

УДК 531.31, 531.45

© *Е. Н. Пивоварова, А. В. Клековкин***ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ НА УПРАВЛЯЕМОЕ ДВИЖЕНИЕ РОБОТА-КОЛЕСА ¹**

Работа посвящена экспериментальному исследованию влияния трения качения на динамику робота-колеса. Робот приводится в движение за счет изменения собственного гиростатического момента с помощью управляемого вращения установленного на нем ротора. Задача рассматривается в предположении, что центр масс системы не совпадает с ее геометрическим центром. В работе получены уравнения, описывающие динамику рассматриваемой системы, и приведен пример управляемого движения колеса при задании постоянного углового ускорения ротора. Приведено описание конструкции робота-колеса и предложена методика экспериментального определения коэффициента трения качения. Для проверки предложенной математической модели проведены экспериментальные исследования управляемого движения робота-колеса. В работе показано, что теоретические и экспериментальные результаты качественно совпадают, но имеют количественное отличие.

Ключевые слова: робот-колесо, трение качения, смещение центра масс.

Введение

В настоящее время большое количество исследований посвящено изучению динамики и управления мобильных робототехнических систем [1–9]. В большинстве работ рассматривается неголономная постановка задачи, то есть отсутствие проскальзывания в точке контакта, без влияния других видов трения, таких как трение качения. Однако, как показывают экспериментальные исследования, проведенные для различных моделей сферороботов (см., например, [2, 8]), существенное влияние на динамику и управляемость системы оказывает именно трение качения, которое, как правило, присутствует в реальных системах.

Влияние трения качения на динамику системы исследуется уже на протяжении почти двух столетий [10–17]. В [16] автор анализирует влияние трения качения на динамику абсолютно жесткого катка по релаксирующему и упруговязкому грунту. В работе показана зависимость величины коэффициента трения качения от скорости движения катка. Работа [17] посвящена исследованию движения твердого цилиндра по вязкоупругой плоскости. Авторы полагают, что помимо силы трения качения при взаимодействии катящегося тела с поверхностью возникают силы сухого трения.

В данной работе мы исследуем влияние трения качения на динамику системы на примере одной из классических задач неголономной механики — качения диска (колеса) со смещенным центром масс по горизонтальной шероховатой плоскости. Данная система приводится в движение за счет гироскопического момента, создаваемого установленным в центре колеса ротором. В работе описывается методика экспериментального определения коэффициента трения качения и сравниваются результаты теоретических расчетов с экспериментально полученными данными.

§ 1. Уравнения движения

Рассмотрим качение без проскальзывания робота-колеса вдоль прямой по горизонтальной плоскости под действием сил трения качения. Робот-колесо представляет собой систему, состоящую из двух дисков, соединенных по центру, и установленного между ними ротора (массивного

¹Работа Е. Н. Пивоваровой (§§ 1, 2) выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15–08–09261-а). Работа А. В. Клековкина (§§ 3, 4) поддержана грантом РНФ (проект № 14–19–01303).

тела цилиндрической формы) (рис. 1). Ротор закреплен в геометрическом центре системы соосно с дисками и, вращаясь, создает гиростатический момент, приводящий систему в движение.

Будем предполагать, что центр масс системы не совпадает с ее геометрическим центром и находится на расстоянии c от него. Таким образом, сфероробот приводится в движение за счет гиростатического момента, создаваемого вращающимся ротором, а также за счет неуравновешенности конструкции. Кроме того, будем предполагать, что на систему действует сила трения качения, возникающая вследствие деформации опорной поверхности под действием тяжести колеса. В этом случае мы имеем уже не точку, а площадку контакта. Площадку будем моделировать таким образом, что результирующая сила реакции (с горизонтальной составляющей \mathbf{F} и вертикальной составляющей \mathbf{N}) приложена в точке P' , которая сдвинута относительно центра колеса по направлению его движения на величину, равную коэффициенту трения качения λ (см. рис. 1).

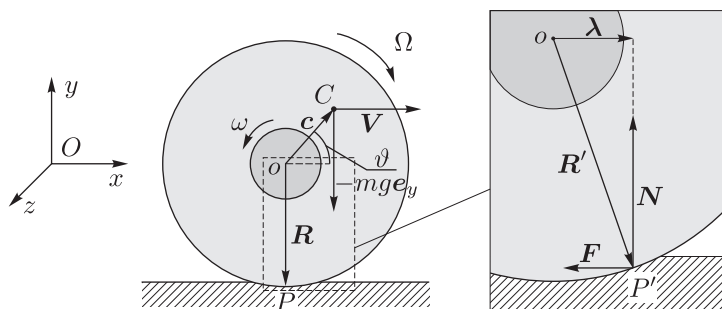


Рис. 1. Схематическая модель робота-колеса

Для описания движения системы выберем неподвижную систему координат $Oxyz$ с ортами \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z . Обозначим через C центр масс робота-колеса, через o — его геометрический центр, \mathbf{c} — вектор длины c , проведенный из точки o в точку C . Так как колесо может двигаться только в одной плоскости, то есть не может вращаться вокруг вертикальной оси, далее будем полагать, что качение колеса происходит в плоскости Oxy .

Положение системы будем задавать координатами центра колеса $\mathbf{r}_o = (x_o, 0, 0)$ и углом ϑ между осью Ox и вектором \mathbf{c} , определяющим положение центра масс системы относительно оси Ox . Таким образом, конфигурационное пространство рассматриваемой системы представляет собой произведение $\mathcal{N} = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{C}$.

Кинетическая энергия системы может быть записана в виде

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2,$$

где m , I — масса и момент инерции робота относительно оси, проходящей через его центр масс; $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ и $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ — векторы скорости центра масс и угловой скорости робота соответственно. Угловая скорость колеса Ω связана с углом ϑ соотношением $\Omega = \dot{\vartheta}$.

Изменение углового момента относительно центра масс C и импульса системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\Omega}} \right) &= I\dot{\boldsymbol{\Omega}} = (\mathbf{R}' - \mathbf{c}) \times (\mathbf{N} + \mathbf{F}) + \mathbf{K}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \right) &= m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{N} + \mathbf{F} - m\mathbf{g}\mathbf{e}_y, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{R}' = \mathbf{R} + \boldsymbol{\lambda}$ — вектор, соединяющий точку приложения сил P' с геометрическим центром колеса; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, 0, 0)$ — вектор длины λ , направленный вдоль направления движения колеса; \mathbf{N} — сила реакции опоры, действующая на колесо; \mathbf{F} — сила трения качения; $\mathbf{K} = -i\dot{\boldsymbol{\omega}}$ — управляющий момент, создаваемый за счет вращения ротора; i — момент инерции ротора относительно его центра; $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость ротора.

Отсутствие проскальзывания между колесом и плоскостью описывается уравнением неголономной связи:

$$\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{v}_o = (v_o, 0, 0)$ — скорость геометрического центра системы, $\mathbf{R} = (0, -R, 0)$ — вектор, соединяющий геометрический центр колеса и точку P . Для рассматриваемой системы указанная связь, записанная в скалярном виде

$$v_o = -R\dot{\vartheta},$$

является интегрируемой. Проинтегрировав данное уравнение, получим голономную связь, описывающую зависимость положения центра системы x_o от угла ϑ :

$$x_o = -R\vartheta. \quad (3)$$

При исследовании управляемого движения колеса мы будем использовать данное выражение для определения координаты центра системы.

Скорость центра колеса выражается через скорость его центра масс при помощи соотношения

$$\mathbf{v}_o = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{c}}.$$

Вектор \mathbf{c} можно параметризовать углом ϑ следующим образом: $\mathbf{c} = (c \cos \vartheta, c \sin \vartheta, 0)$, тогда для скорости центра масс с учетом (2) получим

$$v_x = -(R + c \sin \vartheta)\dot{\vartheta}, \quad v_y = c \cos \vartheta \dot{\vartheta}. \quad (4)$$

Данные соотношения представляют собой условие отсутствия проскальзывания, записанное в терминах скорости центра масс и угла ϑ . Подставив их во второе уравнение (1), получаем явные выражения для неизвестных сил N и F .

Нетрудно убедиться, что второе уравнение (1) имеет проекцию только на ось \mathbf{e}_z , то есть является скалярным. Таким образом, подставляя в него выражения для N и F , получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно ϑ . Разрешая его относительно $\ddot{\vartheta}$, находим

$$\ddot{\vartheta} = \frac{K - mc\dot{\vartheta}^2(\sqrt{R^2 - \lambda^2} \cos \vartheta + \lambda \sin \vartheta) - mgc \cos \vartheta + \lambda mg}{I + m(R\sqrt{R^2 - \lambda^2} + c^2 + c(R + \sqrt{R^2 - \lambda^2}) \sin \vartheta - \lambda c \cos \vartheta)}. \quad (5)$$

Замечание 1. Анализ уравнений движения (1) показал, что в системе при определенных параметрах сила реакции \mathbf{N} и сила трения качения \mathbf{F} могут принимать нефизические значения ($N < 0$, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} > 0$). Такое поведение характерно для неголономных систем. При этом условия $N < 0$, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} > 0$ определяют границы применимости рассматриваемой модели.

Замечание 2. Рассматриваемая модель движения под действием сил трения качения эквивалентна неголономной модели качения колеса, к которой добавлен момент сухого трения, записанный в классическом виде: $K_{fr} = -\lambda \frac{\dot{\vartheta}}{|\dot{\vartheta}|} N$.

§ 2. Управляемое движение робота-колеса

В данном параграфе мы рассмотрим движение колеса под действием момента K , который по сути является производной от угловой скорости ротора $\dot{\omega}$, домноженной на постоянный коэффициент. Сразу отметим, что величина угловой скорости ротора не может быть сколь угодно большой. Технически она ограничена некоторым максимальным значением ω_{\max} , которое соответствует определенным характеристикам двигателя. Следовательно, при достижении максимальной скорости момент K станет равным нулю, то есть дальнейшее движение будет происходить по инерции, и под действием силы трения колесо остановится.

Рассмотрим задачу об управлении движением робота-колеса в следующей постановке.

Пусть в начальный момент времени заданы положение $\mathbf{r}_o(0)$ и скорость $\mathbf{v}_o(0)$ центра робота и положение его центра масс $\vartheta(0)$. Под действием постоянного момента K ротор начинает вращаться с постоянным угловым ускорением $\dot{\omega}$ до некоторой максимально возможной скорости ω_{\max} . Достигнув максимальной скорости, ротор продолжает вращаться с постоянной угловой скоростью ω_{\max} до полной остановки колеса. Требуется определить, каким образом будет двигаться колесо при таком управлении.

Решение данной задачи можно разделить на два этапа. Как уже было указано выше, управляющий момент K , приложенный в центре масс колеса, связан с угловой скоростью ротора соотношением

$$K = i\dot{\omega}.$$

По условию задачи на первом этапе управляющий момент $K = \text{const}$, следовательно, угловая скорость ротора линейно зависит от времени:

$$\omega = \frac{K}{i}t$$

и достигает максимального значения в момент времени:

$$t_{\max} = \frac{i\omega_{\max}}{K}.$$

Изменение положения центра масс в этом случае описывается уравнением (5) при заданном моменте K .

На втором этапе (при $t > t_{\max}$) ротор вращается с постоянной угловой скоростью ω_{\max} , K становится равным нулю и колесо продолжает двигаться по инерции. Изменение положения центра масс в этом случае описывается уравнением (5) при $K = 0$.

В качестве примера приведем решение системы (5) при следующих начальных условиях:

$$\mathbf{r}_o(0) = (0, 0, 0), \quad \vartheta(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\vartheta}(0) = 0.$$

Численно решая уравнение (5) и воспользовавшись уравнением связи (3), находим зависимость координаты центра колеса x_o от времени. На рисунке 2 изображен общий характер управляемого движения колеса при учете трения качения и смещения центра масс.

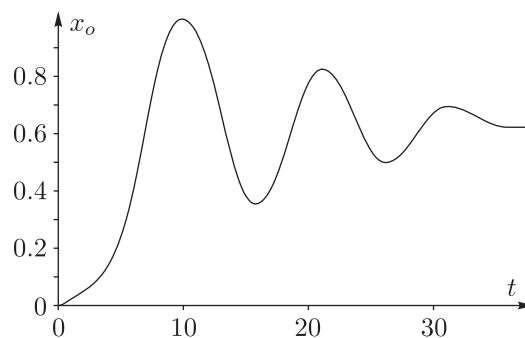


Рис. 2. Типичная зависимость координаты центра колеса x_o от времени при наличии смещения центра масс и трения качения. Зависимость получена при следующих параметрах: $m = 2$ кг, $R = 0.2$ м, $I = 1.5 \cdot 10^{-2}$ кг·м², $m_r = 0.5$ кг, $i = 5 \cdot 10^{-4}$ кг·м², $c = 0.002$ м, $\lambda = 0.0002$ м, $\omega_{\max} = 24$ рад/с, $K = -0.07$ кг·м²/с².

§ 3. Конструкция робота-колеса

Для исследования влияния трения качения на динамику робота разработана лабораторная модель робота-колеса (рис. 3). Основой конструкции являются диски (1 и 2), закрепленные на цилиндре (3). Данная конструкция позволяет снизить трение между дисками и поверхностью

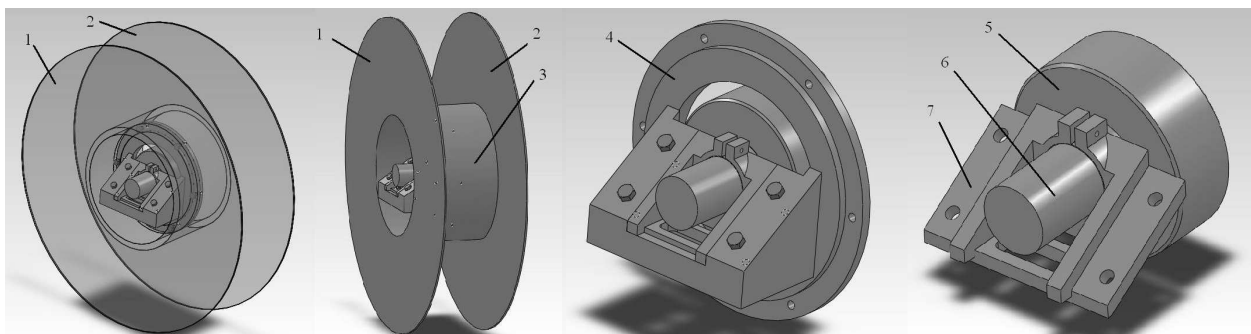


Рис. 3. Трехмерная модель робота-колеса

и уменьшить момент инерции всей системы, так как основная масса сосредоточена ближе к оси вращения. К цилиндру (3) крепится опорный диск (4), на котором располагается кронштейн (7) с электродвигателем (6) и ротором (5), жестко закрепленным на валу двигателя.

Данная конструкция обладает следующими характеристиками:

- общая масса системы $m = 2.175$ кг;
- момент инерции ротора относительно оси вращения $i = 7.195 \cdot 10^{-4}$ кг·м²;
- момент инерции всей конструкции относительно оси вращения $I = 1.357 \cdot 10^{-2}$ кг·м²;
- габаритные размеры:
 - радиус колеса $R = 0.18$ м;
 - ширина $d = 0.1$ м;
- смещение центра масс $c = 0.003$ м.

Данные инерционно-массовые характеристики получены при моделировании лабораторной установки в программном продукте SolidWorks 2013. На рисунке 4 показана реальная модель экспериментального образца, собранная по трехмерной модели.

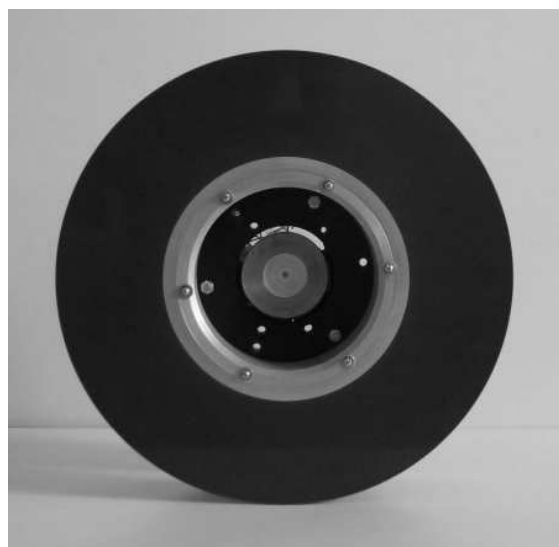
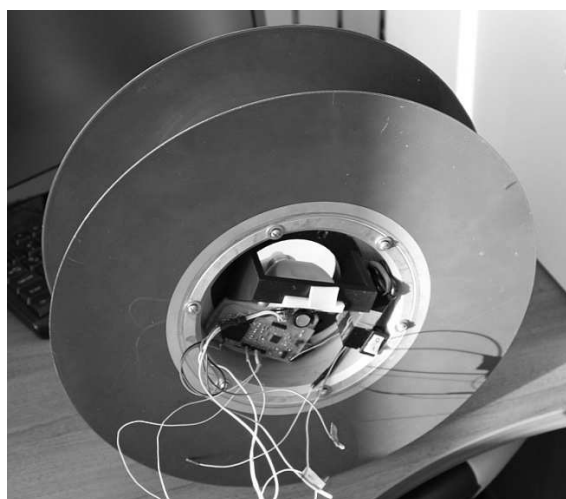


Рис. 4. Реальная модель экспериментального образца для исследования влияния трения качения на динамику робота-колеса

§ 4. Экспериментальная оценка модели робота-колеса

Определение коэффициента трения качения

Для определения коэффициента трения качения рассматривалось движение колеса без внутреннего механизма (то есть без ротора и двигателя) и, соответственно, при отсутствии внутреннего управляющего воздействия K . Так как сама конструкция колеса уравновешена, смещение центра масс в этом случае $c = 0$. Робот приводился в движение кратковременным действием внешней силы. Траектория движения колеса восстанавливалась при помощи системы захвата движения Vison, которая обеспечивает точность определения положения объекта ± 1 мм (данная система определения положения и ориентации объекта применялась и ранее, см., например [8, 18]).

На рисунке 5 изображена типичная зависимость координаты центра робота от времени при движении без управляющего момента под действием внешней силы. Из рисунка видно, что малейшие неровности приводят к возникновению вынуждающего момента и, соответственно, к качанию. Поэтому для оценки момента трения брались участки траектории, наиболее близкие к центру «ямы», в которых момент реакции поверхности близок к нулю, то есть влияние наклона минимально. Эти участки выделены на рисунке пунктиром. Они соответствуют интервалам времени 4...7 с, 22...25 с и 34...38 с. Для каждого из этих участков по экспериментальной зависимости положения центра колеса x_o от времени при помощи уравнения (3) можно определить зависимость угла ϑ и, подставив в уравнение (5) при $K = 0$ и $c = 0$, найти значение коэффициента трения качения для данного эксперимента.

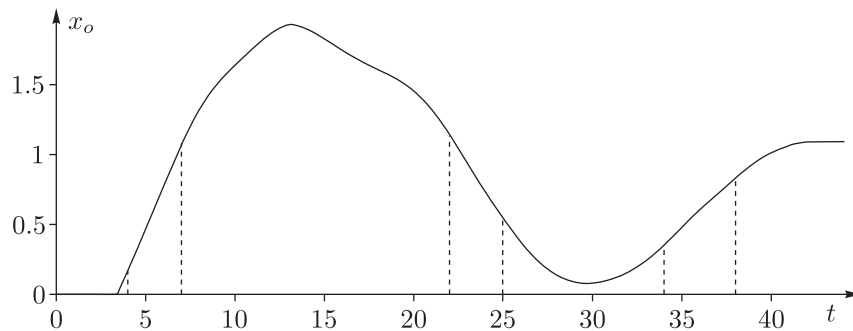


Рис. 5. Экспериментальная траектория движения робота при отсутствии внутреннего управляющего воздействия K

Была проведена серия экспериментов с одинаковыми начальными условиями, в результате которых мы получили следующее значение коэффициента трения качения: $\lambda = 0.000165 \pm \pm 0.000025$ м.

Экспериментальное исследование управляемого движения

В данном разделе приведем результаты экспериментальной оценки разработанной теоретической модели движения.

Эксперимент проводился следующим образом. На двигатель подавалось возрастающее напряжение, в результате чего ротор разгонялся с постоянным угловым ускорением до скорости $\omega_{\max} = 230$ об/мин = 24 рад/с. Угол поворота ротора измерялся с помощью энкодера, расположенного на двигателе. Положение центра колеса определялось системой захвата движения с момента начала движения до полной остановки. По полученным с энкодера значениям угла поворота ротора дифференцированием по времени определялись его угловая скорость и угловое ускорение, при помощи которых легко найти управляющий момент K .

На рисунке 6, а приведен график изменения задаваемой (пунктирная линия) и реальной (сплошная линия) угловой скорости ротора, график изменения углового ускорения ротора изображен на рисунке 6, б.

Для проверки предложенной теоретической модели была проведена серия из пяти экспериментов. Эксперименты проводились при следующих начальных условиях:

$$\mathbf{r}_o(0) = (0, 0, 0), \quad \vartheta(0) = 84^\circ, \quad \dot{\vartheta}(0) = 0.$$

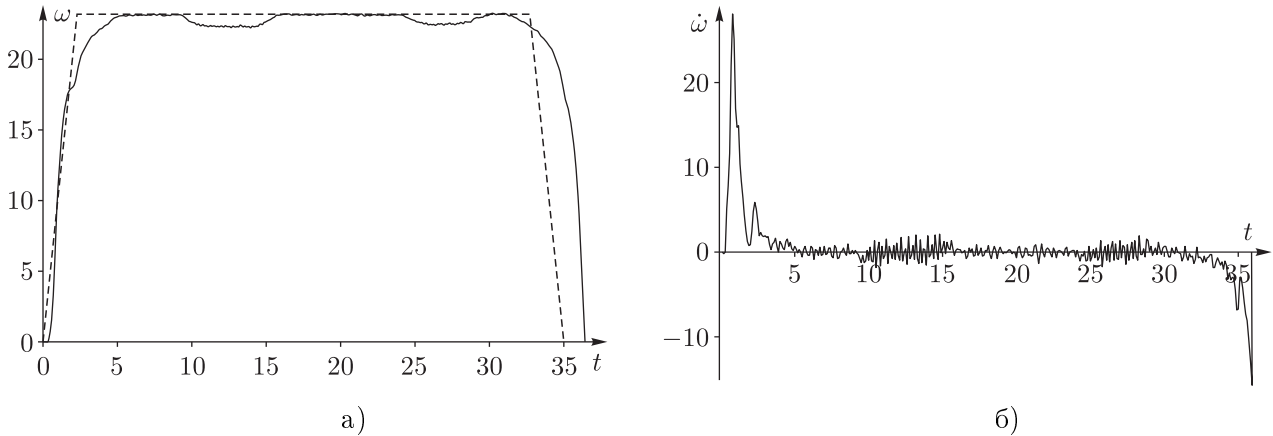


Рис. 6. Зависимость задаваемой (пунктирная линия) и реальной (сплошная линия) угловой скорости ротора (а) и углового ускорения ротора (б) от времени

На рисунке 7 пунктирной линией изображена зависимость координаты центра колеса для теоретической модели движения, полученная при коэффициенте трения качения $\lambda = 0.000165$ м, сплошной линией — усредненная экспериментальная зависимость положения центра колеса от времени.

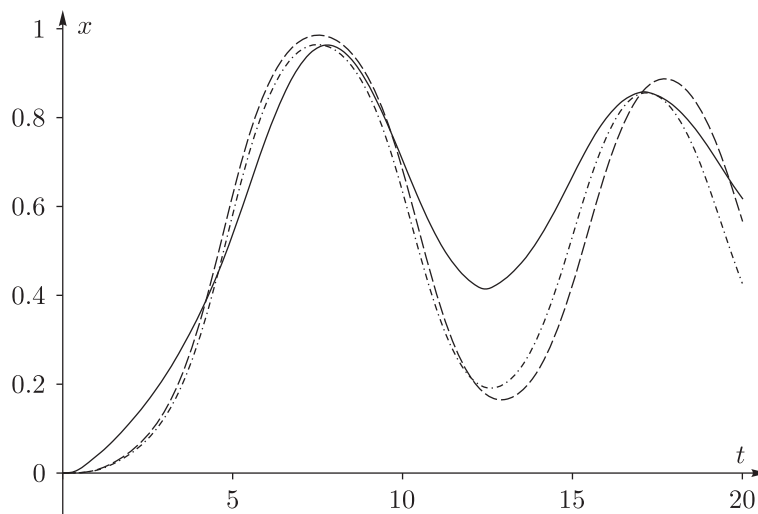


Рис. 7. Реальная траектория движения (сплошная линия), теоретическая траектория движения, полученная при коэффициенте трения качения $\lambda = 0.000165$ м (пунктирная линия), и теоретическая траектория движения, полученная при коэффициенте трения качения $\lambda = 0.0002$ м (штрихпунктирная линия)

Из рисунка видно, что качественно теоретическая и экспериментальная кривые хорошо совпадают, но имеют существенное количественное отличие. Это может быть связано с тем, что коэффициент трения зависит от силы реакции \mathbf{N} . Для учета данной зависимости методом наименьших квадратов было получено значение λ , при котором теоретическая траектория $x_o(t)$ лучше всего совпадает с экспериментальными данными. Теоретическая зависимость при полученном таким образом значении $\lambda = 0.0002$ м приведена на рисунке 7 штрихпунктирной линией.

Данное несовпадение можно уменьшить, например, за счет более точного определения величины смещения положения центра масс. Кроме того, несоответствие амплитуды теоретической траектории и реальной можно объяснить неравномерностью коэффициента трения качения во время движения и его зависимостью от скорости.

Заключение

В результате проделанной работы были сделаны следующие выводы.

1. Смещение центра масс имеет достаточно большое влияние на характер движения. Нетрудно убедиться, подставив численные значения в выражения для управляющего момента K и момента, создаваемого силой тяжести $mg \cos \vartheta$, что данные величины получаются одного порядка. Таким образом, для управления системой при помощи ротора необходимо идеально уравнивать конструкцию, чтобы исключить влияние момента силы тяжести.
2. Также сильное влияние на характер движения оказывает горизонтальность поверхности. Уже при малых углах наклона поверхности управлять подобной системой становится сложнее, а при больших углах и вовсе невозможно.
3. Для повышения эффективности управления подобными системами необходимо подбирать двигатель, позволяющий достичь большего ускорения маховика, для получения большего управляющего момента.

Отметим, что интересно было бы провести аналогичные экспериментальные исследования качения шаровидных тел по плоскости. Это позволит оценить применимость классической неголономной модели, неголономной модели с трением качения (которое теперь будет иметь две компоненты) и модели качения «резинового» тела, описанной в работах [19–21].

Авторы выражают благодарность А. А. Килину, Ю. Л. Караваеву и Т. Б. Ивановой за плодотворные обсуждения полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // Regul. Chaotic Dyn. 2012. Vol. 17. № 3–4. P. 258–272.
2. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. How to control the Chaplygin ball using rotors. II // Regul. Chaotic Dyn. 2013. Vol. 18. № 1–2. P. 144–158.
3. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. Dynamics and control of an omniwheel vehicle // Regul. Chaotic Dyn. 2015. Vol. 20. № 2. P. 153–172.
4. Joshi V.A., Banavar R.N., Hippalgaonkar R. Design and analysis of a spherical mobile robot // Mech. Mach. Theory. 2010. Vol. 45. P. 130–136.
5. Joshi V.A., Banavar R.N. Motion analysis of a spherical mobile robot // Robotica. 2009. Vol. 27. P. 343–353.
6. Karavaev Yu.L., Kilin A.A. The dynamics and control of a spherical robot with an internal omniwheel platform // Regul. Chaotic Dyn. 2015. Vol. 20. № 2. P. 134–152.
7. Борисов А.В., Мамаев И.С., Караваев Ю.Л. Мобильные роботы: робот-колесо и робот-шар. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 532 с.
8. Килин А.А., Караваев Ю.Л. Экспериментальные исследования динамики сферического робота комбинированного типа // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 4. С. 721–734.
9. Мартыненко Ю.Г. Управление движением мобильных колесных роботов // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 8. С. 29–80.
10. Coulomb C.A. Theorie des machines simples: en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages. Paris: Bachelier, 1821.
11. Morin A.J. Leçons de mécanique pratique. Paris: Mathias, 1846.
12. Dupuit M.J. Essai et expériences sur le tirage des voitures: et sur le frottement de seconde espèce. Paris: Carilian-Gœury, 1837.
13. Fromm H. Berechnung des schlupfes beim rollen deformierbarer scheinben // Z. angew. Math. Mech. 1927. Vol. 7. № 1. P. 27–58.
14. Reynolds O. On rolling friction // Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A. 1876. Vol. 166. P. 155–174.
15. Reynolds O. On rolling friction // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. 1875. Vol. 23. P. 506–509.
16. Ишлинский А.Ю. Трение качения // ПММ. 1938. Т. 2. № 2. С. 245–260.

17. Кулешов А.С., Трещев Д.В., Иванова Т.Б., Наймушина О.С. Твердый цилиндр на вязкоупругой плоскости // *Нелинейная динамика*. 2011. Т. 7. № 3. С. 601–625.
18. Килин А.А., Караваев Ю.Л. Кинематическая модель управления сферороботом с неуравновешенной омниколесной платформой // *Нелинейная динамика*. 2014. Т. 10. № 4. С. 497–511.
19. Bolsinov A.V., Borisov A.V., Mamaev I.S. Rolling of a ball without spinning on a plane: the absence of an invariant measure in a system with a complete set of integrals // *Regul. Chaotic Dyn.* 2012. Vol. 17. № 6. P. 571–579.
20. Borisov A.V., Mamaev I.S. Rolling of a non-homogeneous ball over a sphere without slipping and twisting // *Regul. Chaotic Dyn.* 2007. Vol. 12. № 2. P. 153–159.
21. Borisov A.V., Mamaev I.S., Bizyaev I.A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere // *Regul. Chaotic Dyn.* 2013. Vol. 18. № 3. P. 277–328.

Поступила в редакцию 03.11.2015

Пивоварова Елена Николаевна, аспирант, кафедра теоретической физики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: archive@rcd.ru

Клековкин Антон Владимирович, аспирант, Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7.
E-mail: klanvlad@mail.ru

E. N. Pivovarova, A. V. Klekovkin

Influence of rolling friction on the controlled motion of a robot wheel

Keywords: robot-wheel, rolling friction, displacement of the center of mass.

MSC: 70F40, 70F25

This paper presents an experimental investigation of the influence of rolling friction on the dynamics of a robot wheel. The robot is set in motion by changing the proper gyrostatic momentum using the controlled rotation of a rotor installed in the robot. The problem is considered under the assumption that the center of mass of the system does not coincide with its geometric center. In this paper we derive equations describing the dynamics of the system and give an example of the controlled motion of a wheel by specifying a constant angular acceleration of the rotor. A description of the design of the robot wheel is given and a method for experimentally determining the rolling friction coefficient is proposed. For the verification of the proposed mathematical model, experimental studies of the controlled motion of the robot wheel are carried out. We show that the theoretical results qualitatively agree with the experimental ones, but are quantitatively different.

REFERENCES

1. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. How to control Chaplygin's sphere using rotors, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, no. 3–4, pp. 258–272.
2. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. How to control the Chaplygin ball using rotors. II, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, no. 1–2, pp. 144–158.
3. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. Dynamics and control of an omniwheel vehicle, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 2, pp. 153–172.
4. Joshi V.A., Banavar R.N. Hittalgaonkar R. Design and analysis of a spherical mobile robot, *Mech. Mach. Theory*, 2010, vol. 45, pp. 130–136.
5. Joshi V.A., Banavar R.N. Motion analysis of a spherical mobile robot, *Robotica*, 2009, vol. 27, pp. 343–353.
6. Karavaev Yu.L., Kilin A.A. The dynamics and control of a spherical robot with an internal omniwheel platform, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 2, pp. 134–152.
7. Borisov A.V., Mamaev I.S., Karavaev Yu.L. (Eds.) *Mobil'nye roboty: robot-koleso i robot-shar* (Mobile robots: ball-shaped robot and wheel robot), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2013, 532 p.
8. Kilin A.A., Karavaev Yu.L. Experimental research of dynamic of spherical robot of combined type, *Nelin. Dinam.*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 721–734 (in Russian).

9. Martynenko Yu.G. Motion control of mobile wheeled robots, *J. Math. Sci.*, 2007, vol. 147, no. 2, pp. 6569–6606.
10. Coulomb C.A. *Theorie des machines simples: en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages*, Paris: Bachelier, 1821.
11. Morin A.J. *Leçons de mécanique pratique*, Paris: Mathias, 1846.
12. Dupuit M.J. *Essai et expériences sur le tirage des voitures: et sur le frottement de seconde espèce*, Paris: Carilian-Gœury, 1837.
13. Fromm H. Berechnung des schlupfes beim rollen deformierbarer scheiben, *Z. angew. Math. Mech.*, 1927, vol. 7, no. 1, pp. 27–58.
14. Reynolds O. On rolling friction, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A*, 1876, vol. 166, pp. 155–174.
15. Reynolds O. On rolling friction, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 1875, vol. 23, pp. 506–509.
16. Ishlinsky A.Yu. Rolling friction, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1938, vol. 2, no. 2, pp. 245–260 (in Russian).
17. Kuleshov A.S., Treschev D.V., Ivanova T.B., Naimushina O.S. A rigid cylinder on a viscoelastic plane, *Nelin. Dinam.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 601–625 (in Russian).
18. Kilin A.A., Karavaev Yu.L. The kinematic control model for a spherical robot with an unbalanced internal omniwheel platform, *Nelin. Dinam.*, 2014, vol. 10, no. 4, pp. 497–511 (in Russian).
19. Bolsinov A.V., Borisov A.V., Mamaev I.S. Rolling of a ball without spinning on a plane: the absence of an invariant measure in a system with a complete set of integrals, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, no. 6, pp. 571–579.
20. Borisov A.V., Mamaev I.S. Rolling of a non-homogeneous ball over a sphere without slipping and twisting, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, no. 2, pp. 153–159.
21. Borisov A.V., Mamaev I.S., Bizyaev I.A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, no. 3, pp. 277–328.

Received 03.11.2015

Pivovarova Elena Nikolaevna, post-graduate student, Department of Theoretical Physics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

E-mail: archive@rcd.ru

Klekovkin Anton Vladimirovich, post-graduate student, Izhevsk State Technical University, ul. Studencheskaya, 7, Izhevsk, 426069, Russia.

E-mail: klanvlad@mail.ru