ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 4

УДК 517.929, 517.977

© *В. А. Зайцев, И. Г. Ким*

# ЗАДАЧА НАЗНАЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО СПЕКТРА В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ ПРИ ПОМОЩИ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ[1]

Рассматривается управляемая система, заданная линейной стационарной системой дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \quad y(t) = C^*x(t), \quad t > 0. \tag{1}$$

Управление в системе (1) строится в виде линейной обратной связи по выходу $u(t) = Q_0y(t)+Q_1y(t-h)$. Исследуется задача назначения конечного спектра для замкнутой системы: требуется построить коэффициенты $Q_0$, $Q_1$ обратной связи таким образом, чтобы характеристический квазиполином замкнутой системы обращался в полином с произвольными наперед заданными коэффициентами. Получены условия на коэффициенты системы (1), при которых найден критерий разрешимости данной задачи назначения конечного спектра. Полученные результаты распространяются на системы с несколькими запаздываниями. Получены следствия о стабилизации системы (1), а также системы вида (1) с несколькими запаздываниями, посредством линейной статической обратной связи по выходу с запаздыванием.

*Ключевые слова*: линейные системы с последействием, управление спектром, стабилизация, обратная связь по выходу.

DOI: 10.20537/vm160402

## Введение

Пусть $\mathbb{K}^n$ — линейное $n$-мерное пространство векторов-столбцов $x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{K}$, над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $M_{m,n}(\mathbb{K})$ — пространство $m \times n$-матриц с элементами из поля $\mathbb{K}$; $M_n(\mathbb{K}) := M_{n,n}(\mathbb{K})$; $I \in M_n(\mathbb{K})$ — единичная матрица; $T$ — операция транспонирования вектора или матрицы; $*$ — операция эрмитова сопряжения вектора или матрицы; $\operatorname{vec} : M_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^{mn}$ — отображение, которое «разворачивает» матрицу $H = \{h_{ij}\}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, по строкам в вектор-столбец $\operatorname{vec} H = \operatorname{col}(h_{11}, \ldots, h_{1n}, \ldots, h_{m1}, \ldots, h_{mn}) \in \mathbb{K}^{mn}$. Через $\chi(H; \lambda)$ будем обозначать характеристический многочлен матрицы $H \in M_n(\mathbb{K})$.

Рассмотрим линейную стационарную дифференциальную систему с запаздыванием по состоянию

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \quad t > 0, \tag{0.1}$$

с начальными условиями $x(\tau) = \varphi(\tau)$, $-h \leqslant \tau \leqslant 0$, где $A, A_1 \in M_n(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $h > 0$ — постоянное запаздывание, $\varphi : [-h, 0] \to \mathbb{K}^n$ — непрерывная функция, $x \in \mathbb{K}^n$ — вектор фазовых координат, $u \in \mathbb{K}^m$ — вектор управляющего воздействия.

Задачам стабилизации и управления спектром для систем вида (0.1) и для систем более общего вида (с несколькими запаздываниями, в том числе в управлении) при наличии полной информации о состоянии посвящено большое количество работ (см., например, работы [1–8] и литературу в них). Для решения таких задач используются различные типы регуляторов, в том числе с распределенным запаздыванием. В настоящей работе исследуется задача управления спектром при помощи обратной связи, построенной на основе неполной информации о состоянии системы.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–01–00346-а) и Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части (проект 2003).

### § 1. Система с одним запаздыванием

Рассмотрим линейную стационарную дифференциальную систему с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \quad t > 0, \tag{1.1}$$
$$y(t) = C^*x(t); \tag{1.2}$$

здесь $A, A_1 \in M_n(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n,k}(\mathbb{K})$, $h > 0$ — постоянное запаздывание, $x \in \mathbb{K}^n$ — фазовый вектор, $u \in \mathbb{K}^m$ — вектор управляющего воздействия, $y \in \mathbb{K}^k$ — вектор выходных величин.

Пусть управление в системе (1.1), (1.2) строится в виде линейной неполной обратной связи с запаздыванием

$$u(t) = Q_0y(t) + Q_1y(t-h), \quad t > 0. \tag{1.3}$$

Здесь $Q_0, Q_1 \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ — постоянные матрицы. Замкнутая система (1.1), (1.2), (1.3) принимает вид

$$\dot{x}(t) = (A + BQ_0C^*)x(t) + (A_1 + BQ_1C^*)x(t-h). \tag{1.4}$$

Обозначим через $\varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = \det\Big[\lambda I - \big((A + BQ_0C^*) + e^{-\lambda h}(A_1 + BQ_1C^*)\big)\Big]$ характеристический квазиполином замкнутой системы (1.4). Характеристическое уравнение $\varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = 0$ замкнутой системы (1.4) имеет вид

$$\lambda^n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i}\delta_{ij}\lambda^{n-i}\exp(-\lambda jh) = 0. \tag{1.5}$$

Здесь числа $\delta_{ij}$ зависят от коэффициентов $A, A_1, B, C$ системы (1.1), (1.2) и от коэффициентов $Q_0, Q_1$ обратной связи (1.3). Множество $\sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = 0\}$ корней характеристического уравнения называется спектром системы (1.4). Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то спектр $\sigma$ симметричен относительно вещественной оси. В общем случае спектр $\sigma$ системы с запаздыванием (1.4) состоит из счетного числа точек $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Если в уравнении (1.5) $\delta_{ij} = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, i$, то характеристический квазиполином обращается в полином и характеристическое уравнение имеет конечное число корней, то есть спектр $\sigma$ является конечным множеством. Рассмотрим следующую задачу.

**Задача 1.** Пусть задан произвольный многочлен $q(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$ степени $n$ с коэффициентами $\gamma_i \in \mathbb{K}$. Требуется построить матрицы $Q_0, Q_1 \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ обратной связи (1.3) так, чтобы характеристический квазиполином $\varphi(\lambda, e^{-\lambda h})$ замкнутой системы (1.4) удовлетворял равенству $\varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = q(\lambda)$.

Задача 1 называется *задачей назначения конечного спектра*. Данная задача исследовалась, в частности, в работах [9–15], в том числе для уравнений более общего типа, для различных типов регуляторов, имеющих вид линейной обратной связи *по состоянию* (т. е. когда $C = I$). В настоящей работе обратная связь строится *по выходу* в виде (1.3).

Пусть $A_1 = 0$ и $Q_1 = 0$, то есть система (1.4) не имеет запаздывания. Тогда задача 1 — это просто задача об управлении спектром (или, по-другому, о модальном управлении) системы без запаздывания с линейной обратной связью по выходу. Такая задача была решена в работах [16] (см. также [17, 18]), когда коэффициенты $A, B, C$ системы (1.1), (1.2) имеют следующий специальный вид: матрица $A$ имеет форму Хессенберга; первые $p-1$ строк матрицы $B$ и последние

$n-p$ строк матрицы $C$ равны нулю, то есть

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \ldots & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & \ldots & a_{n-1,n}\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \ldots & a_{nn}\end{Vmatrix},\qquad a_{i,i+1}\neq 0,\quad i=\overline{1,n-1}; \tag{1.6}$$

$$B=\begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \ldots & 0\\ b_{p1} & \ldots & b_{pm}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & \ldots & b_{nm}\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{p1} & \ldots & c_{pk}\\ 0 & \ldots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \ldots & 0\end{Vmatrix},\qquad p\in\{1,\ldots,n\}. \tag{1.7}$$

Для такой системы без запаздывания было доказано, что задача управления спектром разрешима тогда и только тогда, когда матрицы

$$C^*B,\quad C^*AB,\quad \ldots,\quad C^*A^{n-1}B \tag{1.8}$$

линейно независимы. В настоящей работе этот результат переносится на системы с запаздыванием. Будем предполагать, что матрица $A_1$ системы (1.1) также имеет специальный вид: первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матрицы $A_1$ равны нулю, то есть

$$A_1=\begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\ a^1_{p1} & \ldots & a^1_{pp} & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a^1_{n1} & \ldots & a^1_{np} & 0 & \ldots & 0\end{Vmatrix}. \tag{1.9}$$

Здесь число $p$ то же самое, что и в (1.7).

**Теорема 1.** *Пусть матрицы $A$, $B$, $C$, $A_1$ системы (1.1), (1.2) имеют специальный вид (1.6), (1.7), (1.9). Тогда равносильны следующие утверждения.*

1. *Матрицы (1.8) линейно независимы.*
2. *Задача 1 назначения конечного спектра системы (1.1), (1.2) посредством регулятора (1.3) разрешима.*

Докажем предварительно вспомогательное утверждение, аналогичное лемме 3 [17]. Пусть $\chi(A;\lambda)=\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\ldots+\alpha_n$. Положим $\alpha_0:=1$. Построим по матрице $A$ матрицы

$$F_\nu=\alpha_0A^\nu+\alpha_1A^{\nu-1}+\ldots+\alpha_\nu I,\quad \nu=\overline{0,n-1}. \tag{1.10}$$

**Лемма 1.** *Пусть матрица $A$ имеет вид (1.6), а матрица $D\in M_n(\mathbb{K})$ имеет следующий вид:*

$$D=\begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\ d_{p1} & \ldots & d_{pp} & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ d_{n1} & \ldots & d_{np} & 0 & \ldots & 0\end{Vmatrix},\quad p\in\{1,\ldots,n\}. \tag{1.11}$$

*Пусть $\chi(A+D;\lambda)=\lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_n$. Тогда $\gamma_i=\alpha_i-\mathrm{Sp}(DF_{i-1})$ для всех $i=1,\ldots,n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычеркнем из матрицы $A$ последнюю строку и припишем сверху строку $e_1^*$. Обозначим полученную матрицу через $S_1$. Тогда в силу (1.6) матрица $S_1$ нижняя треугольная и невырожденная. Далее для каждого $i = 2, \ldots, n-1$ по матрице $S_{i-1}$ построим матрицу $S_i$ следующим образом: вычеркиваем в матрице $S_{i-1}$ последнюю строку и последний столбец и приписываем к полученной матрице из $M_{n-1}(\mathbb{K})$ слева первый столбец $e_1 \in \mathbb{R}^n$ и сверху первую строку $e_1^* \in \mathbb{R}^{n*}$, полученную матрицу обозначаем $S_i \in M_n(\mathbb{K})$ (то есть левый верхний угловой элемент в матрице $S_i$ равен 1, остальные элементы первой строки и первого столбца матрицы $S_i$ равны 0). Тогда в силу построения матрицы $S_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, нижние треугольные и невырожденные. Положим $S = S_{n-1} \cdot \ldots \cdot S_1$. Тогда $S$ также нижняя треугольная и невырожденная, а значит, и $S^{-1}$ нижняя треугольная и невырожденная. Построим матрицы

$$\widetilde{A} = SAS^{-1}, \quad \widetilde{D} = SDS^{-1}. \tag{1.12}$$

Тогда

$$\chi(\widetilde{A}, \lambda) = \chi(A, \lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n. \tag{1.13}$$

Из [16, лемма 3] следует, что матрица $\widetilde{A}$ имеет форму Фробениуса: ее наддиагональ состоит из единиц, в последней строке содержатся некоторые числа (а именно, числа $-\alpha_{n+1-i}$, в силу равенства (1.13)), остальные элементы равны нулю, то есть

$$\widetilde{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \ldots & -\alpha_1 \end{Vmatrix}. \tag{1.14}$$

Построим, аналогично (1.10), по матрице $\widetilde{A}$ матрицы

$$\widetilde{F}_\nu = \alpha_0 \widetilde{A}^\nu + \alpha_1 \widetilde{A}^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu I, \quad \nu = \overline{0, n-1}. \tag{1.15}$$

Далее, в силу структуры матрицы $D$ и того, что $S$, $S^{-1}$ нижние треугольные, матрица $\widetilde{D}$ имеет вид (1.11). Применим лемму 3 [17]. Матрицы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{D}$ имеют вид, предписанный в лемме 3 [17]. Пусть $\chi(\widetilde{A} + \widetilde{D}; \lambda) = \lambda^n + \widetilde{\gamma}_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \widetilde{\gamma}_n$. Тогда в силу леммы 3 [17] имеют место равенства

$$\widetilde{\gamma}_i = \alpha_i - \mathrm{Sp}\,(\widetilde{D}\widetilde{F}_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.16}$$

Из равенств (1.12) следует, что $\widetilde{A} + \widetilde{D} = S(A+D)S^{-1}$, то есть матрицы $\widetilde{A} + \widetilde{D}$ и $A + D$ подобны. Значит их характеристические многочлены совпадают. Поэтому

$$\gamma_i = \widetilde{\gamma}_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.17}$$

Далее, из равенств (1.15), (1.12) и (1.10) следует, что $\widetilde{F}_\nu = SF_\nu S^{-1}$ для всех $\nu = \overline{0, n-1}$. Отсюда и из (1.12) следует, что для всякого $i = 1, \ldots, n$ имеют место равенства

$$\mathrm{Sp}(\widetilde{D}\widetilde{F}_{i-1}) = \mathrm{Sp}(SDS^{-1} \cdot SF_{i-1}S^{-1}) = \mathrm{Sp}(SDF_{i-1}S^{-1}) = \mathrm{Sp}(S^{-1}SDF_{i-1}) = \mathrm{Sp}(DF_{i-1}). \tag{1.18}$$

Теперь из равенств (1.17), (1.16), (1.18) вытекает требуемое утверждение. □

**Замечание 1.** Лемма 1 обобщает лемму 3 [17]. Лемма 3 [17] является частным случаем леммы 1, когда матрица $A$ имеет форму Фробениуса (1.14).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Предположим, что матрицы $A$, $B$, $C$, $A_1$ системы (1.1), (1.2) имеют специальный вид (1.6), (1.7), (1.9). Рассмотрим задачу 1. Пусть задан многочлен

$$q(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n, \tag{1.19}$$

$\gamma_i \in \mathbb{K}$. Требуется построить $Q_0, Q_1 \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ так, чтобы характеристический квазиполином $\varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = \det\Big[\lambda I - \big((A+BQ_0C^*)+e^{-\lambda h}(A_1+BQ_1C^*)\big)\Big]$ замкнутой системы (1.4) удовлетворял равенству

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = q(\lambda). \tag{1.20}$$

Обозначим

$$D = BQ_0C^* + e^{-\lambda h}(A_1 + BQ_1C^*). \tag{1.21}$$

Имеем

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = \det\big(\lambda I - (A+D)\big) = \chi(A+D;\lambda). \tag{1.22}$$

Из условий (1.7), (1.9) следует, что матрица (1.21) имеет вид (1.11). Учитывая равенства (1.22), (1.20), (1.19), условие (1.6) и применяя лемму 1, получаем, что задача 1 разрешима тогда и только тогда, когда найдутся такие матрицы $Q_0$, $Q_1$, что

$$\gamma_i = \alpha_i - \mathrm{Sp}\,(BQ_0C^*F_{i-1}) - e^{-\lambda h}\mathrm{Sp}\Big((A_1 + BQ_1C^*)F_{i-1}\Big), \quad i = 1,\ldots,n. \tag{1.23}$$

Равенства (1.23) имеют место тогда и только тогда, когда

$$\gamma_i = \alpha_i - \mathrm{Sp}\,(BQ_0C^*F_{i-1}), \quad \mathrm{Sp}\,\Big((A_1 + BQ_1C^*)F_{i-1}\Big) = 0, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{1.24}$$

Имеем

$$\mathrm{Sp}\,(BQ_jC^*F_{i-1}) = \mathrm{Sp}\,(Q_jC^*F_{i-1}B) = \sum_{r=0}^{i-1}\alpha_{i-1-r}\mathrm{Sp}\,(Q_jC^*A^rB), \quad j = 0,1, \quad i = \overline{1,n}.$$

Поэтому равенства (1.24) равносильны двум системам линейных уравнений

$$\gamma_i = \alpha_i - \sum_{r=0}^{i-1}\alpha_{i-1-r}\mathrm{Sp}\,(Q_0C^*A^rB), \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.25}$$

$$\mathrm{Sp}\,(A_1F_{i-1}) = -\sum_{r=0}^{i-1}\alpha_{i-1-r}\mathrm{Sp}\,(Q_1C^*A^rB), \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.26}$$

с $mk$ неизвестными элементами матрицы $Q_0$ и с $mk$ неизвестными элементами матрицы $Q_1$. Перепишем системы (1.25), (1.26) в векторном виде. Для этого воспользуемся очевидным равенством $\mathrm{Sp}\,(XY) = (\mathrm{vec}\,Y)^T \cdot (\mathrm{vec}\,X^T)$. Применим это равенство к матрицам $Y = C^*A^rB$, $r = \overline{0, n-1}$, $X = Q_j$, $j = 0, 1$. Построим матрицы (см. [17])

$$P := [\mathrm{vec}\,(C^*B), \mathrm{vec}\,(C^*AB), \ldots, \mathrm{vec}\,(C^*A^{n-1}B)] \in M_{mk,n}(\mathbb{K}), \tag{1.27}$$

$$G := \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \ldots & 1 \end{Vmatrix}. \tag{1.28}$$

Обозначим

$$v_0 := \mathrm{vec}\,(Q_0^T) \in \mathbb{K}^{mk}, \quad w_0 := \mathrm{col}\,(\alpha_1 - \gamma_1, \ldots, \alpha_n - \gamma_n) \in \mathbb{K}^n,$$
$$v_1 := \mathrm{vec}\,(Q_1^T) \in \mathbb{K}^{mk}, \quad w_1 := \mathrm{col}\,(-\mathrm{Sp}(A_1F_0), \ldots, -\mathrm{Sp}\,(A_1F_{n-1})) \in \mathbb{K}^n.$$

Тогда системы (1.25), (1.26) можно записать в векторном виде $GP^Tv_0 = w_0$, $GP^Tv_1 = w_1$, или, что равносильно, в матричном виде

$$GP^TV = W, \tag{1.29}$$

где $V = [v_0, v_1] \in M_{mk,2}(\mathbb{K})$, $W = [w_0, w_1] \in M_{n,2}(\mathbb{K})$.

Пусть матрицы (1.8) линейно независимы. Тогда $\operatorname{rank} P = n$ и система (1.29) разрешима относительно $V$ для любого набора $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. В частности, система (1.29) имеет решение $v_j = P(P^TP)^{-1}G^{-1}w_j$, $j = 0, 1$. Следовательно задача 1 разрешима. Искомые матрицы $Q_j$ находятся из равенств $Q_j = (\operatorname{vec}^{-1} v_j)^T$, $j = 0, 1$.

Если матрицы (1.8) линейно зависимы, то $\operatorname{rank} P < n$ и для $\gamma_i$ таких, что $w_0 \notin \operatorname{Im}(GP^T)$, система (1.25) неразрешима. Следовательно задача 1 неразрешима. Теорема 1 доказана. □

**Замечание 2.** Может оказаться, что система (1.26) является разрешимой, даже если матрицы (1.8) линейно зависимы. Это будет означать возможность обеспечить системе *конечный* спектр. Тем не менее обеспечить *произвольный конечный* спектр в данном случае невозможно.

Рассмотрим задачу стабилизации системы (1.1), (1.2) посредством обратной связи (1.3): требуется построить $Q_0$, $Q_1$ так, чтобы замкнутая система была асимптотически устойчивой. Система (1.4) является асимптотически устойчивой, если спектр $\sigma$ системы (1.4) лежит в левой полуплоскости $\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. Если задача 1 разрешима, то выбирая многочлен (1.19) так, что его корни лежат в области $\omega$, можно добиться асимптотической устойчивости замкнутой системы. Таким образом, из теоремы 1 вытекает очевидное следствие.

**Следствие 1.** *Пусть матрицы $A$, $B$, $C$, $A_1$ имеют специальный вид* (1.6), (1.7), (1.9) *и матрицы* (1.8) *линейно независимы. Тогда система* (1.1), (1.2) *стабилизируема посредством обратной связи* (1.3).

## § 2. Система с несколькими запаздываниями

Рассмотрим линейную стационарную дифференциальную систему с несколькими запаздываниями

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^{s} A_j x(t - h_j) + Bu(t), \quad t > 0, \tag{2.1}$$

$$y(t) = C^* x(t); \tag{2.2}$$

здесь $A, A_j \in M_n(\mathbb{K})$, $j = \overline{1, s}$, $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n,k}(\mathbb{K})$, $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_s$ — постоянные запаздывания, $x \in \mathbb{K}^n$ — фазовый вектор, $u \in \mathbb{K}^m$ — вектор управления, $y \in \mathbb{K}^k$ — вектор выходных величин.

Пусть управление в системе (2.1), (2.2) строится в виде линейной неполной обратной связи с запаздыванием

$$u(t) = \sum_{j=0}^{s} Q_j y(t - h_j), \qquad t > 0. \tag{2.3}$$

Здесь $Q_j \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $j = 0, \ldots, s$, — постоянные матрицы. Замкнутая система (2.1), (2.2), (2.3) принимает вид

$$\dot{x}(t) = (A + BQ_0C^*)x(t) + \sum_{j=1}^{s} (A_j + BQ_jC^*)x(t - h_j). \tag{2.4}$$

Рассмотрим следующую задачу.

**Задача 2.** Пусть задан произвольный многочлен $q(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$ степени $n$ с коэффициентами $\gamma_i \in \mathbb{K}$. Требуется построить матрицы $Q_0, \ldots, Q_s \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ обратной связи (2.3) так, чтобы характеристический квазиполином замкнутой системы (2.4) совпадал с полиномом $q(\lambda)$.

Пусть коэффициенты $A, B, C$ системы (2.1), (2.2) имеют специальный вид (1.6), (1.7). Будем предполагать, что матрицы $A_j$, $j = 1, \ldots, s$, системы (2.1) также имеет специальный вид: первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матрицы $A_j$ равны нулю, то есть

$$A_j = \begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a^j_{p1} & \ldots & a^j_{pp} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^j_{n1} & \ldots & a^j_{np} & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}. \tag{2.5}$$

Здесь число $p$ то же, что и в (1.7).

**Теорема 2.** *Пусть матрицы $A$, $B$, $C$, $A_j$, $j = 1, \ldots, s$, системы (2.1), (2.2) имеют специальный вид (1.6), (1.7), (2.5). Тогда равносильны следующие утверждения.*

1. *Матрицы (1.8) линейно независимы.*

2. *Задача 2 назначения конечного спектра системы (2.1), (2.2) посредством регулятора (2.3) разрешима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что матрицы $A$, $B$, $C$, $A_j$, $j = 1, \ldots, s$ системы (2.1), (2.2) имеют специальный вид (1.6), (1.7), (2.5). Пусть задан многочлен (1.19). Требуется построить $Q_0, \ldots, Q_s$ так, чтобы характеристический квазиполином $\psi(\lambda, e^{-\lambda}) = \det\Big[\lambda I - \big((A+$ $+ BQ_0C^*) + \sum\limits_{j=1}^{s} e^{-\lambda h_j}(A_j + BQ_jC^*)\big)\Big]$ замкнутой системы (2.4) удовлетворял равенству

$$\psi(\lambda, e^{-\lambda}) = q(\lambda). \tag{2.6}$$

Обозначим

$$D = BQ_0C^* + \sum_{j=1}^{s} e^{-\lambda h_j}(A_j + BQ_jC^*). \tag{2.7}$$

Имеем

$$\psi(\lambda, e^{-\lambda}) = \det\big(\lambda I - (A + D)\big) = \chi(A + D; \lambda). \tag{2.8}$$

Из условий (1.7), (2.5) следует, что матрица (2.7) имеет вид (1.11). Учитывая равенства (2.8), (2.6), (1.19), условие (1.6) и применяя лемму 1, получаем, что задача 2 разрешима тогда и только тогда, когда найдутся такие матрицы $Q_0, \ldots, Q_s$, что

$$\gamma_i = \alpha_i - \mathrm{Sp}\,(BQ_0C^*F_{i-1}) - \sum_{j=1}^{s} e^{-\lambda h_j}\mathrm{Sp}\,\Big((A_j + BQ_jC^*)F_{i-1}\Big), \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.9}$$

Равенства (2.9) имеют место тогда и только тогда, когда

$$\gamma_i = \alpha_i - \mathrm{Sp}\,(BQ_0C^*F_{i-1}), \quad \mathrm{Sp}\,\Big((A_j + BQ_jC^*)F_{i-1}\Big) = 0, \quad j = \overline{1, s}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.10}$$

Равенства (2.10) равносильны $(1 + s)$ системам линейных уравнений

$$\gamma_i = \alpha_i - \sum_{r=0}^{i-1} \alpha_{i-1-r}\mathrm{Sp}\,(Q_0C^*A^rB), \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.11}$$

$$\mathrm{Sp}\,(A_jF_{i-1}) = -\sum_{r=0}^{i-1} \alpha_{i-1-r}\mathrm{Sp}\,(Q_jC^*A^rB), \quad j = \overline{1, s}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.12}$$

относительно элементов матриц $Q_0, \dots, Q_s$ Повторяя рассуждения доказательства теоремы 1, получаем, что системы (2.11), (2.12) равносильны матричной системе

$$GP^TV = W. \tag{2.13}$$

Здесь матрицы $G$ и $P$ определены равенствами (1.28) и (1.27) соответственно,

$$\begin{aligned}
&v_0 := \operatorname{vec}(Q_0^T) \in \mathbb{K}^{mk}, && w_0 := \operatorname{col}(\alpha_1 - \gamma_1, \dots, \alpha_n - \gamma_n) \in \mathbb{K}^n,\\
&v_j := \operatorname{vec}(Q_j^T) \in \mathbb{K}^{mk}, && w_j := \operatorname{col}(-\operatorname{Sp}(A_jF_0), \dots, -\operatorname{Sp}(A_jF_{n-1})) \in \mathbb{K}^n, \quad j = \overline{1, s},\\
&V := [v_0, v_1, \dots, v_s] \in M_{mk,1+s}(\mathbb{K}), && W := [w_0, w_1, \dots, w_s] \in M_{n,1+s}(\mathbb{K}).
\end{aligned}$$

Пусть матрицы (1.8) линейно независимы. Тогда $\operatorname{rank} P = n$ и система (2.13) разрешима относительно $V$ для любого набора $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. В частности, система (2.13) имеет решение $v_j = P(P^TP)^{-1}G^{-1}w_j$, $j = 0, \dots, s$. Следовательно задача 2 разрешима. Искомые матрицы $Q_j$ находятся из равенств $Q_j = (\operatorname{vec}^{-1} v_j)^T$, $j = 0, \dots, s$.

Если матрицы (1.8) линейно зависимы, то $\operatorname{rank} P < n$ и для $\gamma_i$ таких, что $w_0 \notin \operatorname{Im}(GP^T)$, система (2.11) неразрешима. Следовательно задача 2 неразрешима. Теорема 2 доказана. $\square$

**Следствие 2.** *Пусть матрицы $A$, $B$, $C$, $A_j$, $j = 1, \dots, s$, системы* (2.1), (2.2) *имеют специальный вид* (1.6), (1.7), (2.5). *Тогда система* (2.1), (2.2) *стабилизируема посредством обратной связи* (2.3).

**Пример 1.** Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение теоремы 2. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $n = 4$, $m = 2$, $k = 2$, $s = 2$ и коэффициенты системы (2.1), (2.2) имеют следующий вид:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & i\\ 0 & -i\\ 0 & 0\\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Коэффициенты системы удовлетворяют условиям теоремы 2, т. е. имеют специальный вид (1.6), (1.7), (2.5). Имеем $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = 1$. Построим матрицы (1.8):

$$C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0\\ i & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 1 & 0\\ 0 & i \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 1 & 1\\ -i & -2i \end{Vmatrix}, \quad C^*A^3B = \begin{Vmatrix} 0 & -1\\ 0 & -i \end{Vmatrix}. \tag{2.14}$$

Построим матрицы (1.27), (1.28):

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ i & 0 & -i & 0\\ 0 & i & -2i & -i \end{Vmatrix}, \qquad G = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Имеем $\det P = 4$. Значит $\operatorname{rank} P = 4 = n$, следовательно матрицы (2.14) линейно независимы. Таким образом, по теореме 2 задача 2 назначения конечного спектра (и задача стабилизации) посредством регулятора (2.3) для данной системы разрешима. Построим такой регулятор. Пусть, к примеру, $q(\lambda) = (\lambda+1)^4 = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1$. Тогда $\gamma_1 = 4$, $\gamma_2 = 6$, $\gamma_3 = 4$, $\gamma_4 = 1$. Вычислим матрицы $F_0, F_1, F_2, F_3$ по формуле (1.10), получим: $F_0 = I$,

$$F_1 = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad F_2 = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad F_3 = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Далее, вычисляем

$$\begin{gathered}\operatorname{Sp}(A_1F_0)=0,\quad \operatorname{Sp}(A_1F_1)=2,\quad \operatorname{Sp}(A_1F_2)=-1,\quad \operatorname{Sp}(A_1F_3)=2,\\ \operatorname{Sp}(A_2F_0)=-1,\quad \operatorname{Sp}(A_2F_1)=1,\quad \operatorname{Sp}(A_2F_2)=-1,\quad \operatorname{Sp}(A_2F_3)=0.\end{gathered}$$

Имеем $w_0=\operatorname{col}(-5,-5,-5,0)$, $w_1=\operatorname{col}(0,-2,1,-2)$, $w_2=\operatorname{col}(1,-1,1,0)$. Вычисляя $v_j$ по формулам $v_j=P(P^TP)^{-1}G^{-1}w_j$, $j=0,1,2$, получаем

$$v_0=\operatorname{col}(-25/2,5/2,5i,-5i/2),\quad v_1=\operatorname{col}(-2,1,0,0),\quad v_2=\operatorname{col}(1/2,-1/2,-i,i/2).$$

Отсюда находим

$$Q_0=\begin{Vmatrix}-25/2 & 5i\\ 5/2 & -5i/2\end{Vmatrix},\quad Q_1=\begin{Vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 0\end{Vmatrix},\quad Q_2=\begin{Vmatrix}1/2 & -i\\ -1/2 & i/2\end{Vmatrix}. \tag{2.15}$$

Система (2.1), (2.2), замкнутая управлением (2.3) с матрицами (2.15) принимает вид

$$\dot x(t)=\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\-15/2&-5&1&0\\-15/2&-5/2&0&1\\-1&-3/2&-1&1\end{Vmatrix}x(t)+\begin{Vmatrix}0&0&0&0\\-1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&1&0&0\end{Vmatrix}x(t-h_1)+\begin{Vmatrix}0&0&0&0\\-1/2&0&0&0\\1/2&1/2&0&0\\1&-1/2&0&0\end{Vmatrix}x(t-h_2). \tag{2.16}$$

Вычисляя характеристический квазиполином $\psi(\lambda,e^{\lambda})$ замкнутой системы (2.16), получаем, что $\psi(\lambda,e^{\lambda})=(\lambda+1)^4$. В частности, система (2.16) асимптотически устойчива. □

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
2. Осипов Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 605–618.
3. Булатов В.И., Калюжная Т.С., Наумович Р.Ф. Управление спектром дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10. № 11. С. 1946–1952.
4. Асмыкович И.К., Марченко В.М. Управление спектром систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1976. Вып. 7. С. 5–14.
5. Габелая А.Г., Иваненко В.И., Одарич О.Н. Стабилизируемость линейных автономных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1976. Вып. 8. С. 12–16.
6. Асмыкович И.К., Марченко В.М. Модальное управление многовходными линейными системами с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1980. Вып. 1. С. 5–10.
7. Марченко В.М. Модальное управление в системах с последействием // Автоматика и телемеханика. 1988. Вып. 11. С. 73–84.
8. Хартовский В.Е., Павловская А.Т. К проблеме модального управления линейными системами нейтрального типа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 146–155. DOI: 10.20537/vm130414
9. Manitius A.Z., Olbrot A.W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Transactions on Automatic Control. 1979. Vol. 24. Issue 4. P. 541–553. DOI: 10.1109/TAC.1979.1102124
10. Mondie S., Michiels W. Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. Vol. 48. Issue 12. P. 2207–2212. DOI: 10.1109/TAC.2003.820147
11. Metel'skii A.V. Complete damping of a linear autonomous differential-difference system by a controller of the same type // Differential Equations. 2012. Vol. 48. Issue 9. P. 1219–1235. DOI: 10.1134/S0012266112090030
12. Metel'skii A.V. Finite spectrum assignment problem for a delay type system // Differential Equations. 2014. Vol. 50. Issue 5. P. 689–699. DOI: 10.1134/S0012266114050115
13. Metel'skii A.V. Finite spectrum assignment problem for a differential system of neutral type // Differential Equations. 2015. Vol. 51. Issue 1. P. 69–82. DOI: 10.1134/S0012266115010073

14. Metel'skii A.V. Feedback control of the spectrum of differential-difference system // Automation and Remote Control. 2015. Vol. 76. Issue 4. P. 560–572. DOI: 10.1134/S0005117915040025
15. Metel'skii A.V. Finite spectrum assignment and complete damping of a differential system of the neutral type by a single controller // Differential Equations. 2016. Vol. 52. Issue 1. P. 92–110. DOI: 10.1134/S0012266116010080
16. Zaitsev V.A. Spectrum control in linear systems with incomplete feedback // Differential Equations. 2009. Vol. 45. Issue 9. P. 1348–1357. DOI: 10.1134/S0012266109090109
17. Zaitsev V.A. Necessary and sufficient conditions in a spectrum control problem // Differential Equations. 2010. Vol. 46. Issue 12. P. 1789–1793. DOI: 10.1134/S0012266110120128
18. Zaitsev V.A. Consistent systems and pole assignment: I // Differential Equations. 2012. Vol. 48. Issue 1. P. 120–135. DOI: 10.1134/S001226611110120

Поступила в редакцию 01.10.2016

Зайцев Василий Александрович, д. ф.-м. н., доцент, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: verba@udm.ru

Ким Инна Геральдовна, старший преподаватель, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: kimingeral@gmail.com

***V. A. Zaitsev, I. G. Kim***

**Finite spectrum assignment problem in linear systems with state delay by static output feedback**

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 463–473 (in Russian).

*Keywords*: linear delay systems, spectrum assignment, stabilization, output feedback.

MSC2010: 93B60, 93B55, 93B52, 93D20, 93C15, 93C05, 34H15

DOI: 10.20537/vm160402

We consider a control system defined by a linear time-invariant system of differential equations with delay

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \quad y(t) = C^*x(t), \quad t > 0. \tag{1}$$

We construct the controller for the system (1) as linear output feedback $u(t) = Q_0y(t) + Q_1y(t-h)$. We study a finite spectrum assignment problem for the closed-loop system. One needs to construct gain matrices $Q_0$, $Q_1$ such that the characteristic quasipolynomial of the closed-loop system becomes a polynomial with arbitrary preassigned coefficients. We obtain conditions on coefficients of the system (1) under which the criterion was found for solvability of the finite spectrum assignment problem. The obtained result extends to systems with several delays. Corollaries on stabilization by linear static output feedback with delay are obtained for system (1) as well as for systems of type (1) with several delays.

## REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Osipov Yu.S. On the stabilization of motions of a plant with delay in a control system, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekh. Kibern.*, 1963, no. 6, pp. 3–15 (in Russian).
2. Osipov Yu.S. Stabilization of control systems with delays, *Differ. Uravn.*, 1965, vol. 1, no. 5, pp. 605–618 (in Russian).
3. Bulatov V.I., Kalyuzhnaya T.S., Naumovich R.F. Control over spectrum of differential equations, *Differ. Uravn.*, 1974, vol. 10, no. 11, pp. 1946–1952 (in Russian).
4. Asmykovich I.K., Marchenko, V.M. Spectrum control in systems with delay, *Automation and Remote Control*, 1976, vol. 37, no. 7, pp. 975–984.

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 4

5. Gabelaya A.G., Ivanenko V.I., Odarich O.N. Stabilizability of autonomous linear systems with a delay, *Automation and Remote Control*, 1976, vol. 37, no. 8, pp. 1145–1150.
6. Asmykovich I.K., Marchenko V.M. Modal control of multiinput linear delayed systems, *Automation and Remote Control*, 1980, vol. 41, no. 1, pp. 1–5.
7. Marchenko V.M. Modal control in systems with delay, *Automation and Remote Control*, 1988, vol. 49, no. 11, pp. 1449–1457.
8. Khartovskii V.E., Pavlovskaya A.T. To the problem of modal control for linear systems of neutral type, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 4, pp. 146–155. DOI: 10.20537/vm130414
9. Manitius A.Z., Olbrot A.W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, vol. 24, issue 4, pp. 541–553. DOI: 10.1109/TAC.1979.1102124
10. Mondie S., Michiels W. Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, vol. 48, issue 12, pp. 2207–2212. DOI: 10.1109/TAC.2003.820147
11. Metel'skii A.V. Complete damping of a linear autonomous differential-difference system by a controller of the same type, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, issue 9, pp. 1219–1235. DOI: 10.1134/S0012266112090030
12. Metel'skii A.V. Finite spectrum assignment problem for a delay type system, *Differential Equations*, 2014, vol. 50, issue 5, pp. 689–699. DOI: 10.1134/S0012266114050115
13. Metel'skii A.V. Finite spectrum assignment problem for a differential system of neutral type, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, issue 1, pp. 69–82. DOI: 10.1134/S0012266115010073
14. Metel'skii A.V. Feedback control of the spectrum of differential-difference system, *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, issue 4, pp. 560–572. DOI: 10.1134/S0005117915040025
15. Metel'skii A.V. Finite spectrum assignment and complete damping of a differential system of the neutral type by a single controller, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, issue 1, pp. 92–110. DOI: 10.1134/S0012266116010080
16. Zaitsev V.A. Spectrum control in linear systems with incomplete feedback, *Differential Equations*, 2009, vol. 45, issue 9, pp. 1348–1357. DOI: 10.1134/S0012266109090109
17. Zaitsev V.A. Necessary and sufficient conditions in a spectrum control problem, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, issue 12, pp. 1789–1793. DOI: 10.1134/S0012266110120128
18. Zaitsev V.A. Consistent systems and pole assignment: I, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, issue 1, pp. 120–135. DOI: 10.1134/S001226611110120

Received 01.10.2016

Zaitsev Vasilii Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: verba@udm.ru

Kim Inna Geral'dovna, Senior Lecturer, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: kimingeral@gmail.com