

УДК 532.5.011, 532.582

© А. И. Кленов, Е. В. Ветчанин, А. А. Килина

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС ТЕЛА МЕТОДОМ БУКСИРОВКИ<sup>1</sup>**

Данная работа посвящена экспериментальному определению присоединенных масс тел, погруженных в жидкость полностью или частично. В работе приводятся схема экспериментальной установки, методика проведения эксперимента и математическая модель, положенная в основу методики. Метод определения присоединенной массы основан на буксировке тела при известной тяговой силе. Из теории известно, что понятие присоединенной массы возникает в предположении потенциальности обтекания тела жидкостью. В связи с этим мы дополнительно проводим PIV-визуализацию потоков, генерируемых буксируемым телом, и определяется участок траектории, на котором обтекание можно считать потенциальным. Для верификации методики проведен ряд экспериментов по определению присоединенных масс эллипсоида вращения. Результаты измерений согласуются с известными справочными данными. На основе разработанной методики определены присоединенные массы безвинтового надводного робота.

*Ключевые слова:* присоединенные массы, движение по свободной поверхности, гидродинамическое сопротивление, метод буксировки.

**Введение**

При проектировании плавающих мобильных устройств необходимо принимать во внимание сопротивление жидкости, возникающее при различных режимах движения. Безусловно, величины сил и моментов сопротивления являются существенно нестационарными. Сопротивление жидкости принято характеризовать двумя величинами.

1. Коэффициент лобового сопротивления  $C_X$ , учитывающий влияние вязкости жидкости и распределение давления по поверхности тела при движении вдоль некоторого направления  $X$ . Величина данного коэффициента зависит от геометрии тела и режима движения. Обычно рассматривают лобовое сопротивление, соответствующее установившемуся режиму движения, однако в действительности на величину  $C_X$  оказывают влияние как фоновые течения, так и срывы вихрей, образующихся позади движущегося тела.

2. Присоединенная масса  $\lambda$ , характеризующая сопротивление жидкости при ускоренном движении тела. Данный коэффициент определяется геометрией тела, а при движении вблизи свободной поверхности еще и процессами волнообразования. Присоединенные массы тел, движущихся на большой глубине, могут быть определены с помощью численного решения шести внешних задач Дирихле. Для частично погруженных тел необходимо учитывать волнообразование, что не всегда возможно.

Для тел простой формы (таких как цилиндр, эллипсоид вращения, шар), движущихся вблизи свободной поверхности неограниченного объема идеальной несжимаемой жидкости, присоединенные массы известны и могут быть найдены в справочнике [5]. Но справочные значения не учитывают реального волнообразования и влияния ограниченности объема жидкости. Присоединенные массы тел произвольной формы определяются либо численным моделированием, либо экспериментально.

Известны три различных экспериментальных метода определения коэффициентов присоединенных масс.

<sup>1</sup>Работа А.А. Килина поддержана грантом № РФФИ 15-08-09093-а. Введение, разделы 1 и 4 выполнены Е.В. Ветчаниным за счет средств гранта РФФИ № 14-19-01303.

**Метод малых колебаний** [1, 6, 11], согласно которому исследуемое тело закрепляется на пружинном подвесе постоянной жесткости, погружается в жидкость и совершает свободные колебания. По измеренным перемещениям тела из дифференциального уравнения колебаний определяются присоединенные массы. К недостаткам метода следует отнести невозможность определения присоединенных масс несимметричного тела.

**Метод аналогового электрического и магнитного моделирования**, заключающийся в использовании математической аналогии между потенциалом скорости и электрическим потенциалом [3, 9]. Главным недостатком данного метода является погрешность получаемых результатов вследствие невозможности полного описания задачи и несоответствия граничных условий, особенно при движении вблизи свободной поверхности.

**Метод разгона и торможения**, основанный на исследовании процесса нестационарного прямолинейного движения тела при известной тянущей силе [2]. Данный метод позволяет проводить исследования при различных числах Рейнольдса, а испытательный стенд достаточно прост в изготовлении. К недостаткам метода относится необходимость определения коэффициента лобового сопротивления, а также влияние на результаты измерений нестационарности гидродинамических процессов, сопровождающих движение тела.

Данная работа носит методический характер и направлена на экспериментальное определение присоединенных масс тел, движущихся вблизи свободной поверхности, методом разгона и торможения.

В § 1 представлена математическая модель движения, положенная в основу экспериментальной методики. В § 2 описана конструкция стенда. В § 3 приведена методика расчета коэффициентов присоединенной массы и лобового сопротивления по экспериментальным данным. В § 4 обсуждаются результаты экспериментального измерения присоединенных масс эллипсоида вращения, анализируется адекватность методики. В § 5 приведены результаты экспериментов по определению присоединенных масс надводного робота.

## § 1. Уравнения движения

Для определения присоединенных масс методом разгона и торможения необходимо протягивать тело в жидкости с известной тяговой силой. Для этого была разработана установка (см. рис. 1), которая представляет собой подвижную платформу, обеспечивающую горизонтальное перемещение исследуемого тела. Платформа соединена нитью с буксировочным грузом массы  $m$  через систему роликов радиуса  $R$ , оси которых неподвижны. Перемещение платформы с телом осуществляется по направляющим посредством тягового усилия, которое создается при свободном падении груза  $m$ .

Рассмотрим движение системы «тело + платформа» вдоль направляющих в сопротивляющейся среде. Обозначим  $x$  перемещение тела вдоль направляющей.

Основное уравнение динамики для платформы с закрепленным на ней телом может быть записано в виде

$$M_g \ddot{x} = T_1 - F_{fr} - F_X, \quad M_g = M_M + M_{pl}, \quad (1)$$

где  $M_M$  — масса тела;  $M_{pl}$  — масса платформы;  $T_1$  — сила натяжения нити, действующая на платформу;  $F_{fr}$  — сила трения, обусловленная взаимодействием платформы с направляющей;  $F_X$  — сила сопротивления среды, которая в общем случае зависит от режима движения тела и глубины погружения.

Основное уравнение динамики для каждого из роликов можно записать в виде

$$J_i \ddot{\varphi}_i = R_i (T_{i+1} - T_i) - N_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где  $\varphi_i$  — угол поворота  $i$ -го ролика;  $J_i$  и  $R_i$  — его момент инерции и радиус ролика;  $N_i$  — момент сил трения, возникающих на оси ролика;  $T_i$  и  $T_{i+1}$  — сила натяжения нити до и после ролика.

Основное уравнение динамики для буксирующего груза имеет вид

$$m \ddot{y} = mg - T_4, \quad (3)$$

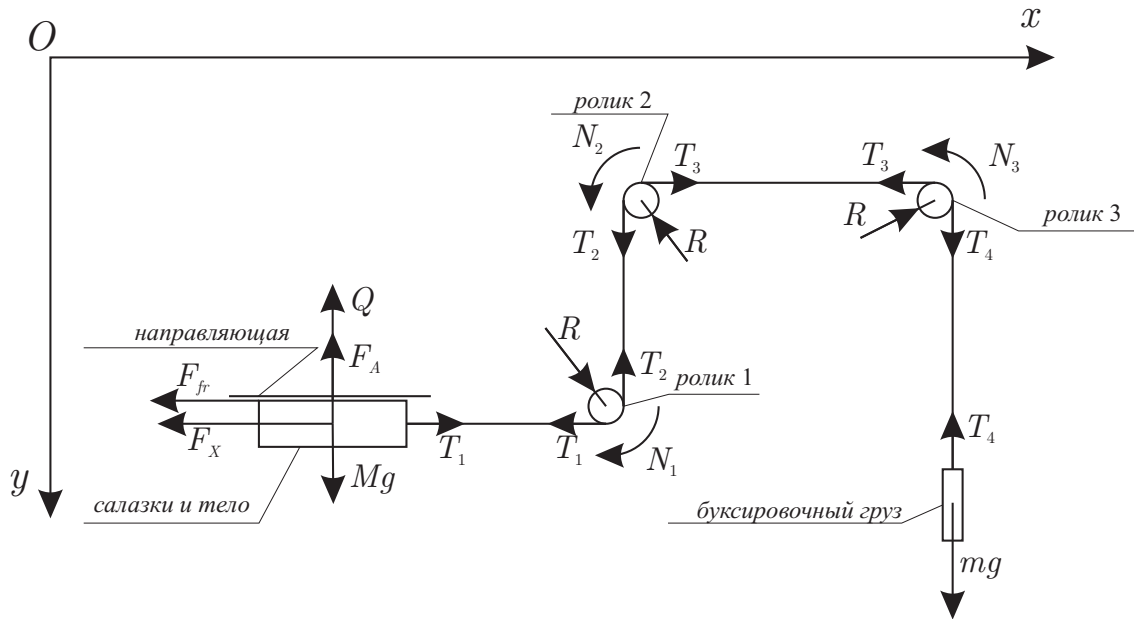


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

где  $y$  — вертикальное перемещение буксирующего груза,  $g$  — ускорение свободного падения.

Будем считать, что используемая в конструкции нить является нерастяжимой и движется через блоки без проскальзывания, тогда углы поворота роликов связаны с перемещением платформы и груза соотношениями

$$\varphi_i = \frac{x}{R}, \quad y = x,$$

а уравнение (2) можно представить в виде

$$\frac{J_i}{R^2} \ddot{x} = T_{i+1} - T_i - \frac{N_i}{R}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Складывая уравнения (1), (3), (4), получим уравнение движения для платформы с телом:

$$M\ddot{x} = mg - F_F - F_X, \quad (5)$$

$$M = M_M + M_{pl} + \frac{\sum_{i=1}^3 J_i}{R^2} + m, \quad F_F = F_{fr} + \frac{\sum_{i=1}^3 N_i}{R},$$

где  $M$  — эффективная масса движущихся элементов,  $F_F$  — эффективная сила трения.

Для полного описания рассматриваемой системы в уравнении (5) необходимо определить вид слагаемых  $F_F$  и  $F_X$ . Будем полагать, что эффективная сила трения обусловлена вкладом сухого и вязкого трения и описывается следующим уравнением:

$$F_F = F_0 + K_0 \dot{x}^2, \quad (6)$$

где  $F_0$  — составляющая, учитывающая сухое трение;  $K_0$  — коэффициент вязкого трения, учитывающий трение в подшипниках.

Силу сопротивления среды, учитывающую присоединенные массы и лобовое сопротивление жидкости, следуя [8], представим в виде

$$F_X = \lambda \cdot \ddot{x} + \frac{\rho \cdot C_X \cdot A \cdot \dot{x}^2}{2}, \quad (7)$$

где  $\lambda$  — присоединенная масса;  $C_x$  — коэффициент лобового сопротивления;  $A$  — площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению движения;  $\rho$  — плотность жидкости.

Поскольку используемая модель гидродинамического сопротивления является феноменологической, то она не в состоянии отразить нестационарность течений, связанных с образованием и отрывом вихрей. Кроме того, понятие присоединенной массы возникает в предположении потенциальности течения. Следовательно, измерения целесообразно проводить при режимах обтекания тела, близких к потенциальному. Для определения характера течения жидкости вблизи тела на разных участках траектории мы использовали метод трассерной визуализации потока (PIV — Particle Image Velocimetry). Данная система состоит из следующих частей:

- 1) светоотражающие частицы — трассеры, которые добавляются в исследуемый объем жидкости; в качестве трассеров мы использовали полые стеклянные шарики диаметром 1 мкм;
- 2) спаренный импульсный лазер и система формирования светового ножа для подсветки некоторого сечения жидкости;
- 3) специальная камера, снимающая свечение частиц; камера, имеющаяся в нашем распоряжении, может снимать 15 пар кадров в секунду; кадры каждой пары отделяются временным интервалом в несколько миллисекунд;
- 4) специальное программное обеспечение, рассчитывающее поле скорости жидкости по каждой паре кадров.

## § 2. Конструкция стенда

В соответствии со схемой, представленной на рисунке 1, разработан стенд для определения присоединенных масс. Стенд состоит из буксируемой платформы, к которой жестко крепится исследуемое тело; двух цилиндрических направляющих, по которым перемещается платформа; системы блоков и буксирующего груза (см. рис. 2).

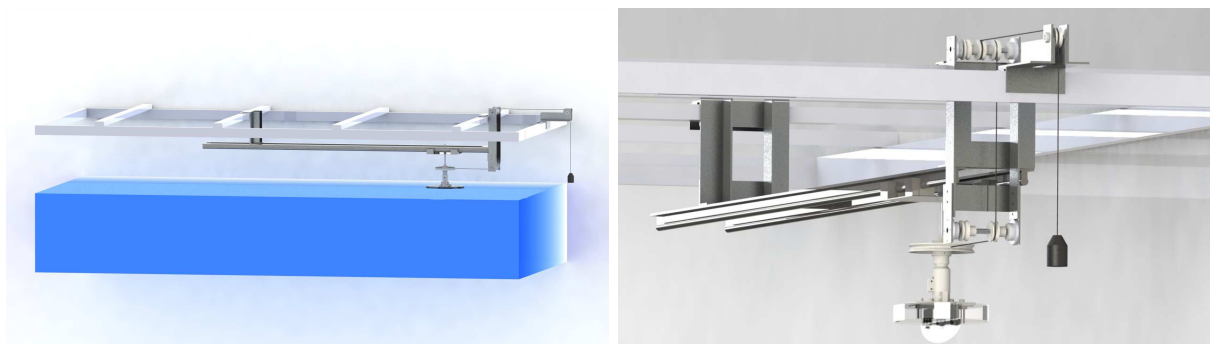


Рис. 2. Стенд для определения присоединенных масс

Перемещение тела осуществляется посредством системы блоков и буксирующего груза, который опускается под действием силы тяжести. Для отслеживания перемещения используется энкодер, механически связанный с одним из роликов посредством вала. Сбор информации осуществляется микропроцессорным устройством, входящим в состав лабораторного стенда.

## § 3. Методика эксперимента

Для определения присоединенных масс необходимо знать силу сухого трения  $F_0$  и коэффициент вязкого трения  $K_0$ . Поэтому разделим методику проведения эксперимента на следующие этапы.

1. Определение силы трения.

Для определения силы трения  $F_F$  проведем серию экспериментов в воздушной среде без взаимодействия тела с жидкостью (в этом случае  $F_X = 0$ ). Сила сухого трения  $F_0$  и коэффициент вязкого трения  $K_0$  существенно зависят от силы реакции, действующей со стороны платформы с телом на направляющие. Поэтому для обеспечения одинаковой силы реакции в эксперименте на воздух и в жидкости заменим тело массой  $M_M$  на корректирующую массу  $M'_M$ :

$$M'_M = M_M - \frac{F_A}{g},$$

где  $F_A$  — сила Архимеда, действующая на исследуемое тело.

Уравнение (5) в этом случае принимает следующий вид:

$$\left(M - \frac{F_A}{g}\right) \ddot{x} = mg - F_0 - K_0 \dot{x}^2. \quad (8)$$

Приведем данное уравнение к следующей форме:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + k_a \cdot \dot{x}^2 &= f_a, \\ f_a &= \frac{mg - F_0}{\left(M - \frac{F_A}{g}\right)}, \quad k_a = \frac{K_0}{\left(M - \frac{F_A}{g}\right)}. \end{aligned} \quad (9)$$

После установки корректирующей массы проведем серию экспериментов по ее буксировке на воздухе без взаимодействия с жидкостью. В результате получим экспериментальную зависимость  $x_e(t)$  — передвижение платформы при такой буксировке. Далее методом наименьших квадратов вычислим коэффициенты  $f_a$  и  $k_a$ , при которых уравнение (9) наиболее точно описывает экспериментальную зависимость  $x_e(t)$ . Теперь, зная массовые характеристики стэнда и коэффициенты  $f_a$  и  $k_a$ , можно вычислить силу сухого  $F_0$  и коэффициент вязкого трения  $K_0$  по следующим формулам:

$$F_0 = mg - f_a \cdot \left(M - \frac{F_A}{g}\right), \quad (10)$$

$$K_0 = k_a \cdot \left(M - \frac{F_A}{g}\right). \quad (11)$$

## 2. Определение присоединенной массы и коэффициента лобового сопротивления.

Для определения присоединенной массы и коэффициента лобового сопротивления проведем серию экспериментов по буксировке исследуемого тела в жидкости. Уравнение (5) в данном случае примет следующий вид:

$$(M + \lambda) \ddot{x} = mg - F_0 - K_0 \dot{x}^2 - \frac{\rho \cdot C_X \cdot A}{2} \dot{x}^2 \quad (12)$$

и может быть приведено к виду, аналогичному уравнению (9):

$$\begin{aligned} \ddot{x} + k_f \cdot \dot{x}^2 &= f_f, \\ f_f &= \frac{f_a \cdot \left(M - \frac{F_A}{g}\right)}{M + \lambda}, \quad k_f = \frac{0.5 C_X \cdot A \cdot \rho + k_a \cdot \left(M - \frac{F_A}{g}\right)}{M + \lambda}. \end{aligned} \quad (13)$$

Параметры  $f_f$  и  $k_f$  вычисляются по экспериментальным данным  $x_e(t)$ , аналогично  $f_a$  и  $k_a$ . После этого значения присоединенной массы  $\lambda$  и коэффициента лобового сопротивления  $C_X$  выражаются из (13), с учетом (10) и (11), следующим образом:

$$\lambda = \frac{f_a}{f_f} \cdot \left(M - \frac{F_A}{g}\right) - M, \quad (14)$$

$$C_x = \frac{(k_f \cdot f_a + k_a \cdot f_f) \cdot \left(M - \frac{F_A}{g}\right)}{0.5 \cdot \rho \cdot A \cdot f_f}. \quad (15)$$

Таким образом, методику измерений присоединенной массы можно представить следующим образом.

1. С помощью взвешивания определяем массу тела в воде и воздухе и массу платформы. По 3D-модели определяем моменты инерции вращающихся роликов.
2. Выбираем массу буксирующего груза. С помощью анализа потока жидкости определяем часть траектории (интервал времени), на которой течение можно считать потенциальным.
3. Проводим эксперименты по определению трения в системе, для этого буксируем тело массой  $M'_M$ , которая равна весу тела в жидкости. Определяем зависимость перемещения тела  $x_e(t)$ . Методом наименьших квадратов для каждого эксперимента серии вычисляем коэффициенты  $f_a$ ,  $k_a$ . Вычисляем средние значения  $\langle f_a \rangle$ ,  $\langle k_a \rangle$  по всем экспериментам. Корректность полученных данных проверяем путем оценки распределения ошибки для каждого из коэффициентов.
4. Проводим серию экспериментов по определению силы сопротивления жидкости. Для этого крепим к буксируемой платформе тело массой  $M_M$  и определяем зависимость перемещения  $x_e(t)$ . Аналогично предыдущему пункту определяем коэффициенты  $f_f$ ,  $k_f$  для каждого эксперимента серии и их средние значения  $\langle f_f \rangle$ ,  $\langle k_f \rangle$ . Корректность полученных данных проверяем путем оценки распределения ошибки для каждого из коэффициентов.
5. По формулам (14) и (15) вычисляем присоединенную массу  $\lambda$  и коэффициент лобового сопротивления  $C_X$ .

В каждом из пунктов 3, 4 мы проводили не менее 20 экспериментов с одинаковыми начальными условиями. После каждого протягивания тела в воде требовалось не менее двух минут для затухания волн и рассеяния вихревых структур, образовавшихся после прохода тела. Указанное время затухания получено экспериментально с помощью PIV-системы. По истечении данного промежутка времени скорость фонового течения не превышает 1 мм/с.

#### § 4. Определение присоединенных масс эллипсоида вращения

Для проверки адекватности методики был проведен эксперимент с телом, присоединенные массы которого известны. В качестве исследуемой модели взят эллипсоид вращения (см. рис. 3) с полуосями  $a = 0.15$  м и  $b = 0.10$  м. Измерения присоединенных масс эллипсоида производились на глубине  $h = 0.16$  м. В качестве крепежа использовалась цилиндрическая балка диаметром  $c = 0.025$  м.

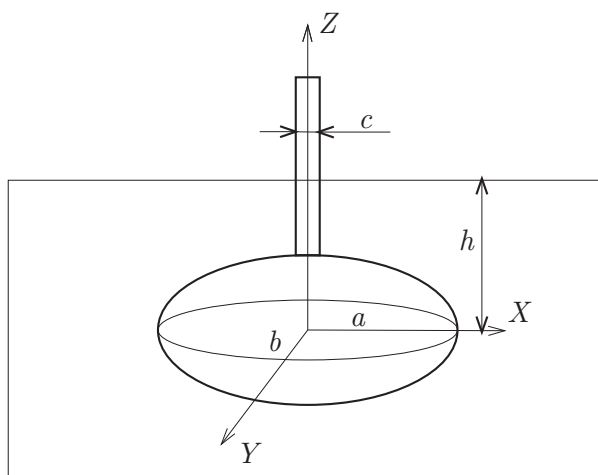


Рис. 3. Эллипсоид вращения

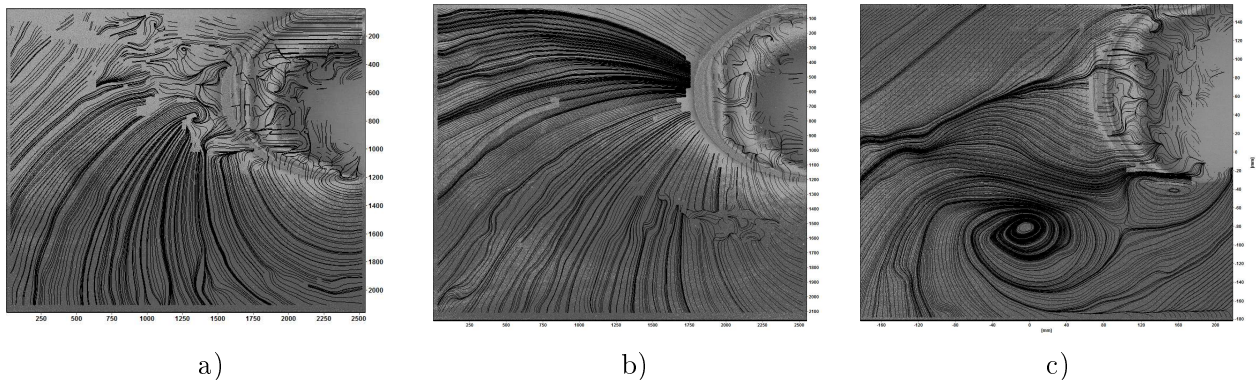
В соответствии с эмпирическими зависимостями, представленными в [10], значения присоединенных масс эллипсоида следующие:

- 1) при движении вдоль оси  $x$   $\lambda_x = 2.780$  кг;
- 2) при движении вдоль оси  $y$   $\lambda_y = 6.126$  кг.

В соответствии с алгоритмом, представленным в разделе 3, произведем следующие операции.

1. Определим массовые характеристики системы: масса исследуемого тела в воздухе  $M_M = 0.9274$  кг, в воде  $M'_M = 0,2910$  кг, масса платформы  $M_{pl} = 0.7805$  кг, моменты инерции вращающихся роликов  $J_1 = 6.66 \cdot 10^{-6}$  кг · м<sup>2</sup>,  $J_2 = 9.58 \cdot 10^{-6}$  кг · м<sup>2</sup>,  $J_3 = 3.17 \cdot 10^{-6}$  кг · м<sup>2</sup>.

2. Выберем буксирующий груз массой  $m = 0.2680$  кг и определим интервал перемещения, на котором обтекание эллипсоида вращения близко к потенциальному. Для определения характера течения в разные моменты движения проводилось PIV-измерение поля скорости (линий токов) жидкости вблизи буксируемого тела на разных участках траектории (см. рис. 4).



**Рис. 4.** Линии тока жидкости при буксировании эллипсоида на различных участках траектории: а) момент начала движения; б)  $x = 0.4$  м; в)  $x = 0.8$  м

Перед тем как тело начало двигаться, наблюдается хаотическое движение окружающей жидкости (фоновые течения и волнение свободной поверхности, не превышающие 1 мм/с). На начальном этапе движения на рисунке 4, а скорость тела мала и скорость создаваемого им потока соизмерима со скоростью фоновых течений. Поэтому наблюдается нерегулярная структура потока.

По мере разгона тела скорость потока растет и начинает превосходить скорость фонового течения. Линии тока, соответствующие этому этапу движения, изображены на рисунке 4, б. Заметим, что не наблюдается какого-либо вихреобразования вблизи тела, а характер течения близок к потенциальному. Небольшие искажения линий тока связаны с фоновыми течениями.

На рисунке 4, в показаны линии тока, соответствующие условно установившемуся режиму обтекания (ускорение тела мало). На данном отрезке течение носит ярко выраженный вихревой характер. Течение за телом является отрывным и нерегулярным. Непредсказуемый сход вихрей приводит к нерегулярным пульсациям гидродинамического сопротивления и может существенно исказить результаты измерений.

В проведенном эксперименте было установлено, что целесообразно измерять присоединенные массы эллипсоида вращения при буксирующем грузе  $m = 0.2680$  кг на интервале  $x \in [0, 0.5]$  м.

3. Проведем серию экспериментов с корректирующей массой, равной  $M'_M = 0,2910$  кг. Каждую полученную зависимость  $x_e(t)$  аппроксимируем уравнением (9) методом наименьших квадратов и получаем  $f_a$  и  $k_a$ . Значения  $f_a$  и  $k_a$  представлены на рисунках 5, 6 в зависимости от номера эксперимента.

В результате статистической обработки получены средние значения  $\langle f_a \rangle = 0.5820$ ,  $\langle k_a \rangle = 0.3103$ , среднеквадратичные отклонения  $\sigma(f_a) = 0.1146$ ,  $\sigma(k_a) = 0.0898$ . Для проверки корректности полученных данных проведем оценку распределения ошибки для каждого из коэффициентов (рис. 7, 8).

4. Проведем серию экспериментов с буксированием погруженного эллипсоида вращения вдоль оси  $x$  (см. рис. 3). Для каждой экспериментальной зависимости  $x_e(t)$  методом наимень-

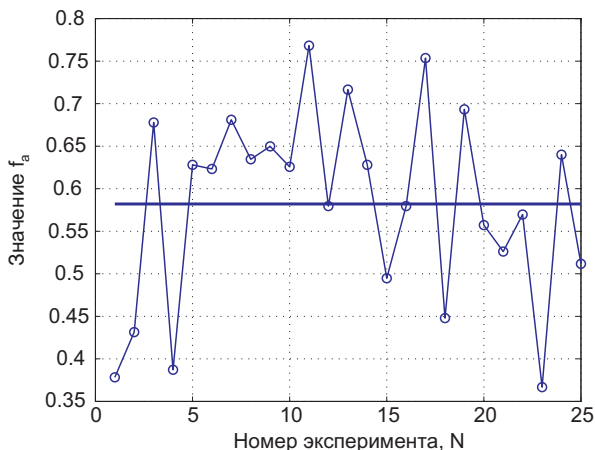


Рис. 5. Значения  $f_a$  при  $m = 0.2680$  кг

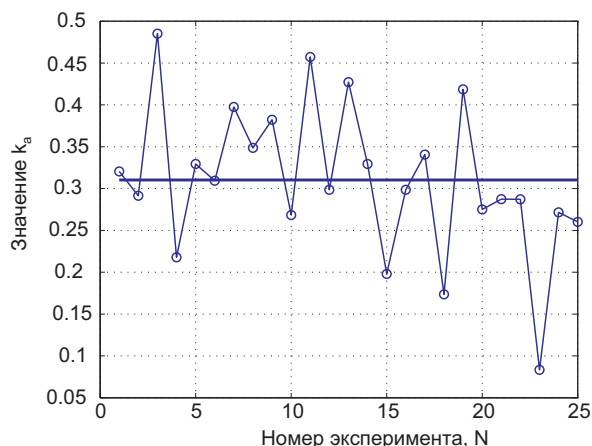


Рис. 6. Значения  $k_a$  при  $m = 0.2680$  кг

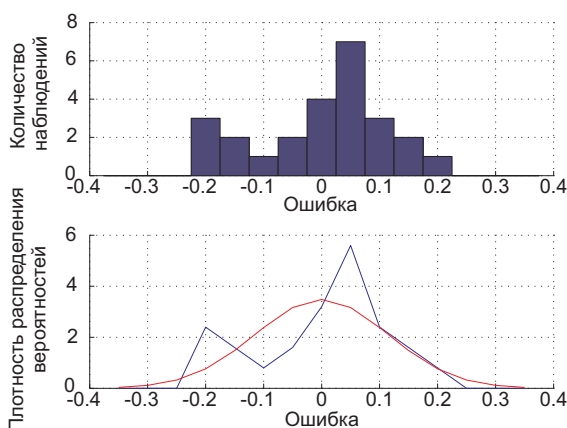


Рис. 7. Распределение ошибки  $f_a$

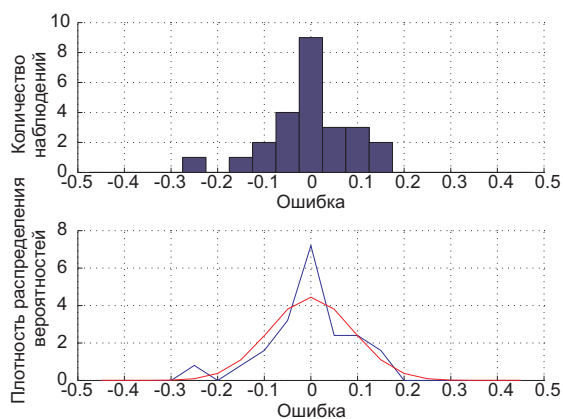


Рис. 8. Распределение ошибки  $k_a$

ших квадратов определяем значения  $f_{fx}$  и  $k_{fx}$ , при которых решение уравнения (13) наилучшим образом описывает экспериментальную зависимость  $x_e(t)$ . Полученные значения  $f_{fx}$  и  $k_{fx}$  приведены на рисунках 9, 10. Распределения ошибок измерения приведены на рисунках 11, 12.

В результате статистической обработки получены средние значения  $\langle f_{fx} \rangle = 0.1477$ ,  $\langle k_{fx} \rangle = 0.9380$  и среднеквадратичные отклонения  $\sigma(f_{fx}) = 0.0267$ ,  $\sigma(k_{fx}) = 0.2290$ .

5. Для расчета значения присоединенных масс и коэффициента лобового сопротивления подставим значения средних величин  $\langle f_a \rangle$ ,  $\langle f_{fx} \rangle$  и  $\langle k_a \rangle$ ,  $\langle k_{fx} \rangle$  в выражения (14) и (15). В результате получаем следующие значения:  $\lambda_x = 3.0930$  кг и  $C_x = 0.3345$ , относительные погрешности  $\sigma(\lambda_x) = 0.6445$ ,  $\sigma(C_x) = 0.0987$ .

При протягивании эллипсоида вдоль оси  $y$  повторяем процедуры, описанные в пунктах 4, 5. Полученные результаты представлены на рисунках 13, 14 и 15, 16.

В результате статистической обработки получены средние значения  $\langle f_{fy} \rangle = 0.0930$ ,  $\langle k_{fy} \rangle = 0.8660$  и среднеквадратичные отклонения  $\sigma(f_{fy}) = 0.0279$  и  $\sigma(k_{fy}) = 0.2063$ .

Подставив данные значения в выражения (14) и (15), получаем следующие значения:  $\lambda_y = 6.7909$  кг,  $C_y = 0.3059$ , относительные погрешности  $\sigma(\lambda_y) = 1.1194$ ,  $\sigma(C_y) = 0.0872$ .

Хотя теоретические значения попадают в доверительный интервал, погрешность эксперимента достаточно велика. Это может быть связано со следующими причинами:

- 1) влияние крепежа, который вносит небольшую ошибку за счет сопротивления самого кре-



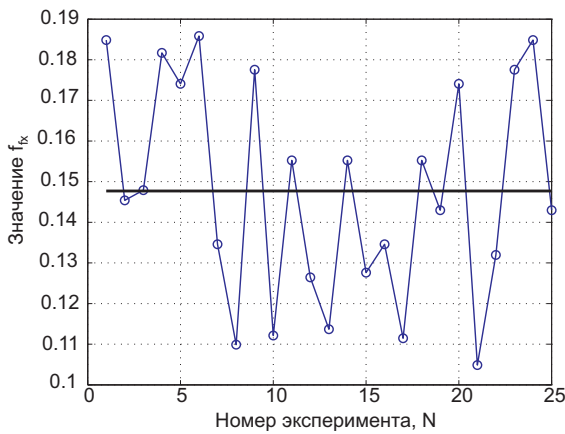


Рис. 9. Значения  $f_{fx}$  при  $m = 0.2680$  кг

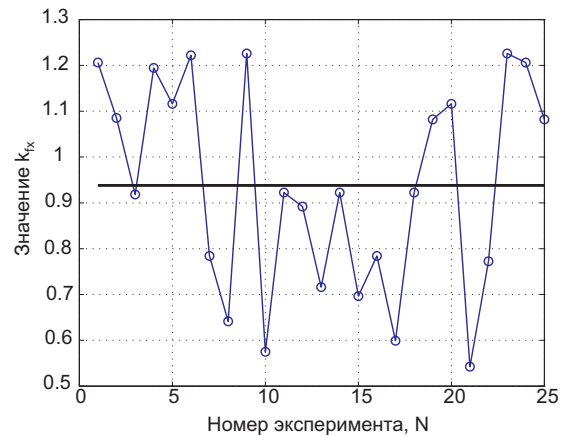


Рис. 10. Значения  $k_{fx}$  при  $m = 0.2680$  кг

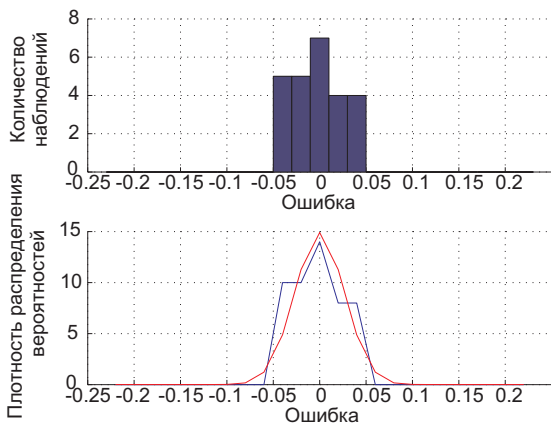


Рис. 11. Распределение ошибки  $f_{fx}$

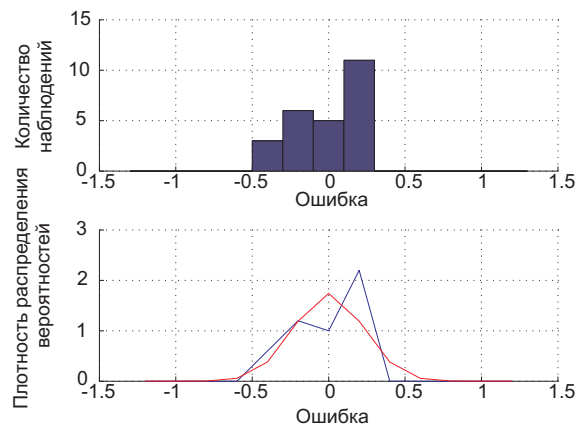


Рис. 12. Распределение ошибки  $k_{fx}$

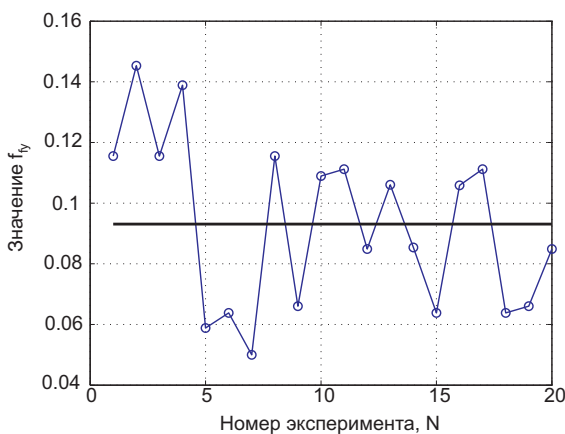


Рис. 13. Значения  $f_{fy}$  при  $m = 0.2680$  кг

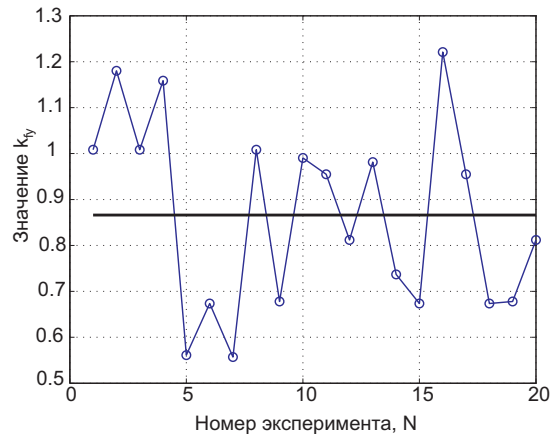
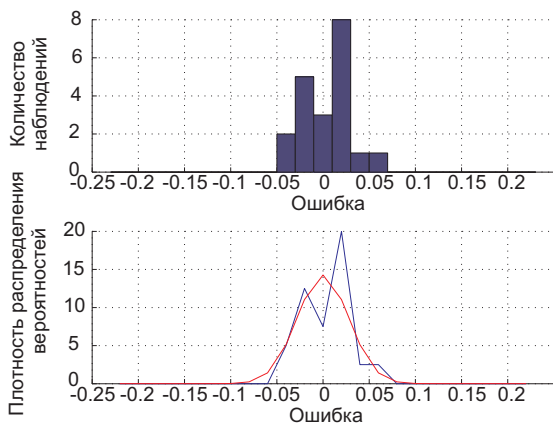
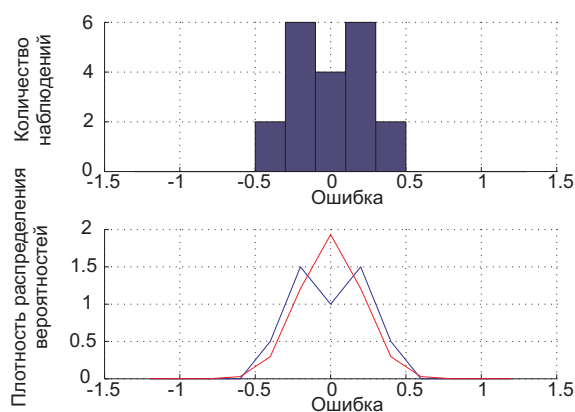


Рис. 14. Значения  $k_{fy}$  при  $m = 0.2680$  кг

пежа и процесса волнообразования;

- 2) возможное нерегулярное проскальзывание нити, приводящее к флуктуации эффективной массы;

Рис. 15. Распределение ошибки  $f_{fy}$ Рис. 16. Распределение ошибки  $k_{fy}$ 

- 3) выбранная модель трения недостаточно точно описывает трение, возникающее в данной конструкции;
- 4) влияние фоновых течений, несмотря на их небольшую величину;
- 5) неточность в определении участка траектории, на котором течение жидкости можно считать потенциальным.

По результатам эксперимента можно сделать вывод, что предложенная экспериментальная методика корректна и может применяться для определения присоединенных масс реальных объектов.

## § 5. Определение присоединенных масс безвинтового надводного робота

Воспользуемся данной методикой для определения присоединенных масс безвинтового надводного робота (см. рис. 17) [7]. Двигатель рассматриваемого устройства представляет собой два вращающихся в противоположные стороны с постоянной скоростью эксцентрика, расположенных внутри корпуса робота и приводимых в движение электродвигателем посредством зубчатых колес. Корпус надводного транспортного робота выполнен в виде полого эллиптического цилиндра с килем, расположенным вдоль длинной оси эллиптического основания, обеспечивающим существенно различные значения присоединенных масс в продольном и поперечном направлениях. Математическая модель движения такого робота описана в работах [4] и [ВК]<sup>2</sup>

Воспользуемся алгоритмом, представленном в § 3.

1. Определим массовые характеристики: масса тела  $M_M = 0.8844$  кг, так как исследуемое тело плавает по поверхности, то есть  $M'_M = 0$ .

2. Выбираем буксирующий груз массой  $m = 0.200$  кг и определяем интервал безвихревого движения, воспользовавшись системой PIV (см. рис. 18).

Из рисунков 18, *a-c* видно, что в момент старта и через 0.4 м пройденного пути в жидкости отсутствуют вихревые структуры, а через 0.8 м можно наблюдать сошедший вихрь. Экспериментально установлено, что безвихревым можно считать движение в интервале траектории  $x \in [0, 0.6]$  м при буксирующем грузе массой  $m = 0.200$  кг.

3. Вычисленные по изложенной выше методике значения  $f_a, k_a, f_{fx}, k_{fx}, f_{fy}, k_{fy}$  и распределения ошибок этих величин представлены на рисунках 19–30.

<sup>2</sup>[ВК] Ветчанин Е.В., Килин А.А. Свободное и управляемое движение в жидкости тела с подвижной внутренней массой при наличии циркуляции вокруг тела // Доклады Академии наук. 2016. Т. 466. № 3 (в печати).

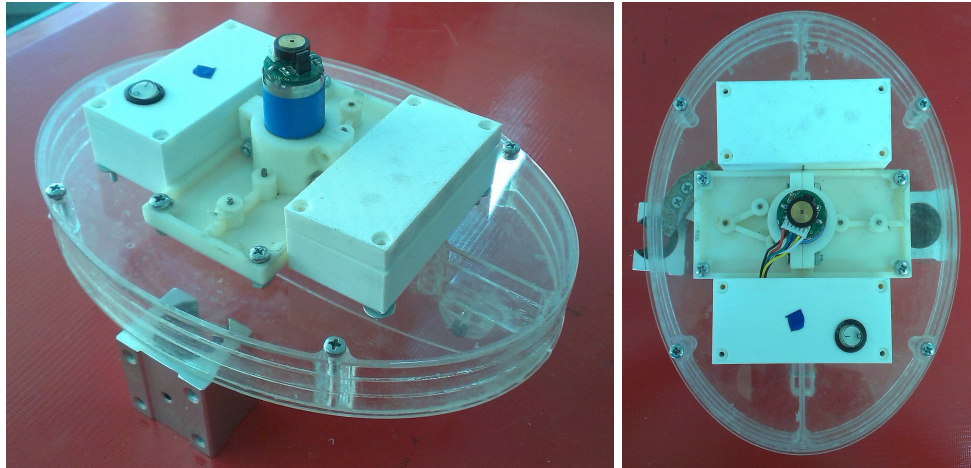


Рис. 17. Модель безвинтового надводного робота

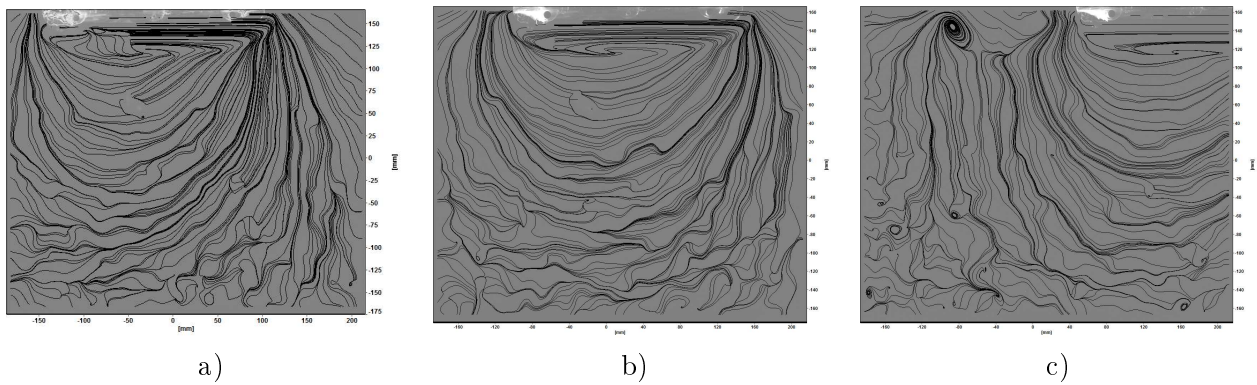


Рис. 18. Линии тока жидкости при движении безвинтового надводного робота на различных участках траектории: а) момент начала движения; б)  $x = 0.4$  м; с)  $x = 0.8$  м

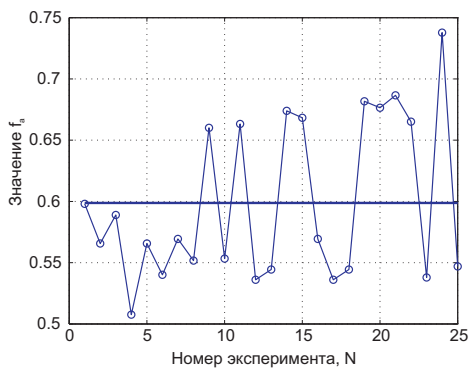


Рис. 19. Значения  $f_a$  при  $m = 0.200$  кг

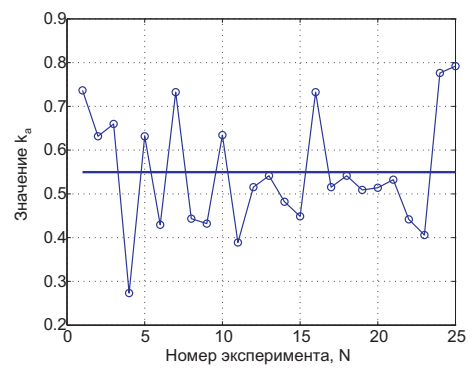


Рис. 20. Значения  $k_a$  при  $m = 0.200$  кг

В результате статистической обработки этих данных получены следующие значения коэффициентов:

$$\langle f_a \rangle = 0.5988, \langle k_a \rangle = 0.5497, \sigma(f_a) = 0.0655, \sigma(k_a) = 0.1353;$$

$$\langle f_{fx} \rangle = 0.2904, \langle k_{fx} \rangle = 0.9313, \sigma(f_{fx}) = 0.0459, \sigma(k_{fx}) = 0.1965;$$

$$\langle f_{fy} \rangle = 0.1825, \langle k_{fy} \rangle = 2.7399, \sigma(f_{fy}) = 0.0182, \sigma(k_{fy}) = 0.4305.$$

Соответственно присоединенные массы мобильного робота и коэффициенты лобового со-

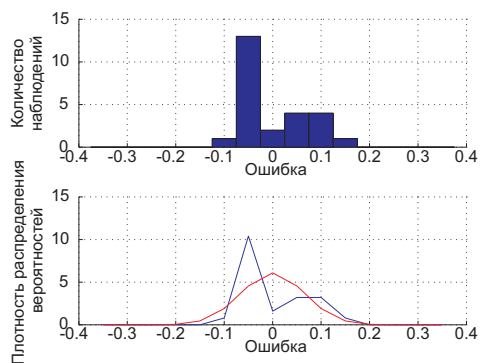


Рис. 21. Распределение ошибки  $f_a$

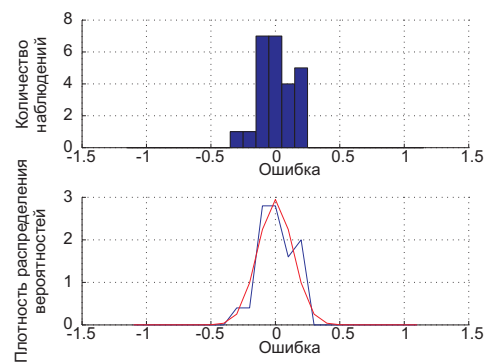


Рис. 22. Распределение ошибки  $k_a$

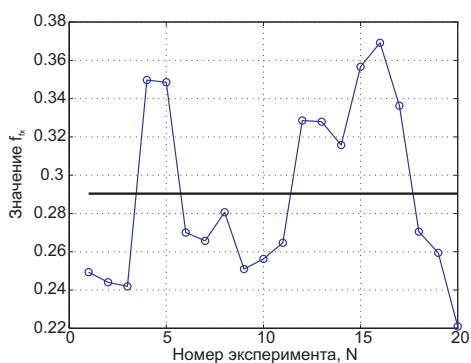


Рис. 23. Значения  $f_{fx}$  при  $m = 0.200$  кг

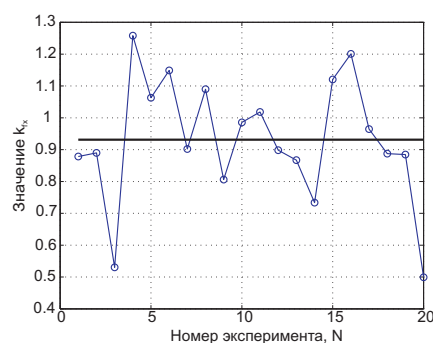


Рис. 24. Значения  $k_{fx}$  при  $m = 0.200$  кг

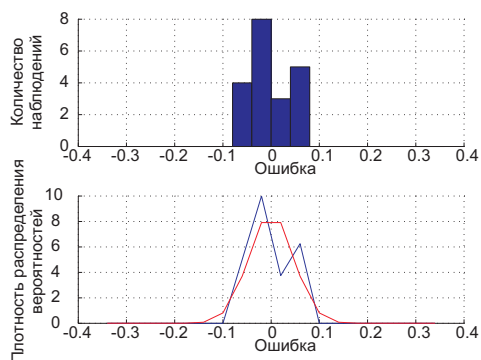


Рис. 25. Распределение ошибки  $f_{fx}$

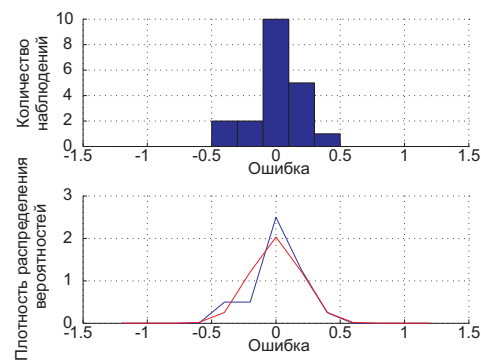


Рис. 26. Распределение ошибки  $k_{fx}$

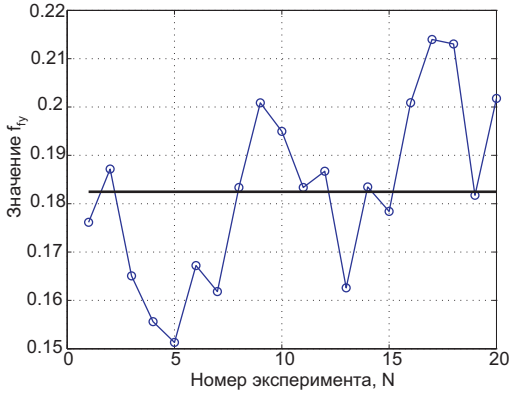
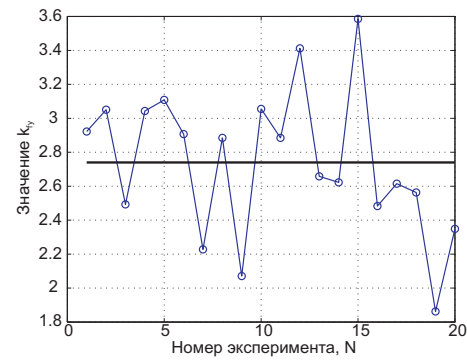
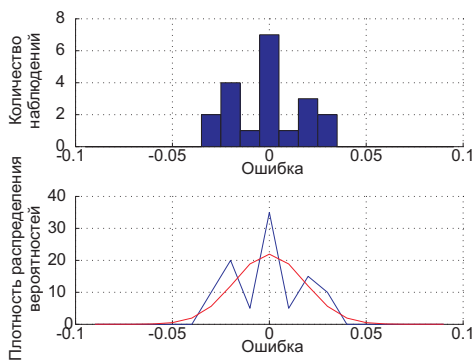
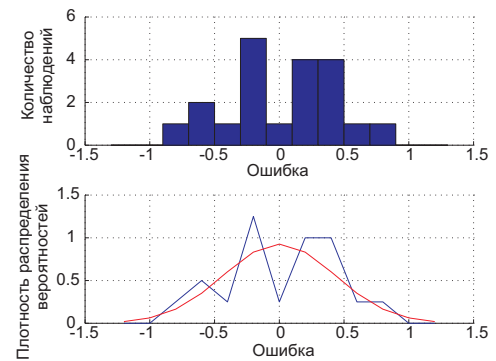
противления следующие:

$$\lambda_x = 0.2683 \text{ кг}, \sigma(\lambda_x) = 0.0451; \lambda_y = 1.5457 \text{ кг}, \sigma(\lambda_y) = 0.1868;$$

$$C_x = 0.0661, \sigma(C_x) = 0.0177; C_y = 0.1313, \sigma(C_y) = 0.0330.$$

### § 6. Заключение

В результате проделанной работы разработаны лабораторный комплекс и методика проведения эксперимента по определению присоединенных масс тел различной формы методом разгона и торможения. Разработана математическая модель движения тела по направляющим в сопротивляющейся среде. Для проверки адекватности методики проведен эксперимент по определению присоединенных масс эллипсоида вращения. С помощью данного эксперимента

Рис. 27. Значения  $f_{fy}$  при  $m = 0.200$  кгРис. 28. Значения  $k_{fy}$  при  $m = 0.200$  кгРис. 29. Распределение ошибки  $f_{fy}$ Рис. 30. Распределение ошибки  $k_{fy}$ 

подтверждена приемлемость разработанной методики и указаны возможные причины недостаточной точности измерений. Проведен эксперимент по определению присоединенных масс безвинтового надводного робота.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павлюков В.П., Гулин В.А. Стенд для определения присоединенных масс // Авторское свидетельство СССР № 658034. 1979. Кл. В63 В9/02, 18.08.1980. Бюл. № 15.
2. Воробьев П.С. Учет влияния свободной поверхности жидкости на величину присоединенных масс при разгоне и торможения судна // Труды НИИВТа. Новосибирск. 1970. Вып. 45. С. 126–136.
3. Дитман А.О., Окунев С.Н. Экспериментальная точность реализации магнитодинамической аналогии // Некоторые вопросы прикладной математики. Киев. 1969. Вып. 4. С. 21–25.
4. Килин А.А., Ветчанин Е.В. Управление движением твердого тела в жидкости с помощью двух подвижных масс // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 4. С. 633–645.
5. Короткин А.И. Присоединенные массы судостроительных конструкций: Справочник. СПб.: Мор Вест, 2007. 448 с.
6. Патент на полезную модель № 143490, Российская Федерация, МПК G01M 1/16 (2006.01). «Устройство для определения присоединенных масс» / Васильев В.А., Ницкий А.Ю. Патентообладатель: Общество с ограниченной ответственностью Научно-технический центр «СИГМА».
7. Патент на полезную модель № 153711, Российская Федерация, МПК B62D57/04. «Безвинтовой надводный робот» / Борисов А.В., Килин А.А. Заявитель и патентообладатель: ФГБОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова»; заявл. 03.10.2014; опубл. 27.07.2015.
8. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 576 с.
9. Рязанов Г.А. Электрическое моделирование с применением вихревых полей. М.: Наука, 1969. 254 с.

10. Сабанеев В.С. Влияние глубины погружения на величину присоединенной массы эллипсоида вращения // Учен. зап. ЛГУ. Сер. Матем. наук. 1960. Т. 280. Вып. 35. С. 242–253.
11. Хаскинд М.Д., Римаи И.С. Метод определения характеристик качки корабля // Изв. АН СССР. ОТН. 1946. № 10. С. 1379–1384.

Поступила в редакцию 07.11.2015

Кленов Анатолий Игоревич, аспирант, Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7.  
E-mail: tolik-klenov@mail.ru

Ветчанин Евгений Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7;  
Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.  
E-mail: eugene186@mail.ru

Килин Александр Александрович, д. ф.-м. н., профессор, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;  
Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7.  
E-mail: aka@rcd.ru

**A. I. Klenov, E. V. Vetchanin, A. A. Kilin**

**Experimental determination of the added masses by method of towing**

*Keywords:* added mass, movement on a free surface, hydrodynamic resistance, method of towing.

MSC: 76-05

This paper is concerned with the experimental determination of the added masses of bodies completely or partially immersed in a fluid. The paper presents an experimental setup, a technique of the experiment and an underlying mathematical model. The method of determining the added masses is based on the towing of the body with a given propelling force. It is known (from theory) that the concept of an added mass arises under the assumption concerning the potentiality of flow over the body. In this context, the authors have performed PIV visualization of flows generated by the towed body, and defined a part of the trajectory for which the flow can be considered as potential. For verification of the technique, a number of experiments have been performed to determine the added masses of a spheroid. The measurement results are in agreement with the known reference data. The added masses of a screwless freeboard robot have been defined using the developed technique.

#### REFERENCES

1. Pavlyukov V.P., Gulin V.A. *Experimental setup for determining the added masses*, USSR Certificate of Authorship no. 658034, 1979 (in Russian).
2. Vorob'ev P.S. Accounting of the influence of the fluid free surface on the value of added mass during acceleration and deceleration of a ship, *Tr. Novosib. Inst. Inzh. Vodn. Transp.*, Novosibirsk, 1970, no. 45, pp. 126–136 (in Russian).
3. Ditman A.A., Okunev S.N. Experimental precision of realization of magnetodynamic analogy, *Nekot. Vopr. Prikl. Mat.*, Kiev, 1969, no. 4, pp. 21–25 (in Russian).
4. Kilin A.A., Vetchanin E.V. The control of the motion through an ideal fluid of a rigid body by means of two moving masses, *Nelin. Dinam.*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 633–645 (in Russian).
5. Korotkin A.I. *Prisoedinennyye massy sudostroitel'nykh konstruksii: Spravochnik* (Added masses of the ship structures. Handbook), Saint Petersburg: Mor West, 2007, 448 p.
6. Vasil'ev V.I., Nitskii A.Yu. *Ustroistvo dlya opredeleniya prisoedinennykh mass* (The device for determining added masses). Patent RF, no. 143490, 2006.
7. Borisov A.V., Kilin A.A. *Bezvintovoi nadvodnyi robot* (Screwless surface robot). Patent RF, no. 153711, 2015.

8. Prandtl L. *Gidroaeromekhanika* (Fluid mechanics), Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2000, 576 p.
9. Ryazanov G.A. *Elektricheskoe modelirovanie s primeneniem vikhrevykh polei* (Electrical simulation using eddy fields), Moscow: Nauka, 1969, 254 p.
10. Sabaneev V.S. The influence of depth of immersion on the value of the spheroid's added mass, *Uch. Zap. Leningr. Gos. Univ., Ser. Mat. Nauk*, 1960, vol. 280, no. 35, pp. 242–253 (in Russian).
11. Khaskind M.D., Riman I.S. The method of determining the characteristics of a ship pitching, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tekh. Nauk*, 1946, no. 10, pp. 1379–1384 (in Russian).

Received 07.11.2015

Klenov Anatolii Igorevich, post-graduate student, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, ul. Studencheskaya, 7, Izhevsk, 426069, Russia.

E-mail: tolik-klenov@mail.ru

Vetchanin Evgenii Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, ul. Studencheskaya, 7, Izhevsk, 426069, Russia;

Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

E-mail: eugene186@mail.ru

Kilin Aleksandr Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;

Kalashnikov Izhevsk State Technical University, ul. Studencheskaya, 7, Izhevsk, 426069, Russia.

E-mail: aka@rcd.ru