ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 4

УДК 517.91, 517.977

© *Ф. А. Кутерин, М. И. Сумин*

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ. I. ОПТИМИЗАЦИЯ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИСТЕМЫ[1]

Для задачи оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с поточечным фазовым ограничением типа равенства и конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенства формулируется устойчивый секвенциальный, или, другими словами, регуляризованный, принцип максимума Понтрягина в итерационной форме. Его главное отличие от классического принципа максимума Понтрягина заключается в том, что он, во-первых, формулируется в терминах минимизирующих последовательностей, во-вторых, имеет форму итерационного процесса в пространстве двойственных переменных и, наконец, в-третьих, устойчиво к ошибкам исходных данных оптимизационной задачи порождает в ней минимизирующее приближенное решение в смысле Дж. Варги, т. е. представляет собою регуляризирующий алгоритм. Доказательство регуляризованного принципа максимума Понтрягина в итерационной форме опирается на методы двойственной регуляризации и итеративной двойственной регуляризации.

Ключевые слова: оптимальное управление, неустойчивость, итеративная двойственная регуляризация, регуляризованный итерационный принцип Лагранжа, регуляризованный итерационный принцип максимума Понтрягина.

DOI: 10.20537/vm160403

Введение

Принцип максимума Понтрягина (ПМП), как хорошо известно, является классическим необходимым условием оптимальности в теории оптимального управления. При определенных дополнительных условиях на исходные данные задачи оптимального управления, связанных с ее выпуклостью и регулярностью самого ПМП, он, как известно, является и достаточным условием оптимальности. Формулировка и доказательство ПМП предполагают прежде всего, что задача оптимального управления рассматривается в идеальной ситуации точного задания ее исходных данных. Однако в громадном числе практических задач оптимизации, а также задач, возникающих во всевозможных естественно-научных приложениях и сводящихся к задачам оптимизации, точное задание исходных данных является весьма неестественным, а во многих ситуациях и просто невозможным. В подобных задачах мы не можем, строго говоря, брать в качестве приближения к решению исходной задачи с точными данными элементы, формально удовлетворяющие ПМП в возмущенных задачах. Причина этого кроется в данной нам от природы неустойчивости по возмущению исходных данных оптимизационных задач и, в частности, задач оптимального управления. Как следствие, она порождает и «неустойчивость» ПМП. Эта неустойчивость заключается в выделении им сколь угодно далеких «возмущенных» оптимальных элементов от их «невозмущенных» аналогов при сколь угодно малых возмущениях исходных данных задач. Подробный анализ «простейшего» примера задачи

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 15–47–02294-р_поволжье_а), Минобрнауки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014–2016 гг. (код проекта 1727), а также при поддержке гранта в рамках соглашения от 27 августа 2013 г. № 02.B.49.21.0003 между Минобрнауки РФ и Нижегородским госуниверситетом им. Н.И. Лобачевского.

оптимального управления линейным обыкновенным дифференциальным уравнением с фазовым ограничением-равенством, в которой выделяемое регулярным принципом максимума оптимальное управление ведет себя неустойчиво к возмущениям исходных данных, можно найти в работе [1].

Для решения проблем, связанных с неустойчивостью (некорректностью) классических условий оптимальности в задачах условной выпуклой оптимизации, в работах [2–4] было предложено рассматривать так называемые устойчивые секвенциальные, или, другими словами, регуляризованные, принципы Лагранжа (так как они используют лишь конструкцию регулярной функции Лагранжа, то их можно называть также устойчивыми секвенциальными (регуляризованными) теоремами Куна–Таккера), представляющие собой необходимые и достаточные условия на элементы минимизирующих последовательностей оптимизационных задач. Преодоление неустойчивости обеспечивается за счет применения методов теории двойственной регуляризации [2–6] и одновременного перехода к рассмотрению понятия минимизирующей последовательности допустимых элементов в качестве основного понятия оптимизационной теории, то есть, другими словами, перехода с языка оптимальных элементов на секвенциальный язык минимизирующих последовательностей. Подчеркнем, что использование выражения «устойчивый секвенциальный принцип Лагранжа» для формулируемых в [2–4] условий на минимизирующие последовательности обусловлено тем, что они, во-первых, структурно устроены так же, как и их классические аналоги, и, во-вторых, на основе обычной конструкции функции Лагранжа обеспечивают параллельное устойчивое конструирование как минимизирующей последовательности прямой переменной, так и соответствующей последовательности двойственной переменной, являющейся максимизирующей в двойственной к исходной задаче.

Перечислим основные цели данной работы.

1. Доказательство и обсуждение регуляризованных принципа Лагранжа (ПЛ) и ПМП в итерационной форме для двух выпуклых задач оптимального управления с сильно выпуклым целевым функционалом. Одной из них является задача оптимального управления системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с фиксированным временем, с поточечным фазовым ограничением типа равенства и конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенства. Другая представляет собой задачу оптимального управления линейным параболическим уравнением с фиксированным временем, с распределенным, начальным и граничным управлениями и с операторным полуфазовым ограничением типа равенства.

2. Иллюстрация принципиальных возможностей практического численного решения неустойчивых задач оптимального управления непосредственно на основе алгоритмов получаемых в работе регуляризованных принципов максимума Понтрягина в итерационной форме.

Доказательство указанных регуляризованных ПМП проходит по следующей схеме. Во-первых, задача оптимального управления записывается в форме эквивалентной задачи выпуклого программирования в гильбертовом пространстве с соответствующими ограничениями типа равенства и неравенства. Во-вторых, в указанной эквивалентной задаче на основе методов работ [2–4] доказывается регуляризованный ПЛ в итерационной форме. В-третьих, этот регуляризованный ПЛ «расшифровывается» в терминах соответствующей исходной задачи оптимального управления и, как следствие, формулируется и соответствующий регуляризованный итерационный ПЛ в задаче оптимального управления. Наконец, в-четвертых, последний порождает и соответствующий регуляризованный итерационный ПМП в задаче оптимального управления.

Работа состоит из двух частей, первая из которых посвящена доказательству регуляризованного итерационного ПМП в случае управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Во второй части аналогичный результат доказывается для задачи оптимального управления линейным параболическим уравнением. Центральное внимание во второй части уделяется также численной реализации получаемого здесь регуляризованного ПМП в итерационной форме в случае задачи оптимизации распределенной системы.

§ 1. Параметрическая задача выпуклого программирования

В соответствии с указанной схемой получения основных результатов работы рассмотрим прежде всего параметрическую задачу выпуклого программирования:

$$(P^\delta_{p,r}) \qquad f^\delta(z) \to \min, \quad A^\delta z = h^\delta + p, \quad g^\delta_i(z) \leqslant r_i,\ i = 1, \dots, m, \quad z \in \mathcal{D} \subset Z.$$

Здесь $p \in H$, $r = (r_1, \dots, r_m)^* \in \mathbb{R}^m$ — параметры, $f^\delta : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ — сильно выпуклый непрерывный функционал, $g^\delta_i : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$, $i = 1, \dots, m$, — выпуклые непрерывные функционалы, $g^\delta(z) \equiv (g^\delta_1(z), \dots, g^\delta_m(z))^*$, $h^\delta \in H$ — заданный элемент, $A^\delta : Z \to H$ — линейный ограниченный оператор, $\mathcal{D}$ — ограниченное выпуклое замкнутое множество, Z, H — гильбертовы пространства. Верхний индекс δ в исходных данных задачи $(P^\delta_{p,r})$ означает, что эти данные либо соответствуют ситуации их точного задания ($\delta = 0$), либо являются возмущенными ($\delta > 0$), то есть задаются с ошибкой, $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$, — некоторое фиксированное число.

Отметим, что в данной работе множество допустимых элементов $\mathcal{D}$ мы считаем ограниченным, так как таковым оно будет являться в обоих рассматриваемых ниже задачах оптимального управления. Случай задачи выпуклого программирования $(P^\delta_{p,r})$ с неограниченным $\mathcal{D}$ рассматривался в работе [2].

Будем считать, что

$$|f^\delta(z_1) - f^\delta(z_2)| \leqslant L_M \|z_1 - z_2\|, \quad |g^\delta_i(z_1) - g^\delta_i(z_2)| \leqslant L_M \|z_1 - z_2\|, \quad z_1,\, z_2 \in \mathcal{D} \cap S_M, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $L_M > 0$ — постоянная, не зависящая от δ, $S_M \equiv \{z \in Z : \|z\| \leqslant M\}$.

Ниже центральную роль при изучении задачи $(P^0_{p,r})$ будет играть понятие минимизирующего приближенного решения в смысле [7]. Напомним, что под минимизирующим приближенным решением понимается такая последовательность z^i, $i = 1, 2, \dots$, для которой справедливы соотношения $f^0(z^i) \leqslant \beta^0(p,r) + \delta^i$, $z^i \in \mathcal{D}^{0\epsilon^i}_{p,r}$, для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i, ϵ^i, $i = 1, 2, \dots$. Здесь $\beta^0(p,r)$ — обобщенная нижняя грань в задаче $(P^0_{p,r})$, которая является выпуклой и полунепрерывной снизу функцией параметров $(p,r) \in H \times \mathbb{R}^m$,

$$\beta^0(p,r) \equiv \beta^0_{+0}(p,r) \equiv \lim_{\epsilon \to +0} \beta^0_\epsilon(p,r), \quad \beta^0_\epsilon(p,r) \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}^{0\epsilon}_{p,r}} f^0(z), \quad \beta^0_\epsilon(p,r) \equiv +\infty, \text{ если } \mathcal{D}^{0\epsilon}_{p,r} = \varnothing,$$

$$\mathcal{D}^{\delta\epsilon}_{p,r} \equiv \{z \in \mathcal{D} : \|A^\delta z - h^\delta - p\| \leqslant \epsilon,\ g^\delta_i(z) \leqslant r_i + \epsilon,\ i = 1, \dots, m\}, \quad \mathcal{D}^{00}_{p,r} \equiv \mathcal{D}^0_{p,r}.$$

Очевидно, в ситуации оптимизационной задачи общего вида $\beta^0(p,r) \leqslant \beta^0_0(p,r)$, где $\beta^0_0(p,r)$ — классическое значение задачи. Но в случае поставленной выше задачи $(P^0_{p,r})$ имеет место равенство $\beta^0(p,r) = \beta^0_0(p,r)$. Справедлива следующая важная для дальнейших построений (см., например, [8]).

Лемма 1. *Функция значений $\beta^0 : H \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ является выпуклой и полунепрерывной снизу.*

Если решение задачи $(P^0_{p,r})$ (единственное) существует, будем обозначать его через $z^0_{p,r}$. Заметим, что из существования минимизирующего приближенного решения в этой задаче, очевидно, следует и ее разрешимость.

Будем считать, что

$$\begin{gathered} |f^\delta(z) - f^0(z)| \leqslant C\delta(1 + \|z\|), \quad |g^\delta(z) - g^0(z)| \leqslant C\delta(1 + \|z\|) \quad \forall\, z \in \mathcal{D}, \\ \|A^\delta z - A^0 z\| \leqslant C\delta(1 + \|z\|) \quad \forall\, z \in Z, \quad \|h^\delta - h^0\| \leqslant C\delta, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $C > 0$ не зависит от δ.

Введем функционал Лагранжа

$$\begin{gathered} L^\delta_{p,r}(z, \mu_0, \lambda, \mu) \equiv \mu_0 f^\delta(z) + \langle \lambda, A^\delta z - h^\delta - p \rangle + \langle \mu, g^\delta(z) - r \rangle, \\ L^\delta_{p,r}(z, 1, \lambda, \mu) \equiv L^\delta_{p,r}(z, \lambda, \mu), \quad z \in \mathcal{D}, \quad \mu_0 \geqslant 0, \quad \lambda \in H, \quad \mu \in \mathbb{R}^m, \end{gathered}$$

и соответствующую двойственную задачу

$$V^{\delta}_{p,r}(\lambda,\mu)\to\sup,\quad V^{\delta}_{p,r}(\lambda,\mu)\equiv\inf_{z\in\mathcal{D}}L^{\delta}_{p,r}(z,\lambda,\mu),\quad(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+. \tag{1.2}$$

В силу ограниченности множества $\mathcal{D}$ двойственный функционал $V^{\delta}_{p,r}$, очевидно, определен и конечен для любого элемента $(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m$. При этом, что также очевидно, значение $V^{\delta}_{p,r}(\lambda,\mu)$ достигается на единственном элементе $z^{\delta}[\lambda,\mu]\equiv\operatorname{argmin}\{L^{\delta}_{p,r}(z,\lambda,\mu),\ z\in\mathcal{D}\}$ при $(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+$, $\mathbb{R}^m_+\equiv\{x\in\mathbb{R}^m:\ x\geqslant 0\}$. Заметим одновременно, что в силу оценок (1.1) и ограниченности $\mathcal{D}$ справедлива оценка $|V^{\delta}_{p,r}(\lambda,\mu)-V^{0}_{p,r}(\lambda,\mu)|\leqslant C\delta(1+\|\lambda\|+|\mu|)$, в которой постоянная $C>0$ не зависит от λ, μ, δ. Ее доказательство приведено, например, в [6].

Можно показать (см., например, [2]), что каждый вектор Куна–Таккера задачи $(P^0_{p,r})$ (λ^*,μ^*) есть решение двойственной задачи (1.2) при $\delta=0$, в паре с $z^0_{p,r}$ составляет седловую точку функции Лагранжа $L^0_{p,r}(\cdot,\cdot,\cdot)$, а взятый с противоположным знаком, то есть вектор $-(\lambda^*,\mu^*)$, является элементом субдифференциала (в смысле выпуклого анализа) $\partial\beta^0(p,r)$, одновременно вектор $(-(\lambda^*,\mu^*),-1)$ — нормаль к $\operatorname{epi}\beta^0$ в точке $(p,r,\beta^0(p,r))$.

Теорема 1 (классический параметрический ПЛ в недифференциальной форме). *Пусть функция $f^0:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^1$ выпукла, $\beta^0(p,r)<+\infty$, множество $\mathcal{D}$ является выпуклым и замкнутым (возможно, неограниченным). Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть $z^0_{p,r}\in\mathcal{D}^0_{p,r}\equiv\{z\in\mathcal{D}:\ A^0z-h^0-p=0,\ g^0_i(z)\leqslant r_i,\ i=1,\dots,m\}$ — оптимальный элемент в задаче $(P^0_{p,r})$, то есть $f^0(z^0_{p,r})=\beta^0(p,r)$. Пусть также $\zeta\in\partial\beta^0(p,r)$, где $\partial\beta^0(p,r)$ — субдифференциал в смысле выпуклого анализа. Тогда для множителей Лагранжа $\lambda\in H$, $\mu\in\mathbb{R}^m_+$, $(\lambda,\mu)=-\zeta$, при $\mu_0=1$ выполняются соотношения*

$$L^0_{p,r}(z^0_{p,r},\mu_0,\lambda,\mu)\leqslant L^0_{p,r}(z,\mu_0,\lambda,\mu)\ \ \forall z\in\mathcal{D},\quad \mu_i(g^0_i(z^0_{p,r})-r_i)=0,\ \ i=1,\dots,m \tag{1.3}$$

и при этом $-\zeta=(\lambda,\mu)$ — вектор Куна–Таккера задачи $(P^0_{p,r})$.

И наоборот, если $z^0_{p,r}\in\mathcal{D}^0_{p,r}$ — такой элемент, что при некоторых $\mu_0>0$, $\lambda\in H$, $\mu\in\mathbb{R}^m_+$ выполняются соотношения (1.3), то этот элемент оптимален в задаче $(P^0_{p,r})$, пара $(\lambda/\mu_0,\mu/\mu_0)$ является вектором Куна–Таккера для нее и одновременно $(-\lambda/\mu_0,-\mu/\mu_0)\in\in\partial\beta^0(p,r)$.

2. *Пусть $z^0_{p,r}\in\mathcal{D}^0_{p,r}$ — оптимальный элемент в задаче $(P^0_{p,r})$, $(p,r)\in\partial\operatorname{dom}\beta^0$ и $\zeta\in\in\partial^{\infty}\beta^0(p,r)$, $\zeta\neq 0$, где $\partial^{\infty}\beta^0(p,r)$ — сингулярный (асимптотический) субдифференциал (см., например, [9]), определяемый формулой*

$$\partial^{\infty}\beta^0(p,r)\equiv\{(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m:\ ((\lambda,\mu),0)\in N_{\operatorname{epi}\beta^0}((p,r),\beta^0(p,r))\}.$$

Тогда для множителей Лагранжа $\lambda\in H$, $\mu\in\mathbb{R}^m_+$, $(\lambda,\mu)=-\zeta$, соотношения (1.3) выполняются при $\mu_0=0$.

И наоборот, если $z^0_{p,r}\in\mathcal{D}^0_{p,r}$ — такой элемент, что при $\mu_0=0$ и некоторых $\lambda\in H$, $\mu\in\mathbb{R}^m_+$, $(\lambda,\mu)\neq 0$, выполняются соотношения (1.3), то $(p,r)\in\partial\operatorname{dom}\beta^0$ и одновременно $(-\lambda,-\mu)\in\partial^{\infty}\beta^0(p,r)$.

Доказательство сформулированного в теореме 1 классического параметрического ПЛ, первая часть которого представляет собою классическую параметрическую теорему Куна–Таккера в выпуклом программировании, можно найти в [2].

Замечание 1. Первая часть теоремы 1 представляет собой, по сути дела, формулировку классической теоремы Куна–Таккера (см., например, [10, 11]) с использованием вместо понятия вектора Куна–Таккера эквивалентного в данном контексте понятия субдифференциала функции значений. При этом пара двойственных переменных $(\lambda/\mu_0,\mu/\mu_0)$, о которой идет речь в обоих утверждениях первой части теоремы 1, является одновременно вектором Куна–Таккера задачи $(P^0_{p,r})$ и решением двойственной задачи (1.2) при $\delta=0$.

Замечание 2. Важным является то, что ПЛ теоремы 1 «не охватываются» задачи $(P^0_{p,r})$, для которых одновременно $\partial\beta^0(p,r)=\varnothing$ и $\partial^\infty\beta^0(p,r)=\{0\}$, что вполне возможно для задач с ограничениями, задаваемыми операторами с бесконечномерными образами. Из теоремы следует, что обычный невырожденный (регулярный или нерегулярный) ПЛ в задаче $(P^0_{p,r})$ выполняется тогда и только тогда, когда имеет место хотя бы одно из двух соотношений $\partial\beta^0(p,r)\neq\varnothing$, $\partial^\infty\beta^0(p,r)\neq\{0\}$.

Сформулированный в теореме 1 классический параметрический ПЛ в недифференциальной форме позволяет на основе хорошо известных свойств выпуклых полунепрерывных снизу функций в гильбертовом пространстве охарактеризовать множество тех точек $(p,r)\in\operatorname{dom}\beta^0$, для которых соответствующие задачи $(P^0_{p,r})$ являются неустойчивыми, или, другими словами, функция β^0 разрывна в точке $(p,r)\in\operatorname{dom}\beta^0$. А именно, как показано в [4], свойство неустойчивости задачи $(P^0_{p,r})$ теснейшим образом связано с наличием ненулевого элемента в асимптотическом субдифференциале $\partial^\infty\beta^0(p,r)$. Другими словами, неустойчивые задачи заведомо находятся там, где $\partial^\infty\beta^0(p,r)\neq\{0\}$, что, в свою очередь, может иметь место только там, где $\partial\beta^0(p',r')$ не ограничен на множестве точек (p',r') из окрестности точки (p,r). Согласно хорошо известным свойствам выпуклых полунепрерывных снизу функций (см., например, следствия 2.2 и 2.3 в [12]) в случае непустоты $\operatorname{int}\operatorname{dom}\beta^0$ точки (p,r), соответствующие неустойчивым задачам (функция β^0 разрывна в точке (p,r)), могут находиться лишь на границе этого множества. В случае же пустоты $\operatorname{int}\operatorname{dom}\beta^0$, что «более характерно» для задач с бесконечномерным H, такие точки существуют в любой «окрестности» любой индивидуальной задачи $(P^0_{p,r})$. Заметим, что последняя ситуация реализуется во всех рассмотренных во введении к статье [4] иллюстративных примерах неустойчивости задач выпуклого программирования и наследуемой неустойчивости соответствующих ПЛ.

§ 2. Регуляризация на основе двойственности в задаче выпуклого программирования с сильно выпуклым функционалом качества

Опишем в настоящем параграфе два основанных на теории двойственности регуляризирующих алгоритма [2,5,6] приближенного нахождения точного решения $z^0_{p,r}$ задачи $(P^0_{p,r})$, а также сформулируем соответствующие теоремы их сходимости. Предполагаем в данном параграфе, что задача $(P^0_{p,r})$ разрешима.

1. Алгоритм двойственной регуляризации. Обозначим через $(\lambda^{\delta,\alpha}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha}_{p,r})$ единственную в $H\times\mathbb{R}^m_+$ точку, дающую на этом множестве максимум сильно вогнутому функционалу $R^{\delta,\alpha}_{p,r}(\lambda,\mu)\equiv V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)-\alpha\|\lambda\|^2-\alpha|\mu|^2$, $(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+$. Пусть выполняется условие согласования

$$\delta/\alpha(\delta)\to 0,\quad \alpha(\delta)\to 0,\quad \delta\to 0. \tag{2.1}$$

Алгоритм двойственной регуляризации [5] для приближенного решения задачи выпуклого программирования $(P^0_{p,r})$ с сильно выпуклым функционалом цели заключается в аппроксимации при $\delta\to 0$ точного решения $z^0_{p,r}$, регуляризованными элементами $z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}]$ при условии согласования (2.1). Подчеркнем при этом, что с формальной точки зрения элементы $(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r})$ конструируются в соответствии с методом стабилизации А. Н. Тихонова (см., например, [10]), примененным к задаче максимизации $V^0_{p,r}(\lambda,\mu)\to\sup$, $(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+$, являющейся двойственной по отношению к исходной задаче $(P^0_{p,r})$. Справедлива следующая теорема сходимости алгоритма двойственной регуляризации [2,5,6].

Теорема 2. *Пусть задача $(P^0_{p,r})$ разрешима и выполняется условие согласования (2.1). Тогда, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к $(P^0_{p,r})$ задача (существует вектор Куна–Таккера в ней или нет), справедливы предельные соотношения*

$$f^0(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}])\to f^0(z^0_{p,r}),\quad A^0z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}]-h^0-p\to 0,$$
$$g^0_i(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}])-r_i\leqslant\phi(\delta),\ i=1,\ldots,m,\quad \phi(\delta)\geqslant 0,\quad \phi(\delta)\to 0,$$
$$\big\langle(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}),\big(A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}]-h^\delta-p,g^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}])-r\big)\big\rangle\to 0,\quad \delta\to 0.$$

Если сильно выпуклый функционал f^0 является субдифференцируемым (в смысле выпуклого анализа) на $\mathcal{D}$, то выполняется и предельное соотношение $\|z^\delta[\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)},\mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}]-z_{p,r}^0\|\to 0$, $\delta\to 0$. Одновременно справедливо и предельное соотношение $\lim\limits_{\delta\to+0}V_{p,r}^0(\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)},\mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)})=$ $=\sup\limits_{(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+}V_{p,r}^0(\lambda,\mu)=f^0(z_{p,r}^0)$. Если же двойственная к $(P_{p,r}^0)$ задача разрешима, то имеет место сходимость $(\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)},\mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)})\to(\lambda_{p,r}^0,\mu_{p,r}^0)$ при $\delta\to 0$, где $(\lambda_{p,r}^0,\mu_{p,r}^0)\in H\times\mathbb{R}^m_+$ есть ее решение с минимальной нормой.

Итак, в зависимости от того, имеет или нет решение двойственная к $(P_{p,r}^0)$ задача, сконструированный выше двойственный алгоритм ведет себя, вообще говоря, двояко. В случае существования решения двойственной задачи генерируемое в соответствии с алгоритмом двойственной регуляризации семейство двойственных переменных $(\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)},\mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)})$, $\delta\to 0$, ограничено в $H\times\mathbb{R}^m_+$. Если же такого решения нет, то нормы элементов этого семейства неограниченно возрастают при $\delta\to 0$.

Описанный выше алгоритм двойственной регуляризации теоремы 2, состоящий в непосредственном решении в пространстве $H\times\mathbb{R}^m$ на основе метода стабилизации А.Н. Тихонова двойственной к $(P_{p,r}^0)$ задачи, дает «параллельную» сходимость приближений к $z_{p,r}^0$ в пространстве Z при условии, что параметр регуляризации α согласованно с величиной δ, характеризующей ошибку исходных данных, стремится к нулю. Такой процесс сходимости в пространстве решений Z, «параллельный» процессу решения двойственной задачи в случае ситуации теоремы 2, когда исходные данные известны точно ($\delta=0$, $\alpha(\delta)=\alpha$, $(\lambda_{p,r}^{0,\alpha},\mu_{p,r}^{0,\alpha})\equiv(\lambda_{p,r}^{\alpha},\mu_{p,r}^{\alpha})$), мы будем называть, в соответствии с традициями в теории регуляризации (см., например, [10]), базовым процессом.

2. Алгоритм итеративной двойственной регуляризации. Далее в данном параграфе мы опишем процесс итеративной регуляризации в пространстве двойственных переменных $H\times\mathbb{R}^m$ для решения двойственной к $(P_{p,r}^0)$ задачи, или, другими словами, процесс итеративной двойственной регуляризации для решения исходной задачи $(P_{p,r}^0)$. Этот процесс в пространстве $H\times\mathbb{R}^m$ является, по сути дела, регуляризованным итерационным процессом обычного градиентного подъема (см., например, [10]), или, другими словами, процессом, представляющим собой регуляризованный классический алгоритм Удзавы [13, 14]. На каждом его шаге, с помощью решения в пространстве Z «параллельной» задачи минимизации сильно выпуклого функционала Лагранжа для задачи $(P_{p,r}^0)$, вычисляются градиент целевого функционала двойственной задачи и одновременно очередное приближение в пространстве Z к точному решению $z_{p,r}^0$ исходной задачи. При этом оказывается необязательно решать регуляризованную двойственную задачу при каждом фиксированном значении параметра регуляризации α с помощью бесконечного итерационного процесса, как это было бы нужно делать в соответствии с организацией базового процесса или описанного выше алгоритма двойственной регуляризации. Процесс итеративной двойственной регуляризации позволяет при решении исходной задачи $(P_{p,r}^0)$ объединить два «бесконечных» итерационных процесса алгоритма двойственной регуляризации, один из которых — общий процесс максимизации двойственного функционала, а другой — процесс максимизации регуляризованного двойственного функционала при очередном значении параметра регуляризации α, в один бесконечный итерационный процесс. Процесс итеративной двойственной регуляризации стабилизируется (как это принято говорить в теории итеративной регуляризации, см., например, [10]) к базовому процессу, сходящемуся в силу теоремы 2 к решению $z_{p,r}^0$. Таким образом, эти два процесса, базовый и процесс итеративной двойственной регуляризации, «идут» параллельно, «притягиваясь» друг к другу, и из сходимости базового процесса мы выводим поэтому сходимость процесса итеративной двойственной регуляризации.

Используем ниже обозначение $(\lambda_{p,r}^{0,\alpha^k},\mu_{p,r}^{0,\alpha^k})\equiv(\lambda_{p,r}^{\alpha^k},\mu_{p,r}^{\alpha^k})\equiv(\lambda^k,\mu^k)$, где $(\lambda_{p,r}^{\alpha^k},\mu_{p,r}^{\alpha^k})$, $k=$ $=0,1,2,\ldots,$ — последовательность, вырабатываемая алгоритмом двойственной регуляризации теоремы 2 в случае $\delta=0$, $\alpha(\delta)\equiv\alpha$. Здесь α^k, $k=1,2,\ldots,$ — произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю.

Пусть далее δ^k, $k=1,2,\ldots,$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Предположим, что последовательность $(\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k)$, $k=0,1,2,\ldots,$ конструируется в соответствии с итерационным правилом

$$(\overline{\lambda}^{k+1},\overline{\mu}^{k+1})=\mathrm{Pr}_{H\times\mathbb{R}^m_+}\big((\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k)+\beta^k\partial V^{\delta^k}_{p,r}(\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k)-2\beta^k\alpha^k(\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k)\big),\quad k=0,1,2,\ldots, \tag{2.2}$$

где $(\overline{\lambda}^0,\overline{\mu}^0)\in H\times\mathbb{R}^m_+$,

$$\partial V^{\delta}_{p,r}(\lambda,\mu)=(A^\delta z^\delta[\lambda,\mu]-h^\delta-p,g^\delta(z^\delta[\lambda,\mu])-r), \tag{2.3}$$

а последовательности δ^k, α^k, β^k, $k=0,1,2,\ldots,$ удовлетворяют условиям согласования

$$\begin{gathered}\delta^k\geqslant 0,\quad \alpha^k>0,\quad \beta^k>0,\quad \lim_{k\to\infty}(\delta^k+\alpha^k+\beta^k)=0,\\ \frac{\alpha^k}{\alpha^{k+1}}\leqslant C_0,\quad \frac{|\alpha^{k+1}-\alpha^k|}{(\alpha^k)^3\beta^k}\to 0,\quad \frac{\beta^k}{(\alpha^k)^3}\to 0,\quad \frac{\delta^k}{(\alpha^k)^6}\to 0,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k\beta^k=+\infty.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Замечание 3. Доказательство формулы (2.3), представляющей собой выражение для градиента Фреше функционала $V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)$, $(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+$, можно найти в [6, лемма 3.5.2].

При сделанных предположениях, как показано в [6] (см. также [5]), справедливы предельные соотношения

$$\|(\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k)-(\lambda^k,\mu^k)\|\to 0,\quad \|z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k]-z^0[\lambda^k,\mu^k]\|\to 0,\quad k\to\infty, \tag{2.5}$$

и, как следствие, предельные соотношения

$$\begin{gathered}f^0(z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k])\to f^0(z^0),\quad A^0z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k]-A^0z^0[\lambda^k,\mu^k]\to 0,\\ g^0_i(z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k])-g^0_i(z^0[\lambda^k,\mu^k])\to 0,\quad i=1,\ldots,m,\quad k\to\infty,\\ \|z^0[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k]-z^0[\lambda^k,\mu^k]\|\to 0,\quad \|z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k]-z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\|\to 0.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Полученные предельные соотношения позволяют трансформировать теорему 2 в следующее утверждение — теорему сходимости алгоритма итеративной двойственной регуляризации.

Теорема 3. *Пусть задача $(P^0_{p,r})$ разрешима и выполняются условия согласования (2.4). Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к $(P^0_{p,r})$ задача (существует вектор Куна–Таккера в ней или нет), выполняются предельные соотношения*

$$\begin{gathered}f^0(z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k])\to f^0(z^0_{p,r}),\quad A^0z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k]-h^0-p\to 0,\\ g^0_i(z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k])-r_i\leqslant\phi(\delta^k),\quad \phi(\delta^k)\geqslant 0,\quad \phi(\delta^k)\to 0,\\ \big\langle(\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k),\big(A^{\delta^k}z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k]-h^{\delta^k}-p,g^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k])-r\big)\big\rangle\to 0,\quad \delta^k\to 0,\quad k\to\infty.\end{gathered}$$

Если сильно выпуклый функционал f^0 является субдифференцируемым на $\mathcal{D}$, то справедливо и предельное соотношение $\|z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k]-z^0_{p,r}\|\to 0$, $k\to\infty$. Одновременно с указанными предельными соотношениями выполняется и предельное соотношение $\lim\limits_{\delta^k\to+0}V^0_{p,r}(\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k)=$ $=\sup\limits_{(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+}V^0_{p,r}(\lambda,\mu)=f^0(z^0_{p,r})$. Если двойственная к $(P^0_{p,r})$ задача разрешима, то имеет место сходимость $(\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k)\to(\lambda^0_{p,r},\mu^0_{p,r})$, $k\to\infty$, где $(\lambda^0_{p,r},\mu^0_{p,r})\in H\times\mathbb{R}^m_+$ есть ее решение с минимальной нормой.

Существенной особенностью теоремы 3 является то, что она предполагает, что величина δ^k, характеризующая ошибку исходных данных, стремится к нулю при $k \to \infty$. Это условие является во многих практических ситуациях весьма ограничительным, так как в реальных прикладных задачах указанная величина является конечной фиксированной величиной, характеризующей работу реального измерительного прибора и по этой причине не равной нулю. В связи со сказанным в данном параграфе дается так называемое регуляризирующее правило останова итерационного процесса теоремы 3, в котором в полной мере учитывается ее отмеченный выше недостаток.

Пусть последовательности чисел δ^k, α^k, β^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условиям (2.4). Зафиксируем следующее правило останова процесса:

$$(\overline{\lambda}^{k+1}, \overline{\mu}^{k+1}) = \mathrm{Pr}_{H\times\mathbb{R}^m_+}\Big((\overline{\lambda}^k, \overline{\mu}^k) + \beta^k \partial V^\delta_{p,r}(\overline{\lambda}^k, \overline{\mu}^k) - 2\beta^k\alpha^k(\overline{\lambda}^k, \overline{\mu}^k)\Big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (2.7)$$

где $(\overline{\lambda}^0, \overline{\mu}^0) \in H \times \mathbb{R}^m_+$, при фиксированном конечном уровне погрешности $\delta > 0$, $\delta \leqslant \delta^1$. При каждом $\delta > 0$ итерации продолжаются до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, при котором выполняется неравенство $\delta^k \geqslant \delta$, $k = 1, 2, \ldots, k(\delta)$. Справедлива (см. [3])

Теорема 4. *Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к* $(P^0_{p,r})$ *задача* (*существует вектор Куна–Таккера в ней или нет*), *справедливы предельные соотношения*

$$f^0(z^\delta[\overline{\lambda}^{k(\delta)}, \overline{\mu}^{k(\delta)}]) \to f^0(z^0_{p,r}), \quad A^0 z^\delta[\overline{\lambda}^{k(\delta)}, \overline{\mu}^{k(\delta)}] - h^0 - p \to 0,$$
$$g^0_i(z^\delta[\overline{\lambda}^{k(\delta)}, \overline{\mu}^{k(\delta)}]) - r_i \leqslant \phi(\delta), \quad i = 1, \ldots, m, \quad \phi(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0,$$

а в случае субдифференцируемости f^0 *и предельное соотношение* $\|z^\delta[\overline{\lambda}^{k(\delta)}, \overline{\mu}^{k(\delta)}] - z^0_{p,r}\| \to 0$, $\delta \to 0$, *где* $(\overline{\lambda}^{k(\delta)}, \overline{\mu}^{k(\delta)})$ — *результат* $k(\delta)$ *итераций итерационного процесса* (2.7). *Другими словами, это правило останова порождает устойчивый по отношению к ошибкам исходных данных алгоритм построения минимизирующего приближенного решения в задаче* $(P^0_{p,r})$.

§ 3. Регуляризованные принципы Лагранжа в задаче выпуклого программирования с сильно выпуклым функционалом качества

Обсуждаемые в данном параграфе так называемые устойчивые секвенциальные, или, другими словами, регуляризованные, ПЛ были впервые предложены в [2–4]. Так как при их формулировании используется конструкция лишь обычной регулярной функции Лагранжа, они могут в равной степени называться и устойчивыми секвенциальными теоремами Куна–Таккера. Эти теоремы формулируются в терминах минимизирующих последовательностей. Их можно трактовать как обобщения на случай задач выпуклого программирования с приближенно известными исходными данными одноименных классических теорем, формулируемых в терминах оптимальных элементов и соответствующих им решений двойственных к исходным задач. Их фундаментальное отличие от классических теорем заключается в том, что они устойчивы по отношению к возмущениям исходных данных и, как следствие, могут непосредственно использоваться для практического решения разнообразных неустойчивых задач, сводящихся к задачам вида $(P^0_{p,r})$. Заметим, что приводимые ниже регуляризованный ПЛ и регуляризованный ПЛ в итерационной форме формулируются в форме необходимых и достаточных условий существования минимизирующего приближенного решения в исходной задаче $(P^0_{p,r})$. При этом формально не требуется предположение о существовании ее решения. В этой связи здесь уместно отметить, что классической теореме Куна–Таккера также можно придать вид критерия существования оптимальных элементов.

Теорема 5 (регуляризованный принцип Лагранжа). *Пусть* δ^k, $k = 1, 2, \ldots,$ — *произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Для того чтобы в задаче* $(P^0_{p,r})$ *существовало минимизирующее приближенное решение, необходимо, чтобы существовала последовательность двойственных переменных* $(\lambda^k, \mu^k) \in H \times \mathbb{R}^m_+$, $k = 1, 2, \ldots,$

такая, что $\delta^k\|(\lambda^k,\mu^k)\|\to 0$, $k\to\infty$, *и выполняются соотношения*

$$\begin{gathered} z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\in\mathcal{D}^{\delta^k\epsilon^k}_{p,r},\quad \epsilon^k\to 0,\\ \big\langle(\lambda^k,\mu^k),\big(A^{\delta^k}z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]-h^{\delta^k}-p,g^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k])-r\big)\big\rangle\to 0,\quad k\to\infty. \end{gathered}\tag{3.1}$$

Последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\ldots$, *в этом случае является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче* $(P^0_{p,r})$, *а в случае субдифференцируемости функционала* f^0 *на* $\mathcal{D}$ *имеет место и сходимость* $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\to z^0_{p,r}$, $k\to\infty$. *Одновременно выполняется и предельное соотношение*

$$V^0_{p,r}(\lambda^k,\mu^k)\to\sup_{(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+}V^0_{p,r}(\lambda,\mu).\tag{3.2}$$

В случае разрешимости двойственной к $(P^0_{p,r})$ *задачи* $(\lambda^k,\mu^k)\to(\lambda^0_{p,r},\mu^0_{p,r})$, $k\to\infty$, *где* $(\lambda^0_{p,r},\mu^0_{p,r})\in H\times\mathbb{R}^m_+$ *есть ее решение с минимальной нормой.*

Обратно, для существования минимизирующего приближенного решения в задаче $(P^0_{p,r})$ *достаточно существования последовательности двойственных переменных* $(\lambda^k,\mu^k)\in H\times$ $\times\mathbb{R}^m_+$, $k=1,2,\ldots$, *такой, что* $\delta^k\|(\lambda^k,\mu^k)\|\to 0$, $k\to\infty$, *выполняются предельные соотношения* (3.1). *Последовательность* $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\ldots$, *в этом случае является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче* $(P^0_{p,r})$, *а в случае субдифференцируемости функционала* f^0 *на* $\mathcal{D}$ *имеет место и сходимость* $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\to z^0$, $k\to\infty$. *Одновременно выполняется и предельное соотношение* (3.2), *а каждая слабая предельная точка последовательности* $(\lambda^k,\mu^k)\in H\times\mathbb{R}^m_+$, $k=1,2,\ldots$, *является точкой максимума в двойственной задаче* $V^0_{p,r}(\lambda,\mu)\to\max$, $(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+$.

В качестве последовательности $(\lambda^k,\mu^k)\in H\times\mathbb{R}^m_+$, $k=1,2,\ldots$, *может быть взята последовательность* $(\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}_{p,r},\mu^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}_{p,r})$, $k=1,2,\ldots$, *элементов* $(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r})$ *из теоремы 2, взятых при* $\delta=\delta^k$.

Доказательство теоремы может быть найдено в [2]. Отметим, что в [2] эта теорема носит название регуляризованной теоремы Куна–Таккера.

Замечание 4. Второе предельное соотношение (3.1) можно трактовать как обобщение на случай минимизирующих последовательностей классического для теории оптимизации условия дополняющей нежесткости.

Приводимый ниже в данном параграфе устойчивый секвенциальный ПЛ в итерационной форме нацелен прежде всего на непосредственное практическое решение задач выпуклого программирования с сильно выпуклыми целевыми функционалами, в том числе и неустойчивых по отношению к ошибкам исходных данных, и разнообразных сводящихся к ним задач.

Теорема 6 (регуляризованный принцип Лагранжа в итерационной форме). *Пусть* δ^k, $k=$ $=1,2,\ldots$, — *произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда, для того чтобы в задаче* $(P^0_{p,r})$ *существовало минимизирующее приближенное решение, необходимо, чтобы для последовательности двойственных переменных* $(\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k)\in H\times\mathbb{R}^m_+$, $k=1,2,\ldots$, *порождаемой итерационным процессом* (2.2) *с условиями согласования* (2.4), *выполнялись предельные соотношения*

$$\begin{gathered} z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k]\in\mathcal{D}^{\delta^k\epsilon^k}_{p,r},\quad \epsilon^k\to 0,\\ \big\langle(\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k),\big(A^{\delta^k}z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k]-h^{\delta^k}-p,g^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k])-r\big)\big\rangle\to 0,\quad k\to\infty. \end{gathered}\tag{3.3}$$

В этом случае последовательность $z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k]$, $k=1,2,\ldots$, *представляет собой искомое минимизирующее приближенное решение в задаче* $(P^0_{p,r})$, *а в случае субдифференцируемости функ-*

ционала f^0 на $\mathcal{D}$ имеет место и сходимость $z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k] \to z^0_{p,r}$, $k \to \infty$. Одновременно выполняется и предельное соотношение

$$V^0_{p,r}(\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k) \to \sup_{(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+} V^0_{p,r}(\lambda,\mu). \tag{3.4}$$

Обратно, для того чтобы в задаче $(P^0_{p,r})$ существовало минимизирующее приближенное решение, достаточно, чтобы для последовательности двойственных переменных $(\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k) \in \in H \times \mathbb{R}^m_+$, $k = 1,2,\ldots$, порождаемой итерационным процессом (2.2) с условиями согласования (2.4), выполнялись предельные соотношения (3.3). В этом случае последовательность $z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k]$, $k = 1,2,\ldots$, является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче $(P^0_{p,r})$, а в случае субдифференцируемости функционала f^0 на $\mathcal{D}$ имеет место и сходимость $z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k] \to z^0_{p,r}$, $k \to \infty$. Одновременно является справедливым и предельное соотношение (3.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства необходимости заметим прежде всего, что задача $(P^0_{p,r})$ разрешима в силу существования минимизирующего приближенного решения и условий на ее исходные данные. Поэтому предельные соотношения (3.3), (3.4) доказываемой теоремы являются следствиями теоремы 3. Далее, для доказательства достаточности в первую очередь заметим, что задача $(P^0_{p,r})$ разрешима благодаря включениям $z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k\epsilon^k}_{p,r}$, $k = 0,1,\ldots$, ограниченности последовательности $z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k]$, $k = 0,1,\ldots$, и условий на ее исходные данные. Тогда в силу теоремы 2 существует последовательность $(\lambda^{0,\alpha^k},\mu^{0,\alpha^k}) \equiv (\lambda^{\alpha^k},\mu^{\alpha^k}) \equiv \equiv (\lambda^k,\mu^k)$, $k = 0,1,\ldots$, порождаемая алгоритмом двойственной регуляризации в случае точного задания исходных данных, и, как следствие, последовательность $(\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k)$, $k = 0,1,2,\ldots$, порождаемая итерационным процессом (2.2) с условиями согласования (2.4), удовлетворяет предельным соотношениям (2.5), (2.6) и (3.4). По этой причине последовательность $z^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k,\overline{\mu}^k]$, $k = 1,2,\ldots$, является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче $(P^0_{p,r})$. $\square$

Существенной особенностью теоремы 6 является то, что она, как и теорема 3 предполагает, что величина δ^k, характеризующая ошибку исходных данных, стремится к нулю при $k \to \infty$. Так как это условие стремления к нулю при $k \to \infty$ величины δ^k является в практических задачах очень ограничительным, то, как и теорема 3, теорема 6 снабжается соответствующим регуляризирующим правилом останова итерационного процесса. Это правило останова практически дословно совпадает с правилом останова, сформулированным в параграфе 2 после теоремы 3 (см. теорему 4), и может быть использовано при практическом решении неустойчивых задач на основе регуляризованного ПЛ в итерационной форме теоремы 6, так как является устойчивым алгоритмом построения минимизирующих приближенных решений в задаче $(P^0_{p,r})$.

§ 4. Параметрическая задача оптимального управления системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим параметрическую выпуклую задачу оптимального управления с фиксированным временем, с непрерывным сильно выпуклым функционалом качества, с поточечным фазовым ограничением типа равенства, понимаемым как ограничение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \equiv L_2(X)$, и конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенства:

$$(OC^\delta_{p,r}) \qquad \begin{gathered} f^\delta(u) \equiv \int_0^T \Big\langle F^\delta(t)x^\delta[u](t), x^\delta[u](t)\Big\rangle + \Big\langle G^\delta(t)u(t), u(t)\Big\rangle\, dt \to \min, \quad u \in \mathcal{D} \subset L^l_2(0,T), \\ I^\delta(u)(t) \equiv \langle \Phi^\delta_1(t), x^\delta[u](t)\rangle = H^\delta_1(t) + p_1(t) \text{ при п. в. } t \in X, \\ g^\delta_{1,i}(u) \equiv \langle \varphi^\delta_{1,i}, x^\delta[u](T)\rangle = h^\delta_{1,i} + p_{2,i}, \quad i = 1,\ldots,k, \\ g^\delta_{2,i}(u) \equiv \varphi^\delta_{2,i}(x^\delta[u](T)) \leqslant r_i, \quad i = 1,\ldots,m. \end{gathered}$$

Здесь $p_1 \in \mathcal{H}$, $p_2 \equiv (p_{2,1},\ldots,p_{2,k}) \in \mathbb{R}^k$, $p \equiv (p_1,p_2)$, $r \equiv (r_1,\ldots,r_m) \in \mathbb{R}^m$ — параметры, $f^\delta : L_2^l(0,T) \to \mathbb{R}^1$ — непрерывный сильно выпуклый функционал, $F^\delta : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $G^\delta : [0,T] \to \mathbb{R}^{l\times l}$ — измеримые по Лебегу ограниченные неотрицательная и равномерно по t положительная матрицы, Φ_1^δ, $H_1^\delta \in L_\infty(X)$, $\varphi_{1,i}^\delta \in \mathbb{R}^n$, $i = 1,\ldots,k$, $h_1^\delta \equiv (h_{1,1}^\delta,\ldots,h_{1,k}^\delta) \in \mathbb{R}^k$, $\varphi_{2,i}^\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — выпуклые непрерывные функции, $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_2^l(0,T) : u(t) \in U \text{ при п. в. } t \in (0,T)\}$, $U \subset \mathbb{R}^l$ — выпуклый компакт, $X \subset [0,T]$, $X = \operatorname{cl}\mathring{X}$, — замкнутое множество без изолированных точек с непустой внутренностью, $x^\delta[u](t)$, $t \in [0,T]$, — решение задачи Коши

$$\dot{x} = A^\delta(t)x + B^\delta(t)u(t), \quad t \in [0,T], \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{4.1}$$

с измеримыми по Лебегу ограниченными матрицами $A^\delta : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B^\delta : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times l}$. Верхний индекс δ в исходных данных задачи $(OC_{p,r}^\delta)$ означает, что эти данные либо соответствуют ситуации их точного задания ($\delta = 0$), либо являются возмущенными ($\delta > 0$), то есть задаются с ошибкой, $\delta \in [0,\delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое фиксированное число. Обозначим через $u_{p,r}^0$ оптимальный элемент в задаче $(OC_{p,r}^0)$ (единственный) в случае его существования.

Будем считать, что выполняются следующие оценки для отклонений возмущенных исходных данных задачи от точных:

$$\begin{gathered}
\|F^\delta - F^0\|_{\infty,(0,T)} \leqslant C\delta, \quad \|G^\delta - G^0\|_{\infty,(0,T)} \leqslant C\delta,\\
\|\Phi_1^\delta - \Phi_1^0\|_{\infty,X} \leqslant C\delta, \quad \|H_1^\delta - H_1^0\|_{\infty,X} \leqslant C\delta,\\
|\varphi_{1,i}^\delta - \varphi_{1,i}^0| \leqslant C\delta,\ i = 1,\ldots,k, \quad |\varphi_{2,i}^\delta(x) - \varphi_{2,i}^0(x)| \leqslant C\delta \quad \forall\, x \in S_M^n,\ i = 1,\ldots,m,\\
\|A^\delta - A^0\|_{\infty,(0,T)} \leqslant C\delta, \quad \|B^\delta - B^0\|_{\infty,(0,T)} \leqslant C\delta,
\end{gathered} \tag{4.2}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от δ, $S_M^n \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < M\}$.

Перепишем задачу $(OC_{p,r}^\delta)$ в более компактной форме:

$$(OC_{p,r}^\delta) \qquad \begin{gathered} f^\delta(u) \to \min, \quad u \in \mathcal{D},\\ \widetilde{g}_1^\delta(u) \equiv (I^\delta(u), g_{1,1}^\delta(u),\ldots,g_{1,k}^\delta(u)) = \overline{h}^\delta + p, \quad g_2^\delta(u) \equiv (g_{2,1}^\delta(u),\ldots,g_{2,m}^\delta(u)) \leqslant r, \end{gathered}$$

где $\overline{h}^\delta \equiv (H_1^\delta, h_{1,1}^\delta,\ldots,h_{1,k}^\delta) \in L_2(0,T)\times\mathbb{R}^k$, $p \equiv (p_1,p_{2,1},\ldots,p_{2,k}) \in L_2(0,T)\times\mathbb{R}^k$.

Перепишем далее задачу оптимального управления $(OC_{p,r}^\delta)$ в форме задачи выпуклого программирования $(P_{p,r}^\delta)$ параграфа 1:

$$(\widetilde{P}_{p,r}^\delta) \qquad f^\delta(u) \to \min, \quad u \in \mathcal{D}, \quad A^\delta u = h^\delta + p, \quad g^\delta(u) \leqslant r,$$

где $A^\delta : L_2^l(0,T) \to L_2(X)\times\mathbb{R}^k \equiv H$ — линейный ограниченный оператор, задаваемый равенством $A^\delta u \equiv (\langle\Phi_1^\delta(\cdot), x_0^\delta[u](\cdot)\rangle, \langle\varphi_{1,1}^\delta, x_0^\delta[u](T)\rangle,\ldots,\langle\varphi_{1,k}^\delta, x_0^\delta[u](T)\rangle)$, $x_0^\delta[u]$ — решение задачи Коши с однородным начальным условием

$$\dot{x} = A^\delta(t)x + B^\delta(t)u(t), \quad x(0) = 0 \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,T],$$

$g^\delta(u) \equiv g_2^\delta(u)$, $h^\delta \equiv \overline{h}^\delta - \widetilde{h}^\delta$, $\widetilde{h}^\delta \in L_2(X)\times\mathbb{R}^k$ — элемент, задаваемый равенством

$$\widetilde{h}^\delta \equiv -(\langle\Phi_1^\delta(\cdot), x^\delta[0](\cdot)\rangle, \langle\varphi_{1,1}^\delta, x^\delta[0](T)\rangle,\ldots,\langle\varphi_{1,k}^\delta, x^\delta[0](T)\rangle).$$

При этом, как можно заметить,

$$h^\delta \equiv (H_1^\delta(\cdot) - \langle\Phi_1^\delta(\cdot), x^\delta[0](\cdot)\rangle, h_{1,1}^\delta - \langle\varphi_{1,1}^\delta, x^\delta[0](T)\rangle,\ldots,h_{1,k}^\delta - \langle\varphi_{1,k}^\delta, x^\delta[0](T)\rangle).$$

Запишем оценки для отклонений исходных данных возмущенной задачи $(\widetilde{P}_{p,r}^\delta)$ ($\delta > 0$) от соответствующих исходных данных невозмущенной задачи ($\delta = 0$). С помощью хорошо известных стандартных средств легко показать, что справедливы оценки

$$\begin{gathered}
\|x^\delta[u]\|_{[0,T]}^{(0)} \leqslant C_1(1 + \|u\|_{2,(0,T)}), \quad \|x_0^\delta[u]\|_{[0,T]}^{(0)} \leqslant C_2\|u\|_{2,(0,T)},\\
\|x^\delta[u] - x^0[u]\|_{[0,T]}^{(0)} \leqslant C_3\delta(1 + \|u\|_{2,(0,T)}), \quad \|x_0^\delta[u] - x_0^0[u]\|_{[0,T]}^{(0)} \leqslant C_4\delta(1 + \|u\|_{2,(0,T)}),
\end{gathered}$$

в которых постоянные C_1, C_2, C_3, $C_4 > 0$ не зависят от δ и $u \in L_2^l(0,T)$. В свою очередь, эти оценки в совокупности с оценками (4.2) отклонения возмущенных исходных данных от точных для задачи $(OC^\delta_{p,r})$ без труда приводят к искомым оценкам отклонения исходных данных возмущенной задачи $(\widetilde{P}^\delta_{p,r})$ от соответствующих исходных данных невозмущенной задачи:

$$|f^\delta(u) - f^0(u)| \leqslant C_5\delta, \quad |g^\delta(u) - g^0(u)| \leqslant C_6\delta \quad \forall u \in \mathcal{D},$$
$$\|A^\delta u - A^0 u\| \leqslant C_7\delta(1 + \|u\|) \quad \forall u \in L_2^l(0,T), \quad \|h^\delta - h^0\| \leqslant C_8\delta,$$

где постоянные C_5, C_6, C_7, $C_8 > 0$ не зависят от $\delta \in (0, \delta_0]$. Таким образом, мы можем воспользоваться всеми результатами параграфа 3 и, как следствие, сформулировать регуляризованные ПЛ для задачи $(OC^0_{p,r})$, являющиеся «следами» соответственно теорем 5, 6.

§ 5. Регуляризованный итерационный принцип Лагранжа в задаче оптимального управления системой линейных дифференциальных уравнений

Сформулируем в данном параграфе регуляризованный ПЛ в итерационной форме в задаче оптимального управления $(OC^\delta_{p,r})$, являющийся «следом» соответствующей теоремы 6. Обозначим с этой целью через $\Lambda \equiv (\lambda_1, \lambda_2) \in H \equiv \mathcal{H} \times \mathbb{R}^k$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ двойственные переменные в исходной задаче оптимального управления $(OC^\delta_{p,r})$ и запишем выражение для ее функции Лагранжа

$$\begin{aligned} L^\delta_{p,r}(u,\Lambda,\mu) &\equiv L^\delta_{p,r}(u,\lambda_1,\lambda_2,\mu) \equiv f^\delta(u) + \langle \Lambda, A^\delta u - h^\delta - p\rangle + \langle \mu, g_2^\delta(u) - r\rangle = \\ &= f^\delta(u) + \langle \lambda_1, I^\delta(u) - H_1^\delta - p_1\rangle + \langle \lambda_2, g_1^\delta(u) - h_1^\delta - p_2\rangle + \langle \mu, g_2^\delta(u) - r\rangle = \\ &= \int_0^T \Big(\langle F^\delta(t) x^\delta[u](t), x^\delta[u](t)\rangle + \langle G^\delta(t)u(t), u(t)\rangle\Big)\,dt + \\ &+ \int_0^T \lambda_1(t)\Big(\langle \Phi_1^\delta(t), x^\delta[u](t)\rangle - H_1^\delta(t) - p_1(t)\Big)\,dt + \\ &+ \sum_{i=1}^k \lambda_{2,i}\Big(\langle \varphi^\delta_{1,i}, x^\delta[u](T)\rangle - h^\delta_{1,i} - p_{2,i}\Big) + \sum_{i=1}^m \mu_i\Big(\varphi^\delta_{2,i}(x^\delta[u](T)) - r_i\Big), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $\lambda_2 \equiv (\lambda_{2,1}, \ldots, \lambda_{2,k})$, $\mu \equiv (\mu_1, \ldots, \mu_m)$, $g_1^\delta(u) \equiv (g^\delta_{1,1}(u), \ldots, g^\delta_{1,k}(u))$, $g_2^\delta(u) \equiv (g^\delta_{2,1}(u), \ldots, g^\delta_{2,m}(u))$. Введем обозначения $\mathcal{D}^{\delta\epsilon}_{p,r} \equiv \{u \in \mathcal{D} : \|(I^\delta(u) - H_1^\delta - p_1, g_1^\delta(u) - h_1 - p_2)\| \leqslant \epsilon$, $g^\delta_{2,i}(u) \leqslant r_i + \epsilon$, $i = 1, \ldots, m\}$, $u^\delta[\Lambda,\mu] = u^\delta[\lambda_1,\lambda_2,\mu] = \operatorname*{argmin}_{u\in\mathcal{D}} L^\delta_{p,r}(u,\lambda_1,\lambda_2,\mu)$. Тогда «расшифровка» теоремы 6 в терминах исходной задачи оптимального управления $(OC^0_{p,r})$ приводит соответственно к регуляризованному ПЛ в итерационной форме в этой задаче. Заметим при этом, что благодаря специфике задачи $(OC^\delta_{p,r})$ и целевого функционала f^δ (он является выпуклым и квадратичным) легко показать его дифференцируемость по Фреше для любой точки $u \in L_2^l(0,T)$. Это обстоятельство обеспечивает сильную сходимость любого минимизирующего приближенного решения задачи $(OC^0_{p,r})$ к ее оптимальному элементу $u^0_{p,r}$.

Теорема 7 (Регуляризованный итерационный ПЛ в задаче оптимального управления). *Пусть δ^k, $k = 1, 2, \ldots,$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Для того чтобы в задаче $(OC^0_{p,r})$ существовало минимизирующее приближенное решение (и, следовательно, сильно сходилось к $u^0_{p,r}$), необходимо, чтобы для последовательности двойственных переменных $(\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k) \equiv (\overline{\lambda}_1^k, \overline{\lambda}_2^k, \overline{\mu}^k) \in H \times \mathbb{R}^m_+$, $k = 1, 2, \ldots,$ порождаемой итерационным процессом*

$$(\overline{\Lambda}^{k+1}, \overline{\mu}^{k+1}) = \mathrm{Pr}_{H\times\mathbb{R}^m_+}\big((\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k) + \beta^k \partial V^{\delta^k}_{p,r}(\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k) - 2\beta^k\alpha^k(\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.2}$$

где $(\overline{\Lambda}^0, \overline{\mu}^0) \in H \times \mathbb{R}^m_+$, $\partial V^{\delta^k}_{p,r}(\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k) = (A^{\delta^k} u^{\delta^k}[\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k] - h^{\delta^k} - p, g^{\delta^k}(u^{\delta^k}[\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k]) - r)$, с условиями согласования (2.4), выполнялись предельные соотношения

$$\begin{aligned} u^{\delta^k}[\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k\epsilon^k}_{p,r}, \quad \epsilon^k \to 0, \quad \big\langle (\overline{\lambda}_1^k, \overline{\lambda}_2^k, \overline{\mu}^k), \big(I^{\delta^k}(u^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k, \overline{\mu}^k]) - H_1^{\delta^k} - p_1, \\ g_1^{\delta^k}(u^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k, \overline{\mu}^k]) - h_1^{\delta^k} - p_2, g_2^{\delta^k}(u^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k, \overline{\mu}^k]) - r\big)\big\rangle \to 0, \quad k \to \infty. \end{aligned} \tag{5.3}$$

В этом случае последовательность $u^{\delta^k}[\overline{\Lambda}^k,\overline{\mu}^k]$ *представляет собой искомое минимизирующее приближенное решение в задаче* $(OC^0_{p,r})$, *а также имеют место предельные соотношения*

$$u^{\delta^k}[\overline{\Lambda}^k,\overline{\mu}^k]\to u^0_{p,r},\quad V^0_{p,r}(\overline{\Lambda}^k,\overline{\mu}^k)\equiv\inf_{u\in\mathcal{D}}L^\delta_{p,r}(u,\overline{\Lambda}^k,\overline{\mu}^k)\to\sup_{(\Lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+}V^0_{p,r}(\Lambda,\mu),\quad k\to\infty. \tag{5.4}$$

Обратно, для того чтобы в задаче $(OC^0_{p,r})$ *существовало минимизирующее приближенное решение, достаточно, чтобы для последовательности двойственных переменных* $(\overline{\Lambda}^k,\overline{\mu}^k)\in H\times\mathbb{R}^m_+$, $k=1,2,\ldots$, *порождаемой итерационным процессом* (5.2) *с условиями согласования* (2.4), *выполнялись предельные соотношения* (5.3). *В этом случае последовательность* $u^{\delta^k}[\overline{\Lambda}^k,\overline{\mu}^k]$, $k=1,2,\ldots$, *является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче* $(OC^0_{p,r})$, *и справедливы предельные соотношения* (5.4).

Как и в абстрактной задаче $(P^\delta_{p,r})$, в случае задания исходных данных с ошибкой фиксированного конечного уровня $\delta>0$ в задаче $(OC^\delta_{p,r})$ может быть сформулировано регуляризирующее правило останова итерационного процесса

$$(\overline{\Lambda}^{k+1},\overline{\mu}^{k+1})=\mathrm{Pr}_{H\times\mathbb{R}^m_+}\big((\overline{\Lambda}^k,\overline{\mu}^k)+\beta^k\partial V^\delta_{p,r}(\overline{\Lambda}^k,\overline{\mu}^k)-2\beta^k\alpha^k(\overline{\Lambda}^k,\overline{\mu}^k)\big),\quad k=0,1,2,\ldots. \tag{5.5}$$

А именно, при каждом $\delta>0$, $\delta\leqslant\delta^1$ итерации продолжаются до такого наибольшего номера $k=k(\delta)$, при котором выполняются неравенства $\delta^k\geqslant\delta$, $k=1,2,\ldots,k(\delta)$.

В этом случае следствием теоремы 4 является следующая теорема (*правило останова итерационного процесса регуляризованного принципа Лагранжа в итерационной форме*).

Теорема 8. *В случае задания исходных данных с ошибкой фиксированного конечного уровня* $\delta>0$ *в качестве приближенного решения задачи* $(OC^0_{p,r})$ *может быть взят элемент* $u^\delta[\overline{\Lambda}^{k(\delta)},\overline{\mu}^{k(\delta)}]$, *где* $(\overline{\Lambda}^{k(\delta)},\overline{\mu}^{k(\delta)})$ *— результат* $k(\delta)$ *итераций итерационного процесса* (5.5). *В этом случае имеют место предельные соотношения*

$$u^\delta[\overline{\Lambda}^{k(\delta)},\overline{\mu}^{k(\delta)}]\to u^0_{p,r},\quad V^0_{p,r}(\overline{\Lambda}^{k(\delta)},\overline{\mu}^{k(\delta)})\to\sup_{(\Lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+}V^0_{p,r}(\Lambda,\mu),\quad\delta\to0.$$

§ 6. Регуляризованный итерационный принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управления системой линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим при каждом $\Lambda\in H$, $\mu\in\mathbb{R}^m$ задачу минимизации функционала Лагранжа (5.1):

$$L^\delta_{p,r}(u,\Lambda,\mu)\equiv L^\delta_{p,r}(u,\lambda_1,\lambda_2,\mu)\to\min,\quad u\in\mathcal{D}. \tag{6.1}$$

В дополнение к ранее сформулированным условиям на исходные данные задачи $(OC^0_{p,r})$ предположим, что функции $\varphi^\delta_{2,i}$ обладают непрерывными в $\mathbb{R}^n$ градиентами $\nabla_x\varphi^\delta_{2,i}$, $i=1,\ldots,m$. В этом случае, очевидно, необходимым и достаточным условием того, что некоторое управление $u\in\mathcal{D}$ доставляет минимум в задаче (6.1), является выполнимость на этом управлении ПМП. Для записи ПМП в задаче (6.1) введем стандартное обозначение: $H^\delta(x,t,u,\psi,\lambda_1)\equiv\langle\psi,A^\delta(t)x+B^\delta(t)u(t)\rangle-\big(\langle F^\delta(t)x^\delta[u](t),x^\delta[u](t)\rangle+\langle G^\delta(t)u(t),u(t)\rangle+\lambda_1(t)\big(\langle\Phi^\delta_1(t),x^\delta[u](t)\rangle-H^\delta_1(t)-p_1(t)\big)\big)$.

Лемма 2. *При сформулированном выше дополнительном условии дифференцируемости* $\varphi^\delta_{2,i}$, $i=1,\ldots,m$, *управление* $u^\delta_{p,r}[\Lambda,\mu]$ *при любом* $(\Lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+$ *удовлетворяет принципу максимума Понтрягина в задаче* (6.1), *т. е. удовлетворяет при* $u=u^\delta_{p,r}[\Lambda,\mu]$ *соотношению максимума*

$$H^\delta(x^\delta[u](t),u(t),t,\psi^\delta(t),\lambda_1(t))=\max_{v\in U}H^\delta(x^\delta[u](t),v,t,\psi^\delta(t),\lambda_1(t))\quad\text{при п. в. } t\in[0,T], \tag{6.2}$$

где $\psi^\delta(t)$, $t\in[0,T]$, *— решение сопряженной задачи*

$$\dot\psi=-\nabla_xH^\delta(x^\delta[u](t),u(t),t,\psi(t),\lambda_1(t)),\quad \psi(T)=-\sum_{i=1}^k\lambda_{2,i}\varphi^\delta_{1,i}-\sum_{i=1}^m\mu_i\big(\nabla\varphi^\delta_{2,i}(x^\delta[u](T))\big). \tag{6.3}$$

Обратно, в силу выпуклости задачи $(OC^0_{p,r})$ *любой элемент* $u \in \mathcal{D}$, *удовлетворяющий при* $(\Lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ *соотношениям* (6.2), (6.3), *доставляет минимум в задаче* (6.1).

Обозначим через $U^\delta_{\max}[\Lambda, \mu] = U^\delta_{\max}[\lambda_1, \lambda_2, \mu]$ множество управлений из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих принципу максимума Понтрягина в задаче (6.1) при сформулированном выше дополнительном условии непрерывной дифференцируемости функций $\varphi^\delta_{2,i}$, $i = 1, \ldots, m$. Очевидно, в нашем случае, благодаря сильной выпуклости f^δ, это множество состоит из одного элемента $U^\delta_{\max}[\Lambda, \mu] \equiv \{u^\delta_{\max}[\Lambda, \mu]\}$, и справедливо равенство $u^\delta_{\max}[\Lambda, \mu] = u^\delta[\Lambda, \mu]$.

Непосредственным следствием теоремы 7 и леммы 2 является регуляризованный принцип максимума Понтрягина в итерационной форме для задачи $(OC^\delta_{p,r})$.

Теорема 9 (Регуляризованный итерационный принцип максимума Понтрягина). *Пусть* δ^k, $k = 1, 2, \ldots,$ — *произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда, для того чтобы в задаче* $(OC^0_{p,r})$ *существовало минимизирующее приближенное решение* (*и, следовательно, сильно сходилось к* $u^0_{p,r}$), *необходимо, чтобы для последовательности двойственных переменных* $(\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k) \in H \times \mathbb{R}^m_+$, $k = 1, 2, \ldots,$ *порождаемой итерационным процессом*

$$
\begin{aligned}
&(\overline{\Lambda}^{k+1}, \overline{\mu}^{k+1}) = \mathrm{Pr}_{H\times\mathbb{R}^m_+}\Big((\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k) + \\
&+ \beta^k\big(A^{\delta^k} u^{\delta^k}_{\max}[\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k] - h^{\delta^k} - p, g^{\delta^k}(u^{\delta^k}_{\max}[\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k]) - r\big) + 2\beta^k\alpha^k(\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k)\Big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

где $(\overline{\Lambda}^0, \overline{\mu}^0) \in H \times \mathbb{R}^m_+$, *с условиями согласования* (2.4), *выполнялись предельные соотношения*

$$
\begin{gathered}
u^{\delta^k}_{\max}[\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k\epsilon^k}_{p,r}, \quad \epsilon^k \to 0, \quad \big\langle(\overline{\lambda}^k_1, \overline{\lambda}^k_2, \overline{\mu}^k), \big(I^{\delta^k}(u^{\delta^k}_{\max}[\overline{\lambda}^k, \overline{\mu}^k]) - H^{\delta^k}_1 - p_1, \\
g^{\delta^k}_1(u^{\delta^k}_{\max}[\overline{\lambda}^k, \overline{\mu}^k]) - h^{\delta^k}_1 - p_2, g^{\delta^k}_2(u^{\delta^k}_{\max}[\overline{\lambda}^k, \overline{\mu}^k]) - r\big)\big\rangle \to 0, \quad k \to \infty.
\end{gathered} \tag{6.5}
$$

В этом случае последовательность $u^{\delta^k}_{\max}[\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k]$, $k = 1, 2, \ldots,$ *представляет собой искомое минимизирующее приближенное решение в задаче* $(OC^0_{p,r})$, *а также имеет место сходимость* $u^{\delta^k}_{\max}[\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k] \to u^0_{p,r}$, $k \to \infty$. *Одновременно выполняется и предельное соотношение* (5.4).

Обратно, для того чтобы в задаче $(OC^0_{p,r})$ *существовало минимизирующее приближенное решение, достаточно, чтобы для последовательности двойственных переменных* $(\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k) \in H \times \mathbb{R}^m_+$, $k = 1, 2, \ldots,$ *порождаемой итерационным процессом* (6.4) *с условиями согласования* (2.4), *выполнялись предельные соотношения* (6.5). *В этом случае последовательность* $u^{\delta^k}_{\max}[\overline{\lambda}^k, \overline{\mu}^k]$, $k = 1, 2, \ldots,$ *является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче* $(OC^0_{p,r})$ *и имеет место сходимость* $u^{\delta^k}_{\max}[\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k] \to u^0_{p,r}$, $k \to \infty$. *Одновременно является справедливым и предельное соотношение*

$$
V^0_{p,r}(\overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k) \equiv \inf_{u\in\mathcal{D}} L^\delta_{p,r}(u, \overline{\Lambda}^k, \overline{\mu}^k) \to \sup_{(\Lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+} V^0_{p,r}(\Lambda, \mu), \quad k \to \infty.
$$

Существенной особенностью регуляризованного итерационного ПМП теоремы 9, является то, что он, как и регуляризованный ПЛ теоремы 7, предполагает, что величина δ^k, характеризующая ошибку исходных данных, стремится к нулю при $k \to \infty$. Однако, как и теорема 7, теорема 9 снабжается соответствующим регуляризирующим правилом останова итерационного процесса, практически дословно совпадающим с правилом останова, сформулированным после теоремы 7 (см. теорему 8, в которой $u^\delta[\overline{\Lambda}^{k(\delta)}, \overline{\mu}^{k(\delta)}]$ следует заменить на $u^\delta_{\max}[\overline{\Lambda}^{k(\delta)}, \overline{\mu}^{k(\delta)}]$). Оно может быть использовано при практическом решении неустойчивых задач на основе устойчивого итерационного ПМП теоремы 9, так как является устойчивым алгоритмом построения минимизирующих приближенных решений в задаче $(OC^0_{p,r})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сумин М.И. Параметрическая двойственная регуляризация для задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 12. С. 2083–2102.
2. Сумин М.И. Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 9. С. 1594–1615.
3. Sumin M.I. On the stable sequential Kuhn–Tucker theorem and its applications // Applied Mathematics. 2012. Vol. 3. P. 1334–1350. DOI: 10.4236/am.2012.330190
4. Сумин М.И. Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 25–49.
5. Сумин М.И. Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 4. С. 602–625.
6. Сумин М.И. Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов: Учебное пособие. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2009. 289 с.
7. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
8. Сумин М.И. Субоптимальное управление системами с распределенными параметрами: минимизирующие последовательности, функция значений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1997. Т. 37. № 1. С. 23–41.
9. Loewen P.D. Optimal control via nonsmooth analysis. CRM Proceedings and Lecture Notes. Vol. 2. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. 153 p.
10. Васильев Ф.П. Методы оптимизации: В 2-х книгах. М.: МЦНМО, 2011. 620 с., 432 с.
11. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
12. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988. 264 с.
13. Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М.: ИЛ, 1962. 336 с.
14. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990. 488 с.

Поступила в редакцию 15.09.2016

Кутерин Фёдор Алексеевич, ассистент, кафедра математической физики и оптимального управления, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобаческого, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: kuterin.f@yandex.ru

Сумин Михаил Иосифович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математической физики и оптимального управления, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобаческого, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: m.sumin@mail.ru

F. A. Kuterin, M. I. Sumin

The regularized iterative Pontryagin maximum principle in optimal control. I. Optimization of a lumped system

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 474–489 (in Russian).

Keywords: optimal control, instability, iterative dual regularization, regularized iterative Lagrange principle, regularized iterative Pontryagin's maximum principle.

MSC2010: 47A52, 93C15

DOI: 10.20537/vm160403

The stable sequential Pontryagin maximum principle or, in other words, the regularized Pontryagin maximum principle in iterative form is formulated for the optimal control problem of a system of ordinary differential equations with pointwise phase equality constraint and a finite number of functional equality and inequality constraints. The main difference between it and the classical Pontryagin maximum principle is that, firstly, it is formulated in terms of minimizing sequences, secondly, the iterative process occurs in dual space and, thirdly, it is resistant to errors of raw data and gives a minimizing approximate solution in the sense of J. Warga. So it is a regularizing algorithm. The proof of the regularized Pontryagin maximum principle in iterative form is based on the methods of dual regularization and iterative dual regularization.

REFERENCES

1. Sumin M.I. Parametric dual regularization for an optimal control problem with pointwise state constraints, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2009, vol. 49, issue 12, pp. 1987–2005. DOI: 10.1134/S096554250912001X
2. Sumin M.I. Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, issue 9, pp. 1489–1509. DOI: 10.1134/S0965542511090156
3. Sumin M.I. On the stable sequential Kuhn–Tucker theorem and its applications, *Applied Mathematics*, 2012, vol. 3, pp. 1334–1350. DOI: 10.4236/am.2012.330190
4. Sumin M.I. Stable sequential convex programming in a Hilbert space and its application for solving unstable problems, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, issue 1, pp. 22–44. DOI: 10.1134/S0965542514010138
5. Sumin M.I. Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2007, vol. 47, issue 4, pp. 579–600. DOI: 10.1134/S0965542507040045
6. Sumin M.I. *Nekorrektnye zadachi i metody ikh resheniya. Materialy k lektsiyam dlya studentov starshikh kursov: Uchebnoe posobie* (Ill-posed problems and their solutions. Materials for lectures for senior students: Textbook), Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, 2009.
7. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, New York: Academic Press, 1972, 531 p. Translated under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami*, Moscow: Nauka, 1977, 624 p.
8. Sumin M.I. Suboptimal control of distributed-parameter systems: Minimizing sequences and the value function, *Comput. Math. Math. Phys.*, 1997, vol. 37, issue 1, pp. 21–39.
9. Loewen P.D. *Optimal control via nonsmooth analysis*, CRM Proceedings and Lecture Notes, vol. 2. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993.
10. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* (Optimization methods), vols. 1, 2, Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2011, 620 p., 432 p.
11. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal'noe upravlenie* (Optimal Control), Moscow: Nauka, 1979, 432 p.
12. Aubin J.-P. *L'analyse non lineaire et ses motivations economiques*, Paris–New York: Masson, 1984, 214 p. Translated under the title *Nelineinyi analiz i ego ekonomicheskie prilozheniya*, Moscow: Mir, 1988, 264 p.
13. Arrow K.J., Hurwicz L., Uzawa H. *Studies in linear and nonlinear programming*, Stanford: Staford University Press, 1958. Translated under the title *Issledovaniya po lineinomu i nelineinomu programmirovaniyu*, Moscow: Inostr. Lit., 1962, 336 p.
14. Minoux M. *Programation mathematique. Theorie et algorithmes*, Paris: Dunod, 1983, tome 1: 294 p., tome 2: 236 p. Translated under the title *Matematicheskoe programmirovanie. Teoriya i algoritmy*, Moscow: Nauka, 1990, 488 p.

Received 15.09.2016

Kuterin Fedor Alekseevich, Assistant Lecturer, Department of Mathematical Physics and Optimal Control, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: kuterin.f@yandex.ru

Sumin Mikhail Iosifovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Physics and Optimal Control, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: m.sumin@mail.ru