МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 4

УДК 517.95

© *Я. Т. Мегралиев, Ф. Х. Ализаде*

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЯМИ ВТОРОГО РОДА

В работе исследована обратная краевая задача с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени, для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода. Дается определение классического решения поставленной задачи. Суть задачи состоит в том, что требуется вместе с решением определить неизвестный коэффициент. Задача рассматривается в прямоугольной области. При решении исходной обратной краевой задачи осуществляется переход от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной обратной задаче. С помощью сжатых отображений доказываются существование и единственность решения вспомогательной задачи. Затем вновь производится переход к исходной обратной задаче, в результате делается вывод о разрешимости исходной обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, уравнения Буссинеска, существование и единственность классического решения.

DOI: 10.20537/vm160405

Введение

В настоящее время задачи с нелокальными условиями для уравнений в частных производных вызывают большой интерес, который обусловлен необходимостью обобщения классических задач математической физики в связи с математическим моделированием ряда физических процессов, изучаемых современным естествознанием [1]. Заметим, что в большинстве публикаций, посвященных задачам с нелокальными интегральными условиями для гиперболических уравнений, рассматриваются пространственно нелокальные условия [2–4]. В статье [5] рассмотрена задача с нелокальными по времени интегральными условиями для гиперболического уравнения. В последнее время уделяется большое внимание изучению различных эволюционных уравнений, описывающих волновые процессы в средах с дисперсией. Одним из них является уравнение Буссинеска. Это уравнение интересно как с физической, так и с математической точки зрения.

Известно немало случаев, когда потребности практики приводят к задачам определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по некоторым известным данным от его решения. Такие задачи получили название обратных задач математической физики. Обратные задачи представляют собой активно развивающийся раздел современной математики.

В предлагаемой статье рассмотрена обратная краевая задача с нелокальными по времени интегральными условиями для уравнения Буссинеска четвертого порядка.

§ 1. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Пусть $D_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$. Далее, пусть $f(x,t)$, $g(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $p_i(t)$, $h_i(t)$ $(i = 1,2)$ — заданные функции, определенные при $x \in [0,1]$, $t \in [0,T]$. Рассмотрим следующую обратную краевую задачу. Требуется найти тройку $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x,t)$, $a(t)$, $b(t)$, связанных уравнением [6,7]:

$$u_{tt}(x,t) - 2\alpha u_{txx}(x,t) + \beta u_{xxxx}(x,t) = a(t)u(x,t) + b(t)g(x,t) + f(x,t), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ нелокальных начальных условий

$$u(x,0)=\int_0^T p_1(t)u(x,t)\,dt+\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\int_0^T p_2(t)u(x,t)\,dt+\psi(x)\quad (0\leqslant x\leqslant 1), \tag{2}$$

граничного условия

$$u_x(0,t)=u(1,t)=u_{xxx}(0,t)=u_{xx}(1,t)=0\quad (0\leqslant t\leqslant T), \tag{3}$$

а также условия переопределения

$$u(x_i,t)=h_i(t)\quad (i=1,2;\quad 0<x_1,x_2<1,\quad x_1\neq x_2,\quad 0\leqslant t\leqslant T), \tag{4}$$

где $\alpha>0$, $\beta>\alpha^2$ — заданные числа.

Определение 1. *Под классическим решением* обратной краевой задачи (1)–(4) понимаем тройку $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ функций $u(x,t)$, $a(t)$, $b(t)$, обладающих следующими свойствами:
1) $u(x,t),u_x(x,t),u_{xx}(x,t),u_{xxx}(x,t),u_{xxxx}(x,t),\ u_t(x,t),u_{tx}(x,t),u_{txx}(x,t),u_{tt}(x,t)\in C(D_T)$;
2) функции $a(t)$, $b(t)$ непрерывны на $[0,T]$;
3) уравнение (1) и условия (2)–(4) удовлетворяются в обычном смысле.

Для исследования задачи (1)–(4) сначала рассмотрим следующую задачу:

$$y''(t)=a(t)y(t)\quad (0\leqslant t\leqslant T), \tag{5}$$

$$y(0)=\int_0^T p_1(t)y(t)\,dt,\quad y'(0)=\int_0^T p_2(t)y(t)\,dt, \tag{6}$$

где $p_1(t),p_2(t),a(t)\in C[0,T]$ — заданные функции, а $y=y(t)$ — искомая функция, причем под решением задачи (5), (6) понимаем функцию $y(t)$, принадлежащую $C^2[0,T]$ и удовлетворяющую условиям (5), (6) в обычном смысле.

Аналогично [8] доказывается следующая

Лемма 1. *Пусть* $p_1(t)\in C[0,T]$, $p_2(t)\in C[0,T]$, $a(t)\in C[0,T]$ *и*

$$\|a(t)\|_{C[0,T]}\leqslant R=\text{const}.$$

Кроме того, пусть выполнено неравенство

$$\left(T\,\|p_2(t)\|_{C[0,T]}+\|p_1(t)\|_{C[0,T]}+\frac{T}{2}R\right)T<1.$$

Тогда задача (5), (6) *имеет только тривиальное решение.*

Наряду с обратной краевой задачей (1)–(4) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить тройку $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ функций $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$, обладающих свойствами 1 и 2 определения 1 классического решения задачи (1)–(4), из соотношений (1)–(3) и равенства

$$h_i''(t)-2\alpha u_{txx}(x_i,t)+\beta u_{xxxx}(x_i,t)=a(t)h_i(t)+b(t)g(x_i,t)+f(x_i,t)\quad (i=1,2;\ 0\leqslant t\leqslant T), \tag{7}$$

где

$$h(t)\equiv h_1(t)g(x_2,t)-h_2(t)g(x_1,t)\neq 0\quad (0\leqslant t\leqslant T).$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(x),\ \psi(x) \in C[0,1]$, $p_i(t) \in C[0,T]$, $h_i(t) \in C^2[0,T]$ $(i=1,2)$, $h(t) \equiv \equiv h_1(t)g(x_2,t) - h_2(t)g(x_1,t) \neq 0$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, $f(x,t) \in C(D_T)$ *и выполняются условия согласования*

$$h_i(0) = \int_0^T p_1(t)h_i(t)\,dt + \varphi(x_i), \quad h_i'(0) = \int_0^T p_2(t)h_i(t)\,dt + \psi(x_i) \quad (i=1,2). \tag{8}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *каждое классическое решение* $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ *задачи* (1)–(4) *является и решением задачи* (1)–(3), (7);

2) *каждое решение* $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ *задачи* (1)–(3), (7), *такое, что*

$$\left(T\,\|p_2(t)\|_{C[0,T]} + \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \frac{T}{2}\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\right)T < 1, \tag{9}$$

является классическим решением (1)–(4).

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ является классическим решением задачи (1)–(4). Считая $h_i(t) \in C^2[0,T]$ $(i=1,2)$ и дифференцируя (4), получаем

$$u_{tt}(x_i,t) = h_i''(t) \quad (i=1,2; \quad 0 \leqslant t \leqslant T). \tag{10}$$

Поставляя $x = x_i$ в уравнение (1), имеем

$$u_{tt}(x_i,t) - 2\alpha u_{txx}(x_i,t) + \beta u_{xxxx}(x_i,t) = a(t)u(x_i,t) + b(t)g(x_i,t) + f(x_i,t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{11}$$

Отсюда, с учетом (4) и (10), приходим к выполнению (7).

Теперь предположим, что $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ является решением задачи (1)–(3), (7), причем выполнено условие (9). Тогда из (7) и (11) получаем

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(u(x_i,t) - h(t)\right) = a(t)\left(u(x_i,t) - h(t)\right) \quad (i=1,2; \quad 0 \leqslant t \leqslant T). \tag{12}$$

Далее, в силу (2) и условий согласования (8) имеем

$$\begin{aligned} u(x_i,0) - h_i(0) - \int_0^T p_1(t)(u(x_i,t) - h_i(t))\,dt &= \varphi(x_i) - \left(h_i(0) - \int_0^T p_1(t)h_i(t)\,dt\right) = 0, \\ u_t(x_i,0) - h_i'(0) - \int_0^T p_2(t)\left(u(x_i,t) - h_i(t)\right)\,dt &= \psi(x_i) - \left(h_i'(0) - \int_0^T p_2(t)h_i(t)\,dt\right) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Так как в силу леммы 1 задача (12), (13) имеет только тривиальное решение, то $u(x_i,t) - -h_i(t) = 0$ $(i=1,2;\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, т. е. выполняется условие (4). Теорема доказана. □

§ 2. Разрешимость обратной краевой задачи

Первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ задачи (1)–(3), (7) будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\cos\lambda_k x \quad \left(\lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1)\right), \tag{14}$$

где

$$u_k(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x\,dx \quad (k=1,2,\ldots). \tag{15}$$

Тогда, применяя формальную схему метода Фурье, из (1) и (2) находим:

$$u_k''(t)+2\alpha\lambda_k^2u_k'(t)+\beta\lambda_k^4u_k(t)=F_k(t;u,a,b)\quad (k=1,2,\ldots;\quad 0\leqslant t\leqslant T),\tag{16}$$

$$u_k(0)=\int_0^T p_1(t)u_k(t)\,dt+\varphi_k,\quad u_k'(0)=\int_0^T p_2(t)u_k(t)\,dt+\psi_k\quad (k=1,2,\ldots),\tag{17}$$

где

$$F_k(t;u,a)=f_k(t)+a(t)u_k(t)+b(t)g_k(t),$$

$$f_k(t)=2\int_0^1 f(x,t)\cos\lambda_k x\,dx,\quad g_k(t)=2\int_0^1 g(x,t)\cos\lambda_k x\,dx,$$

$$\varphi_k=2\int_0^1\varphi(x)\cos\lambda_k x\,dx,\quad \psi_k=2\int_0^1\psi(x)\cos\lambda_k x\,dx\quad (k=1,2,\ldots).$$

Предположим, что данные задачи (1)–(3), (7) удовлетворяют следующим условиям:

1) $\varphi(x)\in C^4[0,1]$, $\varphi^{(5)}(x)\in L_2(0,1)$, $\varphi'(0)=\varphi(1)=\varphi'''(0)=\varphi''(1)=\varphi^{(4)}(1)=0$;

2) $\psi(x)\in C^2[0,1]$, $\psi^{(3)}(x)\in L_2(0,1)$, $\psi'(0)=\psi(1)=\psi''(1)=0$;

3) $f(x,t),\ f_x(x,t),\ f_{xx}(x,t)\in C(D_T)$, $f_{xxx}(x,t)\in L_2(D_T)$, $f_x(0,t)=f(1,t)=f_{xx}(1,t)=0$ $(0\leqslant t\leqslant T)$;

4) $g(x,t),\ g_x(x,t),\ g_{xx}(x,t)\in C(D_T)$, $g_{xxx}(x,t)\in L_2(D_T)$, $g_x(0,t)=g(1,t)=g_{xx}(1,t)=0$ $(0\leqslant t\leqslant T)$;

5) $\alpha>0$, $\beta>\alpha^2$, $p_i(t)\in C[0,T]$, $h_i(t)\in C^2[0,T]$, $(i=1,2)$, $h(t)\equiv h_1(t)g(x_2,t)-h_2(t)g(x_1,t)\neq$ $\neq 0$ $(0\leqslant t\leqslant T)$.

Решая задачу (16), (17), находим: $u_k(t)=$

$$=e^{\alpha_k t}\left[\left(\cos\beta_k t-\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t\right)\left(\varphi_k+\int_0^T p_1(t)u_k(t)\,dt\right)+\frac{1}{\beta_k}\left(\psi_k+\int_0^T p_2(t)u_k(t)\,dt\right)\sin\beta_k t\right]+$$
$$+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_k(\tau;u,a,b)\sin\beta_k\,(t-\tau)e^{\alpha_k(t-\tau)}\,d\tau\quad (k=1,2,\ldots;\quad 0\leqslant t\leqslant T),\tag{18}$$

где

$$\alpha_k=-\alpha\lambda_k^2,\quad \beta_k=\lambda_k^2\sqrt{\beta-\alpha^2}\quad (k=1,2\ldots).$$

После подстановки выражений из (18) в (14), для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1)–(3), (7), получаем

$$\begin{gathered}u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{e^{\alpha_k t}\left[\left(\cos\beta_k t-\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t\right)\left(\varphi_k+\int_0^T p_1(t)u_k(t)\,dt\right)+\right.\right.\\ \left.+\frac{1}{\beta_k}\left(\psi_k+\int_0^T p_2(t)u_k(t)\,dt\right)\sin\beta_k t\right]+\\ \left.+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_k(\tau;u,a,b)\sin\beta_k\,(t-\tau)e^{\alpha_k(t-\tau)}\,d\tau\right\}\cos\lambda_k x.\end{gathered}\tag{19}$$

Теперь из (7), с учетом (14), имеем

$$\begin{gathered}a(t)=[h(t)]^{-1}\Big\{(h_1''(t)-f(x_1,t))g(x_2,t)-(h_2''(t)-f(x_2,t))g(x_1,t)+\\ +\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left(2\alpha u_k'(t)+\beta\lambda_k^2u_k(t)\right)\left(g(x_2,t)\cos\lambda_k x_1-g(x_1,t)\cos\lambda_k x_2\right)\Big\},\end{gathered}\tag{20}$$

$$\begin{gathered}b(t)=[h(t)]^{-1}\Big\{h_1(t)(h_2''(t)-f(x_2,t))-h_2(t)(h_1''(t)-f(x_2,t))+\\ +\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left(2\alpha u_k'(t)+\beta\lambda_k^2u_k(t)\right)\left(h_1(t)\cos\lambda_k x_2-h_2(t)\cos\lambda_k x_1\right)\Big\}.\end{gathered}\tag{21}$$

Дифференцируя (18), получим

$$u_k'(t) = e^{\alpha_k t}\left[-\frac{1}{\beta_k}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\left(\varphi_k+\int_0^T p_1(t)u_k(t)\,dt\right)\sin\beta_k t + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t+\cos\beta_k t\right)\left(\psi_k+\int_0^T p_2(t)u_k(t)\,dt\right)\right] + \tag{22}$$
$$+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_k(\tau;u,a,b)\left(\alpha_k\sin\beta_k\,(t-\tau)+\beta_k\cos\beta_k\,(t-\tau)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}\,d\tau \quad (k=1,2,\ldots;\ 0\leqslant t\leqslant T).$$

Далее, из (18) и (22) получаем, что $2\alpha u_k'(t)+\beta\lambda_k^2 u_k(t) =$

$$= e^{\alpha_k t}\left[\left(\beta\lambda_k^2\cos\beta_k t-\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2\alpha_k+2\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right)\left(\varphi_k+\int_0^T p_1(t)u_k(t)\,dt\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2+2\alpha\alpha_k\right)\sin\beta_k t+2\alpha\cos\beta_k t\right)\left(\psi_k+\int_0^T p_2(t)u_k(t)\,dt\right)\right]+ \tag{23}$$
$$+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_k(\tau;u,a,b)\left(\left(2\alpha\alpha_k+\beta\lambda_k^2\right)\sin\beta_k\,(t-\tau)+2\alpha\beta_k\cos\beta_k\,(t-\tau)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}\,d\tau.$$

Тогда из (20) и (21), с учетом (23), соответственно находим

$$a(t) = [h(t)]^{-1}\left\{(h_1''(t)-f(x_1,t))g(x_2,t)-(h_2''(t)-f(x_2,t))g(x_1,t)+\right.$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left\{e^{\alpha_k t}\left[\left(\beta\lambda_k^2\cos\beta_k t-\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2\alpha_k+2\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right)\left(\varphi_k+\int_0^T p_1(t)u_k(t)\,dt\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2+2\alpha\alpha_k\right)\sin\beta_k t+2\alpha\cos\beta_k t\right)\left(\psi_k+\int_0^T p_2(t)u_k(t)\,dt\right)\right]+ \tag{24}$$
$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_k(\tau;u,a,b)\left(\left(2\alpha\alpha_k+\beta\lambda_k^2\right)\sin\beta_k\,(t-\tau)+2\alpha\beta_k\cos\beta_k\,(t-\tau)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}\,d\tau\right\}\times$$
$$\left.\times\left(g(x_2,t)\cos\lambda_k x_1-g(x_1,t)\cos\lambda_k x_2\right)\right\},$$

$$b(t) = [h(t)]^{-1}\left\{h_1(t)(h_2''(t)-f(x_2,t))-h_2(t)(h_1''(t)-f(x_2,t))+\right.$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left\{e^{\alpha_k t}\left[\left(\beta\lambda_k^2\cos\beta_k t-\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2\alpha_k+2\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right)\left(\varphi_k+\int_0^T p_1(t)u_k(t)\,dt\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2+2\alpha\alpha_k\right)\sin\beta_k t+2\alpha\cos\beta_k t\right)\left(\psi_k+\int_0^T p_2(t)u_k(t)\,dt\right)\right]+ \tag{25}$$
$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_k(\tau;u,a,b)\left(\left(2\alpha\alpha_k+\beta\lambda_k^2\right)\sin\beta_k\,(t-\tau)+2\alpha\beta_k\cos\beta_k\,(t-\tau)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}\,d\tau\right\}\times$$
$$\left.\times\left(h_1(t)\cos\lambda_k x_2-h_2(t)\cos\lambda_k x_1\right)\right\}.$$

Таким образом, решение задачи (1)–(3), (7) свелось к решению системы (19), (24), (25) относительно неизвестных функций $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$.

Справедлива следующая

Лемма 2. *Если $\{u(x,t),a(t)\}$ — любое решение задачи* (1)–(3), (7), *то функции*

$$u_k(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x\,dx \quad (k=1,2,\ldots)$$

удовлетворяют на $[0,T]$ системе (18).

Из леммы 2 следует, что имеет место следующее

Замечание 1. Из леммы 2 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1)–(3), (7) достаточно доказать единственность решения системы (19), (24), (25).

С целью исследования задачи (1)–(3), (7) рассмотрим следующие пространства.

1. Обозначим через $B_{2,T}^5$ [9] совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\cos\lambda_k x \quad \left(\lambda_k=\frac{\pi}{2}(2k-1)\right),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J_T(u)\equiv\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\,\|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{1/2}<+\infty.$$

Норму в этом множестве определим так: $\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}=J_T(u)$.

2. Через E_T^5 обозначим пространство, состоящее из топологического произведения

$$B_{2,T}^5\times C[0,T]\times C[0,T].$$

Норма элемента $z=\{u,a,b\}$ определяется формулой

$$\|z\|_{E_T^5}=\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}+\|a(t)\|_{C[0,T]}+\|b(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что $B_{2,T}^5$ и E_T^5 являются банаховыми пространствами.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^5 оператор

$$\Phi(u,a,b)=\{\Phi_1(u,a,b),\quad \Phi_2(u,a,b),\quad \Phi_3(u,a,b)\},$$

где

$$\Phi_1(u,a,b)=\tilde u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde u_k(t)\cos\lambda_k x,\quad \Phi_2(u,a,b)=\tilde a(t),\quad \Phi_3(u,a,b)=\tilde b(t),$$

а $\tilde u_k(t)$ $(k=1,2,\ldots)$, $\tilde a(t)$ и $\tilde b(t)$ равны соответственно правым частям (18), (24) и (25).

Очевидно, что

$$\left|\cos\beta_k t-\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t\right|\leqslant 1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}=:\varepsilon_1,\qquad \left|\frac{1}{\beta_k}\sin\beta_k t\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\frac{1}{\lambda_k^2}=:\varepsilon_2\frac{1}{\lambda_k^2},$$

$$\left|\beta\lambda_k^2\cos\beta_k t-\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2\alpha_k+2\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right|\leqslant\left(\frac{3\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}+1\right)\beta\lambda_k^2=:\varepsilon_3\lambda_k^2,$$

$$\left|\frac{1}{\beta_k}\left(\beta\lambda_k^2+2\alpha\alpha_k\right)\sin\beta_k t+2\alpha\cos\beta_k t\right|\leqslant\frac{\beta+2\alpha^2}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}+2\alpha=:\varepsilon_4.$$

Учитывая эти соотношения, имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\,\|\tilde u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}\leqslant\sqrt{7}\varepsilon_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\,|\varphi_k|\right)^2\right)^{1/2}+\sqrt{7}\varepsilon_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\,|\psi_k|\right)^2\right)^{1/2}+$$

$$+\sqrt{7}\left(\varepsilon_1\,\|p_1(t)\|_{C[0,T]}+\varepsilon_2\,\|p_2(t)\|_{C[0,T]}\right)T\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\,\|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}+$$

$$+\varepsilon_2\sqrt{7T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\,|f_k(\tau)|\right)^2d\tau\right)^{1/2}+\sqrt{7}\varepsilon_2 T\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\,\|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}+$$

$$+\sqrt{7T}\varepsilon_2 \|b(t)\|_{C[0,T]} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |g_k(\tau)|)^2 d\tau\right)^{1/2},$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leqslant \left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]} \Bigg\{ \left\|(h_1''(t) - f(x_1,t))g(x_2,t) - (h_2''(t) - f(x_2,t))g(x_1,t)\right\|_{C[0,T]} +$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2}\right)^{1/2} \Bigg[\varepsilon_3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_k|)^2\right)^{1/2} +$$
$$+\varepsilon_4 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_k|)^2\right)^{1/2} + \varepsilon_4\sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_k(\tau)|)^2 d\tau\right)^{1/2} +$$
$$+T\left(\varepsilon_3 \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \varepsilon_4 \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \varepsilon_4 \|a(t)\|_{C[0,T]}\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2} +$$
$$+\varepsilon_4\sqrt{T} \|b(t)\|_{C[0,T]} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |g_k(\tau)|)^2 d\tau\right)^{1/2}\Bigg] \left(\|g(x_2,t)\|_{C[0,T]} + \|g(x_1,t)\|_{C[0,T]}\right)\Bigg\},$$

$$\left\|\tilde{b}(t)\right\|_{C[0,T]} \leqslant \left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]} \Bigg\{ \left\|(h_1(t)(h_2''(t) - f(x_2,t)) - h_2(t)(h_1''(t) - f(x_2,t))g(x_1,t))\right\|_{C[0,T]} +$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2}\right)^{1/2} \Bigg[\varepsilon_3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_k|)^2\right)^{1/2} +$$
$$+\varepsilon_4 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_k|)^2\right)^{1/2} + \varepsilon_4\sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_k(\tau)|)^2 d\tau\right)^{1/2} +$$
$$+T\left(\varepsilon_3 \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \varepsilon_4 \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \varepsilon_4 \|a(t)\|_{C[0,T]}\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2} +$$
$$+\varepsilon_4\sqrt{T} \|b(t)\|_{C[0,T]} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |g_k(\tau)|)^2 d\tau\right)^{1/2}\Bigg] \left(\|h_1(t)\|_{C[0,T]} + \|h_2(t)\|_{C[0,T]}\right)\Bigg\},$$

или

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{7}\varepsilon_1 \left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{7}\varepsilon_2 \left\|\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} +$$
$$+\varepsilon_2\sqrt{7T} \|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \sqrt{7T}\varepsilon_4 \|g_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \|b(t)\|_{C[0,T]} + \tag{26}$$
$$+\sqrt{7}\left(\varepsilon_1 \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \varepsilon_2 \|p_2(t)\|_{C[0,T]} + \varepsilon_2 \|a(t)\|_{C[0,T]}\right) T \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2},$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leqslant \left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]} \Bigg\{ \left\|(h_1''(t) - f(x_1,t))g(x_2,t) - (h_2''(t) - f(x_2,t))g(x_1,t)\right\|_{C[0,T]} +$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2}\right)^{1/2} \Bigg[\varepsilon_3 \left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \varepsilon_4 \left\|\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \varepsilon_4\sqrt{T} \|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} +$$
$$+T\left(\varepsilon_3 \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \varepsilon_4 \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \varepsilon_4 \|a(t)\|_{C[0,T]}\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2} + \tag{27}$$
$$+\varepsilon_4\sqrt{T} \|g_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \|b(t)\|_{C[0,T]}\Bigg] \left(\|g(x_2,t)\|_{C[0,T]} + \|g(x_1,t)\|_{C[0,T]}\right)\Bigg\},$$

$$\left\|\tilde{b}(t)\right\|_{C[0,T]} \leqslant \left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]} \left\{\left\|(h_1(t)(h_2''(t)-f(x_2,t))-h_2(t)(h_1''(t)-f(x_2,t))g(x_1,t))\right\|_{C[0,T]}+\right.$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{1/2}\left[\varepsilon_3\left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\varepsilon_4\left\|\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\varepsilon_4\sqrt{T}\left\|f_{xxx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}+\right.$$
$$+T\left(\varepsilon_3\|p_1(t)\|_{C[0,T]}+\varepsilon_4\|p_1(t)\|_{C[0,T]}+\varepsilon_4\|a(t)\|_{C[0,T]}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}+ \tag{28}$$
$$\left.\left.+\varepsilon_4\sqrt{T}\|g_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}\|b(t)\|_{C[0,T]}\right]\left(\|h_1(t)\|_{C[0,T]}+\|h_2(t)\|_{C[0,T]}\right)\right\}.$$

Далее, из (26), (27) и (28) соответственно имеем

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^5} \leqslant A_1(T)+B_1(T)\left(1+\|a(t)\|_{C[0,T]}\right)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}+D_1(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}, \tag{29}$$
$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leqslant A_2(T)+B_2(T)\left(1+\|a(t)\|_{C[0,T]}\right)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}+D_2(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}, \tag{30}$$
$$\left\|\tilde{b}(t)\right\|_{C[0,T]} \leqslant A_3(T)+B_3(T)\left(1+\|a(t)\|_{C[0,T]}\right)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}+D_3(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}, \tag{31}$$

где

$$A_1(T)=\sqrt{7}\varepsilon_1\left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\sqrt{7}\varepsilon_2\left\|\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\varepsilon_2\sqrt{7T}\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$
$$B_1(T)=\sqrt{6}\left(\varepsilon_1\|p_1(t)\|_{C[0,T]}+\varepsilon_2\|p_2(t)\|_{C[0,T]}+\varepsilon_2\right)T,\qquad D_1(T)=\sqrt{7T}\varepsilon_4\|g_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$
$$A_2\,(T)=\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|(h_1''(t)-f(x_1,t))g(x_2,t)-(h_2''(t)-f(x_2,t))g(x_1,t)\right\|_{C[0,T]}+\right.$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{1/2}\left[\varepsilon_3\left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\varepsilon_4\left\|\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\right.$$
$$\left.\left.+\sqrt{T}\varepsilon_4\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}\right]\left(\|g(x_2,t)\|_{C[0,T]}+\|g(x_1,t)\|_{C[0,T]}\right)\right\},$$
$$B_2(T)=\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{1/2}T\left(\varepsilon_3\|p_1(t)\|_{C[0,T]}+\varepsilon_4\|p_2(t)\|_{C[0,T]}+\varepsilon_4\right)\times$$
$$\times\left(\|g(x_2,t)\|_{C[0,T]}+\|g(x_1,t)\|_{C[0,T]}\right),$$
$$D_2(T)=\|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{1/2}\varepsilon_4\sqrt{T}\|g_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}\left(\|g(x_2,t)\|_{C[0,T]}+\|g(x_1,t)\|_{C[0,T]}\right),$$
$$A_3(T)=\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|(h_1(t)(h_2''(t)-f(x_2,t))-h_2(t)(h_1''(t)-f(x_2,t))g(x_1,t))\right\|_{C[0,T]}+\right.$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{1/2}\left[\varepsilon_3\left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\varepsilon_4\left\|\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\right.$$
$$\left.\left.+\sqrt{T}\varepsilon_4\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}\right]\left(\|h_1(t)\|_{C[0,T]}+\|h_2(t)\|_{C[0,T]}\right)\right\},$$

$$B_3(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{1/2} T \left(\varepsilon_3 \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \varepsilon_4 \|p_2(t)\|_{C[0,T]} + \varepsilon_4 \right) \times \\ \times \left(\|h_1(t)\|_{C[0,T]} + \|h_2(t)\|_{C[0,T]} \right),$$

$$D_3(T) = \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{1/2} \varepsilon_4 \sqrt{T} \, \|g_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \left(\|h_1(t)\|_{C[0,T]} + \|h_2(t)\|_{C[0,T]} \right).$$

Из неравенств (29)–(31) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B^5_{2,T}} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} + \left\|\tilde{b}(t)\right\|_{C[0,T]} \leqslant \\ \leqslant A(T) + B(T) \left(1 + \|a(t)\|_{C[0,T]}\right) \|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}} + D(T) \|b(t)\|_{C[0,T]}, \tag{32}$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T) + A_3(T), \qquad B(T) = B_1(T) + B_2(T) + B_3(T), \\ D(T) = D_1(T) + D_2(T) + D_3(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1–5 *и*

$$(B(T)(A(T) + 3) + D(T)) \, (A(T) + 2) < 1. \tag{33}$$

Тогда задача (1)–(3), (7) *имеет в шаре* $K = K_R(\|z\|_{E^5_T} \leqslant R = A(T) + 2)$ *пространства* E^5_T *единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. В пространстве E^5_T рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \tag{34}$$

где $z = \{u, a, b\}$, компоненты $\Phi_i(u, a, b)$ $(i = 1, 2, 3)$ оператора $\Phi(u, a)$ определены правыми частями уравнений (19), (24) и (25).

Рассмотрим оператор $\Phi(u, a, b)$ в шаре $K = K_R$ из E^5_T. Аналогично (32) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы следующие оценки:

$$\|\Phi z\|_{E^5_T} \leqslant A(T) + B(T) \left(1 + \|a(t)\|_{C[0,T]}\right) \|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}} + D(T) \|b(t)\|_{C[0,T]} \leqslant \\ \leqslant A(T) + (B(T)(A(T)+3) + D(T)) \, (A(T)+2) < A(T) + 2, \tag{35}$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E^5_T} \leqslant \\ \leqslant (B(T)(R+1) + D(T)) \left(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B^5_{2,T}} \right). \tag{36}$$

Тогда из оценок (35) и (36), с учетом (33), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a, b\}$, которая является единственным в шаре $K = K_R$ решением уравнения (34), то есть является единственным в шаре $K = K_R$ решением системы (19), (24), (25).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B^5_{2,T}$, имеет непрерывные производные $u(x,t)$, $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, $u_{xxx}(x,t)$ и $u_{xxxx}(x,t)$ в D_T.

Из (22) нетрудно видеть, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \left\| \tilde{u}'_k(t) \right\|_{C[0,T]}\right)^2 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{6}\beta}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left[\left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+T\left\|p_1(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left\|u_k(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}\right]+$$

$$+\sqrt{7}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}+1\right)\left[\left\|\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+T\left\|p_1(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left\|u_k(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}\right]+$$

$$+\sqrt{7}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}+1\right)\left[\sqrt{T}\left\|f_{xxx}(x,t)\right\|_{L_2[0,T]}+\sqrt{T}\left\|g_{xxx}(x,t)\right\|_{L_2[0,T]}\left\|b(t)\right\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$\left.+T\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left\|u_{ik}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}\right].$$

Отсюда следует, что $u_t(x,t)$, $u_{tx}(x,t)$, $u_{txx}(x,t)$ непрерывны в D_T. Далее, из (16), имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\left\|u_k''(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}\leqslant 4\alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left\|u_k'(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}+$$

$$+2\beta\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left\|u_k(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}+2\left\|\left\|f_x(x,t)+a(t)\,u_x(x,t)\right\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}.$$

Отсюда ясно, что $u_{tt}(x,t)$ непрерывна в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3) и (7) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ является решением задачи (1)–(3), (7), причем в силу леммы 2 оно единственное. Теорема доказана. □

С помощью теоремы 1 доказывается следующая

Теорема 3. *Пусть выполняются все условия теоремы* 2,

$$\left(T\left\|p_2(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|p_1(t)\right\|_{C[0,T]}+\frac{T}{2}(A(T)+2)\right)T<1$$

и выполнены условия согласования

$$h_i(0)=\int_0^T p_1(t)h_i(t)dt+\varphi(x_i),\quad h_i'(0)=\int_0^T p_2(t)h_i(t)\,dt+\psi(x_i)\quad (i=1,2).$$

Тогда задача (1)–(4) *имеет в шаре* $K=K_R(\|z\|_{E_{T,T}^5}\leqslant A(T)+2)$ *из* E_T^5 *единственное классическое решение.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
2. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179.
3. Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 1. С. 94–103.
4. Пулькина Л.С. Краевые задачи гиперболического уравнения с нелокальными условиями 1 и 2-го рода // Известия вузов. Математика. 2012. № 4. С. 74–83.
5. Кириченко С.В. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с нелокальными начальными условиями в прямоугольнике // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2013. Вып. 3 (32). С. 185–189.
DOI: 10.14498/vsgtu1248

6. Varlamov V.V. Asymptotic behavior of solutions of the damped Boussinesq equation in two space dimensions // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 1999. Vol. 22. Issue 1. P. 131–145. DOI: 10.1155/S016117129922131X
7. Yan Z.Y., Xie F.D., Zhang H.Q. Symmetry reductions, integrability and solitary wave solutions to high-order modified Boussinesq equations with damping term // Communications in Theoretical Physics. 2001. Vol. 36. No. 1. P. 1–6. DOI: 10.1088/0253-6102/36/1/1
8. Мегралиев Я.Т. Обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительным интегральным условием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 32–40. DOI: 10.20537/vm120104
9. Худавердиев К.И., Велиев А.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. Баку: Чашыоглы, 2010. 162 с.

Поступила в редакцию 10.10.2016

Мегралиев Яшар Топуш оглы, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных и интегральных уравнений, Бакинский Государственный Университет, AZ1148, Азербайджан, г. Баку, ул. З. Халилова, 23.
E-mail: yashar_aze@mail.ru

Ализаде Фархад Хикмет, аспирант, кафедра дифференциальных и интегральных уравнений, Бакинский Государственный Университет, AZ1148, Азербайджан, г. Баку, ул. З. Халилова, 23. E-mail: farxad@gmail.com

Ya. T. Megraliev, F. Kh. Alizade

Inverse boundary value problem for a Boussinesq type equation of fourth order with nonlocal time integral conditions of the second kind

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 503–514 (in Russian).

Keywords: inverse value problem, Boussinesq equation, existence, uniqueness, classical solution.

MSC2010: 35-XX

DOI: 10.20537/vm160405

This paper is concerned with an inverse boundary value problem for a Boussinesq type equation of fourth order with nonlocal time integral conditions. The definition of a classical solution of the problem is introduced. The goal of this paper is to determine the unknown coefficient and to solve the problem of interest. The problem is considered in a rectangular domain. To investigate the solvability of the inverse problem, we perform a conversion from the original problem to some auxiliary inverse problem with trivial boundary conditions. By the contraction mapping principle we prove the existence and uniqueness of solutions of the auxiliary problem. Then we make a conversion to the stated problem again and, as a result, we obtain the solvability of the inverse problem.

REFERENCES

1. Samarskii A.A. On some problems of theory of differential equations, *Differ. Uravn.*, 1980, vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935 (in Russian).
2. Kozhanov A.I., Pul'kina L.S. On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations, *Differential Equations*, vol. 42, issue 9, pp. 1233–1246. DOI: 10.1134/S0012266106090023
3. Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations, *Matematicheskoe Modelirovanie*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94–103 (in Russian).

4. Pul'kina L.S. Boundary-value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, issue 4, pp. 62–69. DOI: 10.3103/S1066369X12040081
5. Kirichenko S.V. On a boundary value problem for mixed type equation with nonlocal initial conditions in the rectangle, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, no. 3 (32), pp. 185–189. DOI: 10.14498/vsgtu1248
6. Varlamov V.V. Asymptotic behavior of solutions of the damped Boussinesq equation in two space dimensions, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 1999, vol. 22, issue 1, pp. 131–145. DOI: 10.1155/S016117129922131X
7. Yan Z.Y., Xie F.D., Zhang H.Q. Symmetry reductions, integrability and solitary wave solutions to high-order modified Boussinesq equations with damping term, *Communications in Theoretical Physics*, 2001, vol. 36, no. 1, pp. 1–6. DOI: 10.1088/0253-6102/36/1/1
8. Megraliev Ya.T. Inverse boundary value problem for second order elliptic equation with additional integral condition, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, issue 1, pp. 32–40. DOI: 10.20537/vm120104
9. Khudaverdiev K.I., Veliev A.A. *Issledovanie odnomernoi smeshannoi zadachi dlya odnogo klassa pseudo-giperbolicheskikh uravnenii tret'ego poryadka s nelineinoi pravoi chast'yu* (Investigation of the one-dimensional mixed problem for a class of the pseudo-hyperbolic equations of the third order with the nonlinear operator at the right-hand side), Baku: Chashyogly, 2010, 168 p.

Received 10.10.2016

Megraliev Yashar Topush ogly, Professor, Doctor of Physics and Mathematics, Department of Differential and Integral Equations, Baku State University, ul. Z. Khalilova, 23, Baku, AZ1148, Azerbaijan.
E-mail: yashar_aze@mail.ru

Alizade Farkhad Khikmet, Post-Graduate Student, Department of Differential and Integral Equations, Baku State University, ul. Z. Khalilova, 23, Baku, AZ1148, Azerbaijan.
E-mail: farxad@gmail.com