ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 4

УДК 517.958, 530.145.6

© *Т. С. Тинюкова*

КВАЗИУРОВНИ ДВУМЕРНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА В ПОЛОСЕ

В последнее десятилетие в физической литературе активно изучаются топологические изоляторы. Топологический изолятор — особый тип материала, который внутри объема представляет собой изолятор, а на поверхности проводит электрический ток. Топологические изоляторы обладают интересными физическими свойствами. Например, топологические свойства этого материала могут устойчиво сохраняться вплоть до высоких температур. Топологические изоляторы могут найти применение в самых разнообразных устройствах микроэлектроники: от очень быстрых и экономичных процессоров до топологических квантовых компьютеров. Электрон в топологическом изоляторе описывается безмассовым оператором Дирака. Такие операторы в квазиодномерных структурах (например, в полосках с различными граничными условиями) весьма интересны не только с физической, но и с математической точки зрения, однако до сих пор недостаточно изучены математиками. В данной статье рассматривается разностный оператор Дирака для потенциала вида $V_0\delta_{n0}$. Описан спектр и найдены собственные значения такого оператора. Кроме того, исследованы квазиуровни (собственные значения и резонансы) в случае малых потенциалов.

Ключевые слова: разностный оператор Дирака, резольвента, спектр, квазиуровень, собственное значение, резонанс.

DOI: 10.20537/vm160408

В последнее десятилетие в физической литературе активно изучается новый класс материалов — топологические изоляторы [1, 2]. Гамильтониан электрона на поверхности трехмерного топологического изолятора имеет вид двумерного безмассового оператора Дирака $\mathcal{H}_0 = (\overline{\sigma}, \overline{p})$, где $\overline{p} = \left(-i\dfrac{\partial}{\partial x}, -i\dfrac{\partial}{\partial y}, 0\right)$ — оператор импульса, $\overline{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ — набор матриц Паули (см. [3, 4]).

Рассматривается разностный аналог H_0 оператора $\mathcal{H}_0$ в полосе $\Omega = \mathbb{Z} \times \{1, \ldots, N\}$ с периодическим граничным условием, который действует на функцию $\psi(n,m) = \begin{pmatrix} \psi_1(n,m) \\ \psi_2(n,m) \end{pmatrix}$, $\psi_j \in l^2(\Omega)$, $j = 1, 2$, следующим образом:

$$H_0\psi(n,m) = \begin{pmatrix} 0 & H_{01} - iH_{02} \\ H_{01} + iH_{02} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(n,m) \\ \psi_2(n,m) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где оператор H_{01} действует по формуле

$$H_{01}\psi(n) = -\frac{i}{2}(\psi(n+1) - \psi(n-1)),$$

а действие оператора H_{02} определяется равенствами

$$\begin{aligned} (H_{02}\psi)(m) &= -\frac{i}{2}(\psi(m+1) - \psi(m-1)), \quad m = 2, \ldots, N-1, \\ (H_{02}\psi)(1) &= -\frac{i}{2}(\psi(2) - \psi(N)), \\ (H_{02}\psi)(N) &= -\frac{i}{2}(\psi(1) - \psi(N-1)) \end{aligned} \tag{2}$$

(см. в [5] исследование «непрерывного» аналога оператора H_0).

Функции $\dfrac{1}{\sqrt{N}}e^{im\frac{2\pi l}{N}}$, $l=1,\ldots,N$, являются собственными функциями оператора H_{02} с соответствующими собственными значениями $\lambda_l=\sin\frac{2\pi l}{N}$ и образуют ортонормированный базис пространства $l^2(\{1,\ldots,N\})\cong\mathbb{C}^n$ (см. [6]). После разложения $\psi(n,m)$ в ряд Фурье по l, т. е. по подзонам, оператор H_0, как и резольвента $R_0(\lambda)=(H_0-\lambda I)^{-1}$, «расслаивается» на операторы (резольвенты) в подзонах.

Спектр оператора H_0 будем обозначать через $\sigma(A)$.

Лемма 1. *Для резольвенты оператора H_0 справедливы формулы*

$$(R_0(\lambda)\varphi)_1(n)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}e^{ip(n-n')}\frac{\left(\lambda\varphi_{1l}(n')+\left(\sin p-i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)\varphi_{2l}(n')\right)}{\lambda^2-\sin^2\frac{2\pi l}{N}-\sin^2 p}\,dp,$$
$$(R_0(\lambda)\varphi)_2(n)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}e^{ip(n-n')}\frac{\left(\lambda\varphi_{2l}(n')+\left(\sin p+i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)\varphi_{1l}(n')\right)}{\lambda^2-\sin^2\frac{2\pi l}{N}-\sin^2 p}\,dp.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения для нахождения резольвенты оператора H_0

$$(H_0-\lambda)\psi=\varphi$$

имеем (см. [6])

$$\widehat{\psi}_{1l}(p)=\frac{-\lambda\widehat{\varphi}_{1l}(p)-\left(\sin p-i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)\widehat{\varphi}_{2l}(p)}{\lambda^2-\left(\sin^2\frac{2\pi l}{N}+\sin^2 p\right)},\quad \widehat{\psi}_{2l}(p)=\frac{-\lambda\widehat{\varphi}_{2l}(p)-\left(\sin p+i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)\widehat{\varphi}_{1l}(p)}{\lambda^2-\left(\sin^2\frac{2\pi l}{N}+\sin^2 p\right)},$$

где $\psi_{jl}(n)=\dfrac{1}{\sqrt{N}}\sum\limits_{m=1}^{N}\psi_j(n,m)e^{-im\frac{2\pi l}{N}}$, $\widehat{\psi}_{jl}(p)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}e^{-inp}\psi_{jl}(n)$, $j=1,2$. Тогда

$$\psi_{1l}(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}e^{inp}\widehat{\psi}_{1l}(p)\,dp=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}e^{inp}\left(\frac{-\lambda\widehat{\varphi}_{1l}(p)-\left(\sin p-i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)\widehat{\varphi}_{2l}(p)}{\lambda^2-\left(\sin^2\frac{2\pi l}{N}+\sin^2 p\right)}\right)dp=$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}e^{ip(n-n')}\frac{\left(\lambda\varphi_{1l}(n')+\left(\sin p-i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)\varphi_{2l}(n')\right)}{\lambda^2-\sin^2\frac{2\pi l}{N}-\sin^2 p}\,dp,$$

$$\psi_{2l}(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}e^{inp}\widehat{\psi}_{2l}(p)\,dp=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}e^{ip(n-n')}\frac{\left(\lambda\varphi_{2l}(n')+\left(\sin p+i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)\varphi_{1l}(n')\right)}{\lambda^2-\sin^2\frac{2\pi l}{N}-\sin^2 p}\,dp.$$

□

Лемма 2. *Спектр оператора H_0 имеет вид $\sigma(H_0)=[-m,m]$, где*

$$m=\max\left\{\sqrt{\sin^2\left(\frac{2\pi}{N}\,[N/4]\right)+1},\sqrt{\sin^2\left(\frac{2\pi}{N}\,([N/4]+1)\right)+1}\right\}.$$

Справедливость утверждения леммы 2, очевидно, следует из условия существования точек спектра при равенстве нулю знаменателя функции Грина резольвенты (см. лемму 1).

Рассмотрим вначале оператор $H=H_0+V$ с простым потенциалом вида $V=V_0\delta_{n0}$, где δ_{n0} — символ Кронекера.

В дальнейшем будет удобно перейти от спектрального параметра λ к параметру k_l, где k_l — это квазиимпульс в l-й подзоне (см. [5]), который определяется формулами $a_l=\sqrt{\lambda^2-\sin^2\dfrac{2\pi l}{N}}$, $\cos k_l=a_l$, $l=1,\ldots,N$.

Назовем квазиуровнем собственное значение или резонанс (см. [10]).

Теорема 1. *В l-той подзоне собственные значения λ оператора H имеют вид*

$$\lambda = \pm\sqrt{V_0^2 + \sin^2\frac{2\pi l}{N} + 1}, \quad l \in \{1, \ldots, N\}.$$

Доказательство. Уравнение $(H_0 + V)\psi = \lambda\psi$ на собственные значения для оператора H, в силу результатов леммы 1 и [6], перепишем в виде

$$\begin{aligned}
\psi_{1l}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n'\in\mathbb{Z}} e^{ip(n-n')}\frac{\left(\lambda(V\psi_{1l})(n') + \left(\sin p - i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)(V\psi_{2l})(n')\right)}{\lambda^2 - \sin^2\frac{2\pi l}{N} - \sin^2 p}\,dp = \\
&= \frac{\lambda V_0\psi_{1l}(0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ipn}}{\lambda^2 - \sin^2\frac{2\pi l}{N} - \sin^2 p}\,dp + \frac{V_0\psi_{2l}(0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ipn}\left(\sin p - i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)}{\lambda^2 - \sin^2\frac{2\pi l}{N} - \sin^2 p}\,dp = \\
&= \frac{\pi i^n}{a_l\sqrt{a_l^2 - 1}}\left(e^{ik_l|n|} + (-1)^{n+1}e^{-ik_l|n|}\right)\left(\frac{\lambda V_0\psi_{1l}(0)}{2\pi} - i\sin\frac{2\pi l}{N}\cdot\frac{V_0\psi_{2l}(0)}{2\pi}\right) + \\
&\quad + \frac{V_0\psi_{2l}(0)}{2\pi}\cdot\frac{\pi i^n}{\sqrt{a_l^2 - 1}}\left(e^{ik_l|n|} + (-1)^n e^{-ik_l|n|}\right), \\
\psi_{2l}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n'\in\mathbb{Z}} e^{ip(n-n')}\frac{\left(\lambda(V\psi_{2l})(n') + \left(\sin p + i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)(V\psi_{1l})(n')\right)}{\lambda^2 - \sin^2\frac{2\pi l}{N} - \sin^2 p}\,dp = \\
&= \frac{\lambda V_0\psi_{2l}(0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ipn}}{\lambda^2 - \sin^2\frac{2\pi l}{N} - \sin^2 p}\,dp + \frac{V_0\psi_{1l}(0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ipn}\left(\sin p + i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)}{\lambda^2 - \sin^2\frac{2\pi l}{N} - \sin^2 p}\,dp = \\
&= \frac{\pi i^n}{a_l\sqrt{a_l^2 - 1}}\left(e^{ik_l|n|} + (-1)^{n+1}e^{-ik_l|n|}\right)\left(\frac{\lambda V_0\psi_{2l}(0)}{2\pi} + i\sin\frac{2\pi l}{N}\cdot\frac{V_0\psi_{1l}(0)}{2\pi}\right) + \\
&\quad + \frac{V_0\psi_{1l}(0)}{2\pi}\cdot\frac{\pi i^n}{\sqrt{a_l^2 - 1}}\left(e^{ik_l|n|} + (-1)^n e^{-ik_l|n|}\right).
\end{aligned} \tag{3}$$

Таким образом, существование ненулевого решения уравнения (3) эквивалентно существованию ненулевого решения системы

$$\begin{cases}
\psi_{1l}(0) = \dfrac{V_0\psi_{2l}(0)}{\sqrt{a_l^2 - 1}}, \\
\psi_{2l}(0) = \dfrac{V_0\psi_{1l}(0)}{\sqrt{a_l^2 - 1}}.
\end{cases}$$

Данная система имеет ненулевое решение, если справедливо равенство

$$\lambda^2 = V_0^2 + \sin^2\frac{2\pi l}{N} + 1.$$

□

Рассмотрим теперь оператор с экспоненциально убывающим потенциалом $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V(n)$, где $|V(n)| \leqslant Ce^{-\alpha|n|}$, $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$. Запишем уравнения, определяющие квазиуровни оператора H_ε, с учетом вида резольвенты оператора H_0 (см. лемму 1):

$$\begin{aligned}
\psi_{1l}(n) &= \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n'\in\mathbb{Z}} e^{ip(n-n')}\frac{\left(\lambda V(n')\psi_{1l}(n') + \left(\sin p - i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)V(n')\psi_{2l}(n')\right)}{\lambda^2 - \sin^2\frac{2\pi l}{N} - \sin^2 p}\,dp, \\
\psi_{2l}(n) &= \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n'\in\mathbb{Z}} e^{ip(n-n')}\frac{\left(\lambda V(n')\psi_{2l}(n') + \left(\sin p + i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)V(n')\psi_{1l}(n')\right)}{\lambda^2 - \sin^2\frac{2\pi l}{N} - \sin^2 p}\,dp.
\end{aligned} \tag{4}$$

Обозначим $\varphi_{1l}(n)=\sqrt{|V(n)|}\psi_{1l}(n)$, $\varphi_{2l}(n)=\sqrt{|V(n)|}\psi_{2l}(n)$. Получим уравнение на квазиуровни:

$$\varphi_{1l}(n)=\frac{\varepsilon\sqrt{|V(n)|}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}e^{ip(n-n')}\frac{(\lambda\sqrt{V(n')}\varphi_{1l}(n')+\left(\sin p-i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)\sqrt{V(n')}\varphi_{2l}(n'))}{\lambda^2-\sin^2\frac{2\pi l}{N}-\sin^2 p}\,dp,$$

$$\psi_{2l}(n)=\frac{\varepsilon\sqrt{|V(n)|}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}e^{ip(n-n')}\frac{(\lambda\sqrt{V(n')}\varphi_{2l}(n')+\left(\sin p+i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)\sqrt{V(n')}\varphi_{1l}(n'))}{\lambda^2-\sin^2\frac{2\pi l}{N}-\sin^2 p}\,dp.$$

Пусть

$$a_l=\sqrt{\lambda^2-\sin^2\frac{2\pi l}{N}},\quad \cos k_l=a_l,\quad \sin k_l=i\sqrt{a_l^2-1}.$$

Тогда (см. [6])

$$\begin{aligned}\varphi_{1l}(n)&=\frac{\varepsilon\sqrt{|V(n)|}}{2\pi}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\Big(\lambda\sqrt{V(n')}\varphi_{1l}(n')\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ip(n-n')}}{a_l^2-\sin^2 p}\,dp+\\&+\sqrt{V(n')}\varphi_{2l}(n')\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin p\cdot e^{ip(n-n')}}{a_l^2-\sin^2 p}\,dp-i\sin\frac{2\pi l}{N}\sqrt{V(n')}\varphi_{2l}(n')\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ip(n-n')}}{a_l^2-\sin^2 p}\,dp\Big)=\\&=\frac{\varepsilon i\sqrt{|V(n)|}}{\sin(2k_l)}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\sqrt{V(n')}i^{n-n'}\Big(\lambda\varphi_{1l}(n')\big(e^{ik_l|n-n'|}+(-1)^{n-n'+1}e^{-ik_l|n-n'|}\big)+\\&\quad+\varphi_{2l}(n')\cos k_l\big(e^{ik_l|n-n'|}+(-1)^{n-n'}e^{-ik_l|n-n'|}\big)-\\&\quad-i\sin\frac{2\pi l}{N}\varphi_{2l}(n')\big(e^{ik_l|n-n'|}+(-1)^{n-n'+1}e^{-ik_l|n-n'|}\big)\Big),\\\varphi_{2l}(n)&=\frac{\varepsilon i\sqrt{|V(n)|}}{\sin(2k_l)}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\sqrt{V(n')}i^{n-n'}\Big(\lambda\varphi_{2l}(n')\big(e^{ik_l|n-n'|}+(-1)^{n-n'+1}e^{-ik_l|n-n'|}\big)+\\&\quad+\varphi_{1l}(n')\cos k_l\big(e^{ik_l|n-n'|}+(-1)^{n-n'}e^{-ik_l|n-n'|}\big)+\\&\quad+i\sin\frac{2\pi l}{N}\varphi_{1l}(n')\big(e^{ik_l|n-n'|}+(-1)^{n-n'+1}e^{-ik_l|n-n'|}\big)\Big),\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\varphi_{1l}(n)&=\frac{\varepsilon i\sqrt{|V(n)|}}{2k_l}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\sqrt{V(n')}i^{n-n'}\Big(\lambda\varphi_{1l}(n')\big(1+(-1)^{n-n'+1}\big)+\varphi_{2l}(n')\big(1+(-1)^{n-n'}\big)-\\&\quad-i\sin\frac{2\pi l}{N}\varphi_{2l}(n')\big(1+(-1)^{n-n'+1}\big)\Big)+\varepsilon K_1(1)(\varphi_{1l},\varphi_{2l}),\\\varphi_{2l}(n)&=\frac{\varepsilon i\sqrt{|V(n)|}}{2k_l}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\sqrt{V(n')}i^{n-n'}\Big(\lambda\varphi_{2l}(n')\big(1+(-1)^{n-n'+1}\big)+\varphi_{1l}(n')\big(1+(-1)^{n-n'}\big)+\\&\quad+i\sin\frac{2\pi l}{N}\varphi_{1l}(n')\big(1+(-1)^{n-n'+1}\big)\Big)+\varepsilon K_2(1)(\varphi_{1l},\varphi_{2l}),\end{aligned}$$

где K_1 и K_2 аналитически зависят от k_l.

Положим $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_{1l}\\\varphi_{2l}\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}K_1\\K_2\end{pmatrix}$, $\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}=(\varphi-\varepsilon K\varphi)(n)$. Заметим, что $\xi_i=\xi_i(\varphi_{1l},\varphi_{2l})$ и $\varphi_{il}=\xi_i+O(\varepsilon)$, $i=1,2$.

$$\begin{aligned}\xi_1(n)=\frac{\varepsilon i\sqrt{|V(n)|}}{2k_l}\Big(&\lambda i^n\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\sqrt{V(n')}\varphi_{1l}(n')i^{-n'}+\lambda i^n(-1)^{n+1}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\sqrt{V(n')}\varphi_{1l}(n')i^{-n'}(-1)^{-n'}+\\&+i^n\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\sqrt{V(n')}\varphi_{2l}(n')i^{-n'}+i^n(-1)^n\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\sqrt{V(n')}\varphi_{2l}(n')i^{-n'}(-1)^{-n'}-\end{aligned}$$

$$- i\sin\frac{2\pi l}{N}i^n\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\sqrt{V(n')}\varphi_{2l}(n')i^{-n'} - i\sin\frac{2\pi l}{N}i^n(-1)^{n+1}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\sqrt{V(n')}\varphi_{2l}(n')i^{-n'}(-1)^{-n'}\Big)=$$

$$=\frac{\varepsilon i\sqrt{|V(n)|}}{2k_l}\Big(\lambda i^n(a,\varphi_{1l})+\lambda i^n(-1)^{n+1}(b,\varphi_{1l})+i^n(a,\varphi_{2l})+i^n(-1)^n(b,\varphi_{2l})-$$

$$-i\sin\frac{2\pi l}{N}i^n(a,\varphi_{2l})-i\sin\frac{2\pi l}{N}i^n(-1)^{n+1}(b,\varphi_{2l})\Big)=$$

$$=\frac{\varepsilon i\sqrt{|V(n)|}}{2k_l}\Big(\lambda i^n(a,\xi_1)+\lambda i^n(-1)^{n+1}(b,\xi_1)+i^n(a,\xi_2)+i^n(-1)^n(b,\xi_2)-$$

$$-i\sin\frac{2\pi l}{N}i^n(a,\xi_2)-i\sin\frac{2\pi l}{N}i^n(-1)^{n+1}(b,\xi_2)\Big)+O(\varepsilon^2), \tag{5}$$

где $a(n)=\sqrt{V(n)}i^{-n}$, $b(n)=\sqrt{V(n)}i^{-n}(-1)^{-n}$. Аналогично:

$$\xi_2(n)=\frac{\varepsilon i\sqrt{|V(n)|}}{2k_l}\Big(\lambda i^n(a,\xi_2)+\lambda i^n(-1)^{n+1}(b,\xi_2)+i^n(a,\xi_1)+i^n(-1)^n(b,\xi_1)+$$

$$+i\sin\frac{2\pi l}{N}i^n(a,\xi_1)+i\sin\frac{2\pi l}{N}i^n(-1)^{n+1}(b,\xi_1)\Big)+O(\varepsilon^2). \tag{6}$$

Введем обозначения $c(n)=\sqrt{|V(n)|}i^n$, $d(n)=\sqrt{|V(n)|}i^n(-1)^n$. Домножив (5) скалярно на $a(n)$, получим

$$(a,\xi_1)=\frac{\varepsilon i\lambda}{2k_l}(a,c)(a,\xi_1)-\frac{\varepsilon i\lambda}{2k_l}(a,d)(b,\xi_1)+\frac{\varepsilon i}{2k_l}(a,c)(a,\xi_2)+$$
$$+\frac{\varepsilon i}{2k_l}(a,d)(b,\xi_2)-\frac{\varepsilon i}{2k_l}i\sin\frac{2\pi l}{N}(a,c)(a,\xi_2)+\frac{\varepsilon i}{2k_l}i\sin\frac{2\pi l}{N}(a,d)(b,\xi_2)+O(\varepsilon^2)=$$
$$=\frac{\varepsilon i\lambda}{2k_l}(a,c)(a,\xi_1)-\frac{\varepsilon i\lambda}{2k_l}(a,d)(b,\xi_1)+\frac{\varepsilon i}{2k_l}\Big(1-i\sin\frac{2\pi l}{N}\Big)(a,c)(a,\xi_2)+$$
$$+\frac{\varepsilon i}{2k_l}\Big(1+i\sin\frac{2\pi l}{N}\Big)(a,d)(b,\xi_2)+O(\varepsilon^2).$$

Аналогично получим равенства

$$(b,\xi_1)=\frac{\varepsilon i\lambda}{2k_l}(b,c)(a,\xi_1)-\frac{\varepsilon i\lambda}{2k_l}(b,d)(b,\xi_1)+\frac{\varepsilon i}{2k_l}\Big(1-i\sin\frac{2\pi l}{N}\Big)(b,c)(a,\xi_2)+$$
$$+\frac{\varepsilon i}{2k_l}\Big(1+i\sin\frac{2\pi l}{N}\Big)(b,d)(b,\xi_2)+O(\varepsilon^2),$$
$$(a,\xi_2)=\frac{\varepsilon i\lambda}{2k_l}(a,c)(a,\xi_2)-\frac{\varepsilon i\lambda}{2k_l}(a,d)(b,\xi_2)+\frac{\varepsilon i}{2k_l}\Big(1+i\sin\frac{2\pi l}{N}\Big)(a,c)(a,\xi_1)+$$
$$+\frac{\varepsilon i}{2k_l}\Big(1-i\sin\frac{2\pi l}{N}\Big)(a,d)(b,\xi_1)+O(\varepsilon^2),$$
$$(b,\xi_2)=\frac{\varepsilon i\lambda}{2k_l}(b,c)(a,\xi_2)-\frac{\varepsilon i\lambda}{2k_l}(b,d)(b,\xi_2)+\frac{\varepsilon i\lambda}{2k_l}\Big(1+i\sin\frac{2\pi l}{N}\Big)(b,c)(a,\xi_1)+$$
$$+\frac{\varepsilon i\lambda}{2k_l}\Big(1-i\sin\frac{2\pi l}{N}\Big)(b,d)(b,\xi_1)+O(\varepsilon^2).$$

Итак, получена однородная система относительно неизвестных скалярных произведений (a,ξ_1), (b,ξ_1), (a,ξ_2), (b,ξ_2):

$$\big(A+O(\varepsilon^2)\big)\begin{pmatrix}(a,\xi_1)\\(b,\xi_1)\\(a,\xi_2)\\(b,\xi_2)\end{pmatrix}=0, \tag{7}$$

где матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{\varepsilon i\lambda(a,c)}{2k_l} & \frac{\varepsilon i\lambda(a,d)}{2k_l} & -\frac{\varepsilon i(a,c)}{2k_l}\left(1-i\sin\frac{2\pi l}{N}\right) & -\frac{\varepsilon i(a,d)}{2k_l}\left(1+i\sin\frac{2\pi l}{N}\right) \\ -\frac{\varepsilon i\lambda(b,c)}{2k_l} & 1+\frac{\varepsilon i\lambda(b,d)}{2k_l} & -\frac{\varepsilon i(b,c)}{2k_l}\left(1-i\sin\frac{2\pi l}{N}\right) & -\frac{\varepsilon i(b,d)}{2k_l}\left(1+i\sin\frac{2\pi l}{N}\right) \\ -\frac{\varepsilon i(a,c)}{2k_l}\left(1+i\sin\frac{2\pi l}{N}\right) & -\frac{\varepsilon i(a,d)}{2k_l}\left(1-i\sin\frac{2\pi l}{N}\right) & 1-\frac{\varepsilon i\lambda(a,c)}{2k_l} & \frac{\varepsilon i\lambda(a,d)}{2k_l} \\ -\frac{\varepsilon i(b,c)}{2k_l}\left(1+i\sin\frac{2\pi l}{N}\right) & -\frac{\varepsilon i(b,d)}{2k_l}\left(1-i\sin\frac{2\pi l}{N}\right) & -\frac{\varepsilon i\lambda(b,c)}{2k_l} & 1+\frac{\varepsilon i\lambda(b,d)}{2k_l} \end{pmatrix}.$$

Система (7) имеет решение, если $\det A = 0$, т. е.

$$k_l^4 + A_3(\varepsilon,k_l)k_l^3 + A_2(\varepsilon,k_l)k_l^2 + A_1(\varepsilon,k_l)k_l + A_0(\varepsilon,k_l) = 0, \tag{8}$$

где $A_i(\varepsilon,k_l)$, $i=0,1,2,3,$ — аналитические по ε функции. Обозначим

$$F(\varepsilon,k_l) = k_l^4 + A_3(\varepsilon,k_l)k_l^3 + A_2(\varepsilon,k_l)k_l^2 + A_1(\varepsilon,k_l)k_l + A_0(\varepsilon,k_l).$$

Функция $F(\varepsilon,k_l)$ аналитическая в окрестности нуля и $F(0,0)=0$, но $F(0,k_l)$ не обращается тождественно в нуль. Очевидно, что $k_l=0$ — корень $F(0,k_l)$ кратности 4. Тогда (см. [7, с. 113]) в некоторой окрестности нуля

$$F(\varepsilon,k_l) = \big(k_l^4 + A_3'(\varepsilon)k_l^3 + A_2'(\varepsilon)k_l^2 + A_1'(\varepsilon)k_l + A_0'(\varepsilon)\big)\varphi(\varepsilon,k_l),$$

где $A_j'(\varepsilon)$, $j=0,\ldots,3,$ — аналитические в окрестности нуля функции и $A_j'(0)=0$, $j=0,\ldots,3$; $\varphi(\varepsilon,k_l)$ не обращается в нуль в некоторой окрестности нуля и аналитическая в этой окрестности.

Тогда (8) эквивалентно равенству

$$k_l^4 + A_3'(\varepsilon)k_l^3 + A_2'(\varepsilon)k_l^2 + A_1'(\varepsilon)k_l + A_0'(\varepsilon) = 0$$

и справедлива (см. [8])

Теорема 2. *Для малых ε существует ровно 4 квазиуровня λ_i в окрестностях точек $\pm\sqrt{1+\sin^2\dfrac{2\pi l}{N}}$. При этом $\lambda = \pm\sqrt{\cos^2 k_l + \sin^2\frac{2\pi l}{N}}$, где многозначная функция $k_l = k_l(\varepsilon)$ разлагается в сходящийся ряд Пюизо:*

$$k_l^i(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^i \varepsilon^{j/p_i},$$

так что $\sum\limits_{i=1}^{q} p_i = 4$ и λ_i задаются p_1 значениями k_l^1, p_2 значениями k_l^2 и т. д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hasan M.Z., Kane C.L. Colloquium: topological insulators // Rev. Mod. Phys. 2010. Vol. 82. P. 3045–3067. DOI: 10.1103/RevModPhys.82.3045
2. Bardarson J.H., Moore J.E. Quantum interference and Aharonov–Bohm oscillations in topological insulators // Reports on Progress in Physics. 2013. Vol. 76. 056501. DOI: 10.1088/0034-4885/76/5/056501
3. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. М.: Высшая школа, 1963. 619 с.
4. Yokoyama T., Tanaka Y., Nagaosa N. Anomalous magnetoresistance of a two-dimensional ferromagnet / ferromagnet junction on the surface of a topological insulator // Physical Review B. 2010. Vol. 81. 121401. 4 p. DOI: 10.1103/PhysRevB.81.121401
5. Chuburin Y.P. Electron scattering on the surface of a topological insulator // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2014. Vol. 47. 255203. 13 p. DOI: 10.1088/1751-8113/47/25/255203
6. Тинюкова Т.С. Двумерный разностный оператор Дирака в полосе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 1. С. 93–100. DOI: 10.20537/vm150110

7. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть II. Функции нескольких переменных. М.: Наука, 1976. 400 с.
8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Функциональный анализ. М.: Мир, 1982. 430 с.
9. Морозова Л.Е., Чубурин Ю.П. Об уровнях одномерного дискретного оператора Шрёдингера с убывающим потенциалом // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2004. Вып. 1 (29). С. 85–94.
10. Альбеверио С. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991. 568 с.

Поступила в редакцию 14.10.2016

Тинюкова Татьяна Сергеевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: ttinyukova@mail.ru

T. S. Tinyukova

The quasi-levels of the Dirac two-dimensional difference operator in a strip

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 535–542 (in Russian).

Keywords: Dirac difference operator, resolution, spectrum, quasi-level, eigenvalues, resonance.

MSC2010: 81Q10, 81Q15

DOI: 10.20537/vm160408

In the last decade, topological insulators have been actively studied in the physics literature. Topological insulator is a special type of material that is within the scope of an insulator and conducts electricity on the surface. Topological insulators have interesting physical properties, for example, the topological properties of this material can be stably maintained up to high temperatures. Topological insulators can be used in a wide variety of microelectronic devices ranging from very fast and efficient processors to topological quantum computers. The electron in topological insulators is described by the massless Dirac operator. Such operators in quasi-one-dimensional structures (for example, strips with different boundary conditions) are very interesting not only from a physical, but also from a mathematical point of view, but they are still poorly understood by mathematicians. In this article, we have found the eigenvalues of the Dirac difference operator for a potential of the form $V_0\delta_{n0}$. We have studied the quasi-levels (eigenvalues and resonances) of the operator in the case of small potentials.

REFERENCES

1. Hasan M.Z., Kane C.L. Colloquium: topological insulators, *Rev. Mod. Phys.*, 2010, vol. 82, pp. 3045–3067. DOI: 10.1103/RevModPhys.82.3045
2. Bardarson J.H., Moore J.E. Quantum interference and Aharonov–Bohm oscillations in topological insulators, *Reports on Progress in Physics*, 2013, vol. 76, 056501. DOI: 10.1088/0034-4885/76/5/056501
3. Blokhintsev D.I. *Osnovy kvantovoi mekhaniki* (Foundations of quantum mechanics), Moscow: Vysshaya shkola, 1963, 619 p.
4. Yokoyama T., Tanaka Y., Nagaosa N. Anomalous magnetoresistance of a two-dimensional ferromagnet / ferromagnet junction on the surface of a topological insulator, *Physical Review B*, 2010, vol. 81, 121401, 4 p. DOI: 10.1103/PhysRevB.81.121401
5. Chuburin Y.P. Electron scattering on the surface of a topological insulator, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2014, vol. 47, 255203, 13 p. DOI: 10.1088/1751-8113/47/25/255203
6. Tinyukova T.S. Two-dimensional difference Dirac operator in the strip, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, issue 1, pp. 93–100 (in Russian). DOI: 10.20537/vm150110

7. Shabat B.V. *Vvedenie v kompleksnyi analiz. Chast' II. Funktsii neskol'kikh peremennykh* (Introduction to complex analysis. Part II. Functions of several variables), Moscow: Nauka, 1976, 400 p.
8. Reed M., Simon B. *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. IV. Analiz operatorov* (Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators), Moscow: Mir, 1982, 430 p.
9. Morozova L.I., Chuburin Y.P. On levels of the one-dimensional discrete Schrödinger operator with a decreasing small potential, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2004, issue 1 (29), pp. 85–94 (in Russian).
10. Albeverio S. *Reshaemye modeli v kvantovoi mekhanike* (Solvable models in quantum mechanics), Moscow: Mir, 1991, 568 p.

Received 14.10.2016

Tinyukova Tat'yana Sergeevna, Candidate of Physics and Mathematics, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: ttinyukova@mail.ru