leqslant$$

$$\leqslant(\widetilde{\widetilde{\omega}}(\Delta)+e^{L\Delta}\widetilde{\widetilde{\omega}}(\Delta))+\widetilde{\widetilde{\omega}}(\Delta)+L\Delta(\widetilde{\widetilde{\omega}}(\Delta)+e^{L\Delta}\widetilde{\widetilde{\omega}}(\Delta)),$$

из которой следует

$$||x^*(t_3)-\widetilde{\widetilde{x}}(t_3)||\leqslant\sum_{k=0}^{2}e^{Lk\Delta}\widetilde{\widetilde{\omega}}(\Delta).$$

Продолжая сравнивать точки $x^*(t_j)$ и $\widetilde{\widetilde{x}}(t_j)$ движения $x^*(t)$ и ломаной Эйлера $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$ на последующих промежутках $[t_j,t_{j+1}]$ разбиения Γ, получаем оценку

$$||x^*(t_j)-\widetilde{\widetilde{x}}(t_j)||\leqslant\sum_{k=0}^{j-1}e^{Lk\Delta}\widetilde{\widetilde{\omega}}(\Delta),\quad j=\overline{3,N}.$$

При этом для последней пары точек выполняется

$$\begin{gathered}||x^*(t_N)-\widetilde{\widetilde{x}}(t_N)||\leqslant\sum_{k=0}^{N-1}e^{Lk\Delta}\widetilde{\widetilde{\omega}}(\Delta)<\\<(e^{L(\theta-t_0)}-1)(K^\rho\Delta+L^{-1}\omega^*(\Delta))<e^{L(\theta-t_0)}(K^\rho\Delta+L^{-1}\omega^*(\Delta)).\end{gathered}\tag{3.5}$$

Анализируя оценку (3.5), видим, что оценка сверху для интерпретирующего нас отклонения $||x^*(t_N) - \widetilde{\widetilde{x}}(t_N)||$ увеличилась по отношению к оценке (2.15) незначительно. А именно, вместо входящего в (2.15) члена K в оценку (3.5) входит число K^ρ, близкое к K при малых $\rho > 0$.

Из включения $\widetilde{\widetilde{x}}(t_N) = \overline{x}(t_N) \in M_{\sigma^*(\Delta)+\chi(\Delta)}$ и оценки (3.5) вытекает оценка

$$\rho(x^*(t_N), M) < e^{L(\theta-t_0)}(K^\rho\Delta + L^{-1}\omega^*(\Delta)) + \sigma^*(\Delta) + \chi(\Delta). \tag{3.6}$$

Оценка (3.6) есть аналог оценки (2.16). Оценка (3.6) получена для движения $x^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, системы (3.1), порожденного парой управлений $u^*(t)$, $w^*(t)$ на $[t_0, \theta]$. При малых $\rho > 0$ она лучше, чем оценка (2.16), поскольку в ней отсутствует коэффициент 2 перед слагаемым $e^{L(\theta-t_0)}(K^\rho\Delta + L^{-1}\omega^*(\Delta))$, близким к числу $e^{L(\theta-t_0)}(K\Delta + L^{-1}\omega^*(\Delta))$. Принимая это во внимание, можем надеяться на то, что использование дополнительного управления-компенсатора $w^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, существенно улучшит результат управления — величину $\rho(x^*(t_N), M)$.

Вариант II. Предполагаем, что находимся в ситуации, когда не имеем возможности изменить динамику системы (1.1). То есть считается, что мы не можем или не в праве трансформировать систему (1.1) в управляемую систему (3.1) подобно тому, как это было осуществлено в варианте I.

Предполагаем, что в этой ситуации система (1.1) удовлетворяет следующему условию.

Условие E.

(a) Найдется такое $\delta^* \in (0, \infty)$, что отображение $f : D \times P \mapsto \mathbb{R}^n$ можно продолжить на $D \times \mathbb{B}^r(P; \delta^*)$ с сохранением непрерывности.

(b) Существует строго монотонная функция $\delta(\rho)$ на $[0, \infty)$ ($\delta(\rho) \downarrow 0$, $\rho \downarrow 0$ и $\delta(0) = 0$) такая, что

$$f(t, x, \mathbb{B}^r(u; \delta(\rho))) \supset \mathbb{B}^n(f(t, x, u); \rho), \quad (t, x, u) \in D \times P,\ \rho \in [0, \infty) \text{ и } \delta(\rho) \leqslant \delta^*; \tag{3.7}$$

здесь $\mathbb{B}^r(u; \delta)$ — замкнутая δ-окрестность точки u в $\mathbb{R}^r$, $\mathbb{B}^r(P; \delta^*)$ — замкнутая δ^*-окрестность множества P в $\mathbb{R}^r$, $\mathbb{B}^n(f; \rho)$ — замкнутая ρ-окрестность точки f в $\mathbb{R}^n$.

Условие E мы трактуем как условие, подменяющее в рассматриваемой ситуации условие в варианте I, обеспечивающее возможность трансформации системы (1.1) в систему (3.1). При этом считаем, что имеем возможность выбирать, наряду с управлением $u \in P$, управление $v \in \in \mathbb{B}^r(\mathbf{0}; \delta(\rho))$ и применять его для управления системой (1.1). Иными словами, в предположении выполнения условия E, мы имеем возможность управлять системой

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u + v),$$

где $(t, x) \in D$, $u \in P$, $v \in \mathbb{B}^r(\mathbf{0}; \delta(\rho))$, $\rho > 0$ настолько мало, что $\delta(\rho) \leqslant \delta^*$.

Условие E не является каким-либо экзотическим условием в математике. Условия, подобные ему, присутствуют в некоторых работах по многозначному анализу и теории управления. Так, например, в § 2.9 из [8], посвященном вопросам существования неподвижных точек и точек совпадения отображений, формулируется и применяется при доказательстве некоторых теорем важное, на наш взгляд, понятие α-накрывающего отображения [9, 10].

Воспроизведем здесь определение α-накрывающего отображения из [8, с. 160].

Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) — метрические пространства и $X_* \subset X$, $Y_* \subset Y$, $\varepsilon \geqslant 0$. Полагаем $\mathbb{B}^X(X_*; \varepsilon) = \{x \in X : \ \rho_X(x, X_*) \leqslant \varepsilon\}$, $\mathbb{B}^Y(Y_*; \varepsilon) = \{y \in Y : \ \rho_Y(y, Y_*) \leqslant \varepsilon\}$.

Здесь $\rho_X(x, X_*) = \inf\limits_{x_* \in X_*} \rho_X(x, x_*)$, $\rho_Y(y, Y_*) = \inf\limits_{y_* \in Y_*} \rho(y, y_*)$.

Определение 3.1. Пусть задано $\alpha > 0$. Отображение $\Psi : X \mapsto Y$ называется *α-накрывающим*, если

$$\Psi(\mathbb{B}^X(x; r)) \supset \mathbb{B}^Y(\Psi(x); \alpha r) \quad \forall\, r \geqslant 0,\ \forall\, x \in X.$$

Аналогия между отображением $f = f(t, x, u) : D \times P \mapsto \mathbb{R}^n$ из условия E и α-накрывающим отображением $\Psi : X \mapsto Y$ очевидна. Так, если в пункте (*b*) условия E функция $\varkappa = \delta(\rho)$ оказалась вида $\varkappa = \delta(\rho) = \rho/\alpha$, где α — некоторое положительное число, то $\rho = \delta^{-1}(\varkappa) = \alpha\varkappa$, $\varkappa \geqslant 0$, и тогда включение (3.7) принимает вид

$$f(t, x, \mathbb{B}^r(u; \varkappa)) \supset \mathbb{B}^n(f(t, x, u); \alpha\varkappa), \quad (t, x, u) \in D \times P, \ \varkappa \in [0, \infty).$$

В [7] отображение называется накрывающим, если оно является α-накрывающим для некоторого $\alpha > 0$. В [7] приведены такие примеры накрывающих отображений.

В теории дифференциальных игр понятие накрывающего отображения применялось при изучении свойства стабильности, основного в позиционных дифференциальных играх [11]. Понятие накрывающего отображения было использовано при обосновании корректности аппроксимирующих схем для вычисления максимальных u-стабильных мостов в задачах о сближении. Отметим при этом, что в статье [11] термин «накрывающее отображение» не использовался, поскольку был неизвестен авторам этой статьи.

Итак, как и в варианте I, обратимся теперь к рассмотрению начальной точки $x^{(0)} \in \mathcal{W}^a(t_0)$, а также ломаной $\overline{x}(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, начинающейся в $x^{(0)}$ (то есть $\overline{x}(t_0) = x^{(0)}$) и заканчивающейся в точке $\overline{x}(\theta) = \overline{x}(t_N) \in M_{\sigma^*(\Delta)+\chi(\Delta)}$.

В дополнение к управлению $u^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, сформируем по шагам $[t_j, t_{j+1}]$ разбиения Γ кусочно-постоянное управление $v^*(t) \in \mathbb{B}^r(\mathbf{0}; \delta(\rho))$, $t \in [t_0, \theta]$, так, чтобы управлению $u^*(t) + v^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, соответствовала ломаная Эйлера $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$, $\widetilde{\widetilde{x}}(t_0) = x^{(0)}$, уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u^*(t) + v^*(t)),$$

удовлетворяющая равенствам

$$\widetilde{\widetilde{x}}(t_j) = \overline{x}(t_j), \quad j = \overline{1, N}.$$

Так сформированное пошаговое дополнительное управление $v^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, вкупе с управлением $u^*(t)$ позволяют нам обнулить рассогласования $\rho^{(j)} = ||\widetilde{x}(t_j) - \overline{x}(t_j)||$, $j = \overline{1, N}$, являющиеся значительными в случае управляемой системы (3.1). В итоге в результате вовлечения $v^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, в процесс управления совпадут конечные точки $\widetilde{\widetilde{x}}(t_N)$ и $\overline{x}(t_N) \in M_{\sigma^*(\Delta)+\chi(\Delta)}$ ломаных $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$ и $\overline{x}(t)$, $t \in [t_0, \theta]$.

Ломаная Эйлера $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, имеет вид

$$\widetilde{\widetilde{x}}(t) = \widetilde{\widetilde{x}}^{(j)} + (t - t_j) f(t_j, \widetilde{\widetilde{x}}^{(j)}, u^{(j)} + v^{(j)}), \ \widetilde{\widetilde{x}}(t_0) = x^{(0)}, \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \ j = \overline{0, N};$$

здесь обозначено $\widetilde{\widetilde{x}}^{(j)} = \widetilde{\widetilde{x}}(t_j)$, $j = \overline{0, N}$.

Мы считаем число $\rho > 0$ настолько малым, что $\delta(\rho) \leqslant \delta^*$, а диаметр $\Delta = \Delta(\Gamma)$ разбиения Γ настолько малым, что

$$\omega(\Delta) = LK\Delta + \omega^*(\Delta) \leqslant \rho.$$

Опишем, как последовательно по шагам $[t_j, t_{j+1}]$ разбиения Γ формируется кусочно-постоянное управление $v^*(t) = v^{(j)}$, $t \in [t_j, t_{j+1})$, $j = \overline{0, N-1}$.

Рассмотрим начальный промежуток $[t_0, t_1]$ разбиения Γ и конечные точки

$$\widetilde{\widetilde{x}}^{(1)} = x^{(0)} + \Delta f(t_0, x^{(0)}, u^{(0)} + v^{(0)}),$$

$$\overline{x}^{(1)} = x^{(0)} + \Delta f(t_1, \overline{x}^{(1)}, u^{(0)})$$

ломаных $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$ и $\overline{x}(t)$ на промежутке $[t_0, t_1]$.

Вектор $u^{(0)}$ нам известен к моменту t_0, а вектор $v^{(0)}$ мы формируем в начальный момент t_0 промежутка $[t_0, t_1]$.

В момент t_0 нам известна пара $\overline{x}^{(1)}$, $u^{(0)}$, поэтому в момент t_0 известен вектор

$$w^{(0)} = f(t_1, \overline{x}^{(1)}, u^{(0)}) - f(t_0, x^{(0)}, u^{(0)}).$$

Вектор $w^{(0)}$ удовлетворяет неравенству

$$||w^{(0)}|| = ||f(t_1, \overline{x}^{(1)}, u^{(0)}) - f(t_0, x^{(0)}, u^{(0)})|| \leqslant \omega(\Delta) \leqslant \rho,$$

то есть $w^{(0)} \in \mathbb{B}^n(\mathbf{0}; \rho)$.

Рассмотрим нелинейное векторное управление относительно $v^{(0)} \in \mathbb{B}^r(\mathbf{0}; \delta(\rho))$

$$f(t_0, x^{(0)}, u^{(0)} + v^{(0)}) = f(t_1, \overline{x}^{(1)}, u^{(0)}),$$

то есть

$$f(t_0, x^{(0)}, u^{(0)} + v^{(0)}) = f(t_0, x^{(0)}, u^{(0)}) + w^{(0)}. \tag{3.8}$$

Согласно пункту (b) условия E решение $v^{(0)} \in \mathbb{B}^r(\mathbf{0}; \delta(\rho))$ существует.

Отметим, что методы решения нелинейных векторных уравнений в настоящее время достаточно развиты. В том числе развиты итерационные методы решения таких уравнений (см., например, [12]). Мы не будем здесь углубляться в эту тематику.

Будем считать, что мы можем оперативно за необходимое время решить уравнение (3.8). Вычислив решение $v^{(0)} \in \mathbb{B}^r(\mathbf{0}; \delta(\rho))$ уравнения (3.8), полагаем $v^*(t) = v^{(0)}$, $t \in [t_0, t_1)$.

При таком выборе $v^{(0)}$ получаем звено ломаной Эйлера

$$\widetilde{\widetilde{x}}(t) = x^{(0)} + (t - t_0) f(t_0, x^{(0)}, u^{(0)} + v^{(0)})$$

с конечной точкой $\widetilde{\widetilde{x}}(t_1) = \overline{x}(t_1)$.

Таким образом, управление $v^{(0)}$ действительно играет роль управления-компенсатора, с помощью которого обнуляется рассогласование между конечными точками $\widetilde{\widetilde{x}}(t_1)$ и $\overline{x}(t_1)$ ломаных $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$ и $\overline{x}(t)$ на $[t_0, t_1]$.

Далее рассматриваем следующий промежуток $[t_1, t_2]$ разбиения Г. Нас интересуют конечные точки $\widetilde{\widetilde{x}}^{(2)}$ и $\overline{x}^{(2)}$,

$$\widetilde{\widetilde{x}}^{(2)} = \widetilde{\widetilde{x}}^{(1)} + \Delta f(t_1, \widetilde{\widetilde{x}}^{(1)}, u^{(1)} + v^{(1)}),$$
$$\overline{x}^{(2)} = \overline{x}^{(1)} + \Delta f(t_2, \overline{x}^{(2)}, u^{(1)})$$

ломаных $\widetilde{\widetilde{x}}^{(2)}(t)$ и $\overline{x}(t)$ на этом промежутке.

Постараемся сформировать вектор $v^{(1)} \in \mathbb{B}^r(\mathbf{0}; \delta(\rho))$ так, чтобы $\widetilde{\widetilde{x}}^{(2)} = \overline{x}^{(2)}$. При этом считаем, что на момент t_1 формирования вектора $v^{(1)}$ нам известна, помимо $\widetilde{\widetilde{x}}^{(1)} = \overline{x}^{(1)}$, еще и точка $\overline{x}^{(2)}$. Учитывая это, вычисляем вектор

$$w^{(1)} = f(t_2, \overline{x}^{(2)}, u^{(1)}) - f(t_1, \widetilde{\widetilde{x}}^{(1)}, u^{(1)}) = f(t_2, \overline{x}^{(2)}, u^{(1)}) - f(t_1, \overline{x}^{(1)}, u^{(1)}).$$

Вектор $w^{(1)}$ удовлетворяет неравенству

$$||w^{(1)}|| = ||f(t_1, \overline{x}^{(2)}, u^{(1)}) - f(t_1, \overline{x}^{(1)}, u^{(1)})|| \leqslant \omega(\Delta) \leqslant \rho,$$

то есть $w^{(1)} \in \mathbb{B}^n(\mathbf{0}; \rho)$.

Рассмотрим нелинейное векторное уравнение относительно $v^{(1)} \in \mathbb{B}^r(\mathbf{0}; \delta(\rho))$

$$f(t_1, \widetilde{\widetilde{x}}^{(1)}, u^{(1)} + v^{(1)}) = f(t_2, \overline{x}^{(2)}, u^{(1)}),$$

то есть

$$f(t_1, \overline{x}^{(1)}, u^{(1)} + v^{(1)}) = f(t_1, \overline{x}^{(1)}, u^{(1)}) + w^{(1)}. \tag{3.9}$$

Принимая во внимание пункт (b) условия E, заключаем, что решение $v^{(1)} \in \mathbb{B}^r(\mathbf{0}; \delta(\rho))$ уравнения (3.9) существует. Вычислив оперативно это решение $v^{(1)}$, полагаем $v^*(t) = v^{(1)}$, $t \in [t_1, t_2)$.

При таком выборе $v^{(1)}$ получаем следующее звено ломаной Эйлера $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$:

$$\widetilde{\widetilde{x}}(t) = \widetilde{\widetilde{x}}^{(1)} + (t - t_1) f(t_1, \widetilde{\widetilde{x}}^{(1)}, u^{(1)} + v^{(1)})$$

с начальной точкой $\widetilde{\widetilde{x}}(t_2) = \overline{x}(t_2)$.

Таким образом, дополнив управление $u^{(1)}$ управлением $v^{(1)}$, мы обнулили рассогласование между конечными точками $\widetilde{\widetilde{x}}(t_2)$ и $\overline{x}(t_2)$ ломаных $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$ и $\overline{x}(t)$ на $[t_1, t_2]$.

Продолжаем на последующих промежутках $[t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{2, N-1}$, конструировать векторы $v^{(j)} \in \mathbb{B}^r(\mathbf{0}; \delta(\rho))$ как решения векторного нелинейного уравнения

$$f(t_j, \overline{x}^{(j)}, u^{(j)} + v^{(j)}) = f(t_j, \overline{x}^{(j)}, u^{(j)}) + w^{(j)},$$

где

$$w^{(j)} = f(t_{j+1}, \overline{x}^{(j+1)}, u^{(j)}) - f(t_j, \overline{x}^{(j)}, u^{(j)}).$$

В результате применения к системе (3.1) такого управления-компенсатора $v^*(t) = v^{(j)}$, $t \in [t_j, t_{j+1})$, $j = \overline{0, N-1}$, получим ломаную Эйлера $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, $\widetilde{\widetilde{x}}(t_0) = x^{(0)}$, системы (3.1), полностью совпадающую с ломаной $\overline{x}(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, и, значит, удовлетворяющую соотношению $\widetilde{\widetilde{x}}(t_N) = \overline{x}(t_N) \in M_{\sigma^*(\Delta)+\chi(\Delta)}$.

Далее, так же как и в варианте I, возникает вопрос о том, насколько сильно отличается движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x^{(0)}$, $t \in [t_0, \theta]$, системы (3.1), порожденное управлением $u^*(t) + v^*(t) \in \mathbb{B}^r(P; \delta(\rho))$, $t \in [t_0, \theta]$, от ломаной Эйлера $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$, $\widetilde{\widetilde{x}}(t_0) = x^{(0)}$, системы (3.1), соответствующей управлению $u^*(t) + v^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$.

В этом случае, как и в варианте I, для нас представляет интерес в конечном итоге оценка сверху величины $||x^*(t_N) - \widetilde{\widetilde{x}}(t_N)||$. Схема вывода оценки этой величины такая же, как и схема вывода аналогичной оценки в варианте I. В результате имеем

$$||x^*(t_N) - \widetilde{\widetilde{x}}(t_N)|| < e^{L(\theta - t_0)}(K^{\delta^*}\Delta + L^{-1}\omega^*(\Delta)), \tag{3.10}$$

где обозначено $K^{\delta^*} = \max\limits_{(t,x,u+v)\in D\times\mathbb{B}^r(P;\delta^*)} ||f(t, x, u + v)||$.

Из включения $\widetilde{\widetilde{x}}(t_N) \in M_{\sigma^*(\Delta)+\chi(\Delta)}$ и оценки (3.10) вытекает оценка

$$\rho(x^*(t_N), M) < e^{L(\theta - t_0)}(K^{\delta^*}\Delta + L^{-1}\omega^*(\Delta)) + \sigma^*(\Delta) + \chi(\Delta). \tag{3.11}$$

Оценка (3.11) есть аналог в варианте II оценки (3.6). Оценка (3.10) проведена для движения $x^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, системы (3.1), порожденного управлением $u^*(t) + v^*(t) \in \mathbb{B}^r(P; \delta(\rho)) \subset \mathbb{B}^r(P; \delta^*)$ на $[t_0, \theta]$.

Очевидно, что при малых $\delta^* > 0$ число K^{δ^*} близко к K, и поэтому при малых $\delta^* > 0$ оценка (3.11) будет лучше, чем оценка (3.6). Есть определенная уверенность в том, что использование в процессе управления дополнительного к $u^*(t)$ управления-компенсатора $v^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, может существенно улучшить результат управления системой (3.1).

В дополнение к варианту II и представленному в нем алгоритму вычисления управления-компенсатора $v^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, выделим те задачи о сближении, в которых ограничение P на управление u удовлетворяет следующему условию.

Условие F. Множество $\mathbb{U} = P \dot{-} \mathbb{B}^r(\mathbf{0}; \delta) \neq \varnothing$ при некотором достаточно малом $\delta > 0$ и при этом множества P и $\mathbb{U}$ близки в хаусдорфовой метрике; здесь $P \dot{-} \mathbb{B}^r(\mathbf{0}; \delta) = \{u \in \mathbb{R}^r : u + \mathbb{B}^r(\mathbf{0}; \delta) \subset P\}$ — альтернированная разность множеств P и $\mathbb{B}^r(\mathbf{0}; \delta)$.

В этом случае возможен такой путь решения задачи о сближении системы (3.1) с целевым множеством M. Рассматриваем задачу о сближении управляемой системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad u \in \mathbb{U}, \tag{3.12}$$

с целевым множеством $M \subset \mathbb{R}^n$ в момент θ.

Поскольку в этой новой задаче о сближении ограничение $\mathbb{U}$ на управление u у́же, чем ограничение P в задаче 1 о сближении, то множество разрешимости W^* новой задачи о сближении удовлетворяет включению $W^* \subset W$. Из-за близости множеств P и $\mathbb{U}$ множества W и W^* мало отличаются в хаусдорфовой метрике. Эта близость множеств W и W^* является для нас достаточным основанием, чтобы вместо множества W конструировать несколько меньшее множество W^* и его использовать при конструировании разрешающего управления в задаче о сближении системы (3.1) с M.

Множество $W^* \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ мы конструируем приближенно, согласно схеме пункта 1 — как конечное множество $\widehat{\mathcal{W}}^{*a} \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$, и для произвольно выбранной точки $x^{(0)} \in \widehat{\mathcal{W}}^{*a}(t_0) \subset \subset \mathbb{R}^n$ конструируем по шагам $[t_j, t_{j+1}]$ разбиения Γ управление $u^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, в задаче о сближении системы (3.12) с M в момент θ.

Далее рассматриваем управляемую систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u + v),$$

где $u \in \mathbb{U}$, $v \in \mathbb{B}^r(\mathbf{0}; \delta)$ на $[t_0, \theta]$ с начальным условием $x(t_0) = x^{(0)}$.

Считая диаметр $\Delta = \Delta(\Gamma)$ разбиения Γ настолько малым, что $\omega(\Delta) \leqslant \delta$, конструируем последовательно по шагам $[t_j, t_{j+1}]$ разбиения Γ кусочно-постоянное управление-компенсатор $v^*(t) = v^{(j)}$, $t \in [t_j, t_{j+1})$, $j = \overline{0, N-1}$.

Пара сконструированных таким образом управлений $u^*(t)$, $v^*(t)$ на $[t_0, \theta]$ удовлетворяет включению $u^*(t) + v^*(t) \in \mathbb{U} + \mathbb{B}^r(\mathbf{0}; \delta) \subset P$, $t \in [t_0, \theta]$, и, значит, управление $u^*(t) + v^*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, будет допустимым управлением в исходной системе (3.1). Это управление, как мы полагаем, должно существенно улучшить качество приближенного решения задачи 1 о сближении управляемой системы (3.1) с целевым множеством M.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 458 с.
2. Куржанский А.Б. Избранные труды. М.: Изд-во Московского университета, 2009. 756 с.
3. Осипов Ю.С. Избранные труды. М.: Изд-во Московского университета, 2009. 654 с.
4. Ушаков В.Н., Ухоботов В.И., Ушаков А.В., Паршиков Г.В. К решению задач о сближении управляемых систем // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 276–291. DOI: 10.1134/S0371968515040214
5. Никольский М.С. Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина // Математический сборник. 1981. Т. 116. № 1. С. 136–144.
6. Ушаков А.В. Об одном варианте приближенного построения разрешающих управлений в задаче о сближении // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. № 4. С. 94–107. DOI: 10.20537/vm120408
7. Ушаков В.Н., Лавров Н.Г., Ушаков А.В. Конструирование решений в задаче о сближении стационарной управляемой системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 277–286.
8. Арутюнов А.В. Лекции по выпуклому анализу. М.: Физматлит, 2014. 188 с.
9. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
10. Арутюнов А.В. Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Математические заметки. 2009. Т. 86. Вып. 2. С. 163–169.
11. Ушаков В.Н., Хрипунов А.П. О приближенном построении решений в игровых задачах управления // Прикладная математика и механика. 1997. Вып. 3. С. 413–421.
12. Ortega J.M., Rheinboldt W.C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables. Philadelphia: SIAM, 1970. 572 p.

Поступила в редакцию 17.10.2016

Ушаков Владимир Николаевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Ершов Александр Анатольевич, к. ф.-м. н., научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: ale10919@yandex.ru

V. N. Ushakov, A. A. Ershov

On the solution of control problems with fixed terminal time

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 543–564 (in Russian).

Keywords: control problem, approaching problem, correcting control, controlled system, integral funnel, set of solvability.

MSC2010: 49M25

DOI: 10.20537/vm160409

We consider the nonlinear controlled system in a finite-dimensional Euclidean space in a finite time interval. We study the problem of a system approaching a given compact set in finite time. Approximate solution of the approaching problem is discussed. The approach used to construct an approximate solution is based on constructions based on the notion of a set of solvability of the approaching problem. The concept of correcting control with and without additional operating influences is introduced. We propose a scheme of approximate backward construction of the solvability set, as well as the scheme of control software, which allows finding approximately a solution to the approaching problem. In it, the operating influence breaks down into "main" and "correcting". An estimate of the deviation of the operated system from the target set at the final moment is constructed and it is shown that the use of additional correcting control in the control process can essentially improve the result of control.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 458 p.
2. Kurzhanskii A.B. *Izbrannye trudy* (Selected works), Moscow: Moscow State University, 2009, 756 p.
3. Osipov Yu.S. *Izbrannye trudy* (Selected works), Moscow: Moscow State University, 2009, 654 p.
4. Ushakov V.N., Ukhobotov V.I., Ushakov A.V., Parshikov G.V. On solving approach problems for control systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, issue 1, pp. 263–278. DOI: 10.1134/S0081543815080210
5. Nikol'skii M.S. On the alternating integral of Pontrjagin, *Mathematics of the USSR–Sbornik*, 1983, vol. 44, no. 1, pp. 125–132. DOI: 10.1070/SM1983v044n01ABEH000956
6. Ushakov A.V. On one version of approximate permitting control calculation in a problem of approaching, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, issue 4, pp. 94–107 (in Russian). DOI: 10.20537/vm120408
7. Ushakov V.N., Lavrov N.G., Ushakov A.V. Construction of solutions in an approach problem of a stationary control system, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 277–286 (in Russian).
8. Arutyunov A.V. *Lektsii po vypuklomu analizu* (Lections on the convex analysis), Moscow: Fizmatlit, 2014, 188 p.
9. Arutyunov A.V. Covering mapping in metric spaces and fixed points, *Doklady Mathematics*, 2007, vol. 76, issue 2, pp. 665–668. DOI: 10.1134/S1064562407050079
10. Arutyunov A.V. Stability of coincidence points and properties of covering mappings, *Mathematical Notes*, 2009, vol. 86, issue 2, pp. 153–158. DOI: 10.1134/S0001434609070177
11. Ushakov V.N., Khripunov A.P. Approximate construction of solutions in game-theoretic control problems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, vol. 61, issue 3, pp. 401–408. DOI: 10.1016/S0021-8928(97)00051-8

12. Ortega J.M., Rheinboldt W.C. *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Philadelphia: SIAM, 1970, 572 p.

Received 17.10.2016

Ushakov Vladimir Nikolaevich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, Department of Dynamic Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Ershov Aleksandr Anatol'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Department of Dynamic Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: ale10919@yandex.ru