

УДК 531.55

© В. В. Чистяков

ВЫСОКОТОЧНОЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ТЯЖЕЛОЙ ТОЧКИ В ВОЗДУШНОЙ СРЕДЕ С КВАДРАТИЧНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ И БОКОВОМ ВЕТРЕ

Проективно-двойственные переменные использованы для описания геометрии движения точечной массы в движущейся системе наблюдения, связанной с воздушной средой, характеризующейся квадратичным по скорости законом для лобового сопротивления. Через обратный переход к неподвижной системе и обратное преобразование Лагранжа выведены степенные формулы для абсолютных координат и времени: $x(b)$, $y(b)$, $z(b)$ и $t(b)$, $b = \operatorname{tg} \Theta$ — наклон относительной траектории, в области малых углов вылета $\Theta_0 < 15^\circ$. Выражения используют ключевые параметры движения: $b_0 = \operatorname{tg} \Theta_0$, Θ_0 — угол вылета, R_a — вершинный радиус кривизны траектории и β_0 — отношение квадрата разворотной скорости к квадрату предельной скорости. Малое отклонение полученных аппроксимаций от классических интегральных выражений обусловлено эффектом автоподстройки, заключающемся в уменьшении параметра β_0 с ростом начального наклона траектории b_0 . Для стартовых сил сопротивления, не превышавших 1.15 mg , и скоростей ветра, меньших 40 м/с , и в вышеуказанном интервале углов вылета абсолютные погрешности составляли величины порядка дециметров, а относительные не превышали десятых долей процента. Ввиду того, что численная реализация формул «почти» алгебраическая, они могут быть внедрены в простейшие баллистические калькуляторы как используемые для стрельбы в условиях ветра, так и с движущегося орудия/по движущейся мишени.

Ключевые слова: квадратичный закон сопротивления, скорость ветра, снаряд, проективно-двойственные координаты, баллистический, малоугловая область, движущееся орудие, траектория, параметрическое уравнение.

Введение

Вывод вычислительно простых в явном виде формул, описывающих свободное движение точечной массы в среде с квадратичным по скорости лобовым сопротивлением $\vec{R} = -\alpha m g V \vec{V}$, остается актуальной проблемой со времен пионерской работы Леонарда Эйлера [1]. Актуальны они и в наше далеко не мирное время новых угроз и вызовов, для нейтрализации которых востребованы высокоточные артиллерия, дальние снайперы, разрабатываемые боевые роботы и т. д. Потребность в таких формулах объясняется и невоенными нуждами, такими как, например, запросы спортивной механики и нелинейной динамики резистивного движения вообще.

Собственно, на стыке нелинейной динамики и вычислительной механики (Computational Mechanics) эта проблема и находит решение, одновременно внося вклад в прикладную математику.

За более чем двухвековой период был наработан колоссальный материал по проблеме. И хотя основные фундаментальные результаты были получены и подытожены на исходе XIX века [2], тем не менее и в нашем столетии новые подходы и методы продолжают развиваться, привлекая при этом аппарат современной математики (см., например, [3]).

Ранее автором [4] был использован подход дифференциальной геометрии, базирующийся на преобразовании Лежандра, для интегрирования уравнений свободного движения точечной массы при вышеупомянутом сопротивлении. Был получен ряд формул для области углов прицельной стрельбы ($\Theta_0 < 15^\circ$), точность которых выигрывала в сравнении с известными выражениями за счет так называемого эффекта *автоподстройки*. Кроме того, они обладали высокой наглядностью используемых коэффициентов и параметров, по большей части относимых к вершине траектории, так называемых вершинных или разворотных параметров.

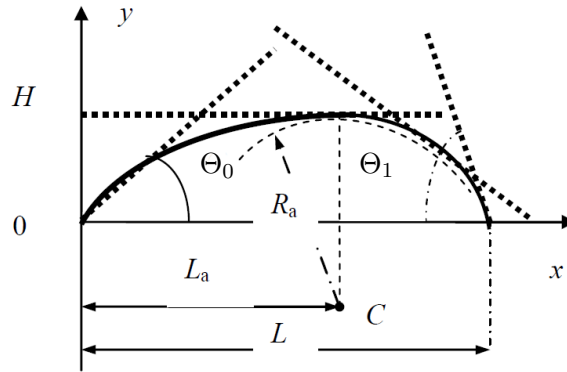


Рис. 1. Траектория точки (сплошная) и ее касательное расслоение (пунктир)

В работе [5] автором в развитие базирующегося на преобразовании Лежандра подхода был предложен алгоритм численного интегрирования уравнений плоскопараллельного полета осесимметричного снаряда также при полном наборе квадратичных по скорости аэродинамических функций и в условиях ветрового воздействия. Однако там заведомо непростая задача изначально не предполагала получения каких-либо явных формул и решалась через использование различных разностных схем для динамической системы из двух дифференциальных уравнений, одно из которых отвечало за траекторию центра масс, другое — за поведение на ней угла атаки.

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию подхода [4] с целью получения робастных алгебраических формул применительно к условиям равномерного движения воздушной среды (ветра) или то же самое для движущейся мишени или орудия. Последнее, в частности, отвечает реалиям современного морского боя с участием высокоскоростных судов и при неспокойных метеоусловиях.

§ 1. Стационарные условия: основные результаты

Вместо традиционных декартовых координат $x(t)$ и $y(t)$ (как функций времени t от начала движения) рассматриваются так называемые проективно-двойственные переменные: угловой коэффициент касательной к траектории $b = \text{tg } \Theta$ и так называемое прерывание (intercept) $a(\Theta(b)) \equiv a(b)$ (рис. 1).

Уравнение выходящей из начала координат траектории в них имеет вид [4]

$$\begin{cases} a'''_{bbb} = 2\alpha g(a''_{bb})^2 \sqrt{1+b^2}, & a(b_0) = \frac{da(b_0)}{db} = 0, \\ \frac{d^2 a(b_0)}{db^2} = \frac{V_0^2 \cos^2 \Theta_0}{g} = \frac{V_0^2}{g(1+b_0^2)}, \end{cases}$$

и оно легко интегрируется как

$$x(b) = -a'_b = - \int_{b_0}^b a''_{\tilde{b}\tilde{b}}(\tilde{b}) d\tilde{b} = -R_a \int_{b_0}^b \frac{d\tilde{b}}{1 - \beta_0 (\tilde{b}\sqrt{\tilde{b}^2 + 1} + \text{arcsch } \tilde{b})}, \tag{1}$$

$$y(b) = - \int_{b_0}^b \tilde{b} a''_{\tilde{b}\tilde{b}}(\tilde{b}) d\tilde{b} = -R_a \int_{b_0}^b \frac{\tilde{b} d\tilde{b}}{1 - \beta_0 (\tilde{b}\sqrt{\tilde{b}^2 + 1} + \text{arcsch } \tilde{b})}, \tag{2}$$

$$t(b) = \int_{b_0}^b \frac{d\tilde{b}}{\dot{b}(\tilde{b})} = -\sqrt{\frac{R_a}{g}} \int_{b_0}^b \frac{d\tilde{b}}{1 - \beta_0 (\tilde{b}\sqrt{\tilde{b}^2 + 1} + \text{arcsch } \tilde{b})}. \tag{3}$$

Здесь безразмерный множитель в знаменателях подынтегральных выражений есть квадрат отношения вершинной скорости V_a к предельной скорости V_T падения с неограниченной высоты:

$$\beta_0 = \frac{V_a^2}{V_T^2} = \frac{\alpha V_0^2}{1 + b_0^2 + \alpha V_0^2 (b_0 \sqrt{b_0^2 + 1} + \operatorname{arcsch} b_0)} = \frac{\alpha V_0^2 \cos^2 \Theta_0}{1 + \alpha V_0^2 \left(\sin \Theta_0 + \cos^2 \Theta_0 \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\Theta_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)}, \quad (4)$$

и он зависит от начальных значений скорости V_0 и наклона ее вектора $b_0 = \operatorname{tg} \Theta_0$, а также от коэффициента сопротивления α . Величина эта служит своего рода безразмерным коэффициентом сопротивления с поправкой на угол запуска.

Вершинный радиус кривизны траектории

$$R_a = \frac{V_0^2 \cos^2 \Theta_0}{g \left(1 + \alpha V_0^2 \left(\sin \Theta_0 + \cos^2 \Theta_0 \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\Theta_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right)} = \frac{\alpha V_0^2}{g \left(1 + b_0^2 + \alpha V_0^2 (b_0 \sqrt{b_0^2 + 1} + \operatorname{arcsch} b_0) \right)} = \frac{\beta_0}{\alpha g}$$

служит естественной единицей длины, а в комбинации с ускорением g определяет временной масштаб полета точечной массы (3).

Обращает на себя внимание «почти» алгебраичность параметров $\beta_0(b_0)$ и $R_a(b_0)$, включающих в себя только хорошо интерполируемый кубическим полиномом гиперболический арксинус. Это существенно упрощает численную реализацию выражений, если использовать в качестве меры прицеливания не угол Θ_0 — отношение дуги и радиуса, но наклон b_0 — отношение катетов.

Адаптация формул (1)–(3) для малугловых траекторий позволила получить разложения для координат и времени в формальный ряд Маклорена по b_0 и β_0 , трактуя эти две переменные как независимые. Например, для временной переменной в 5-м порядке по начальному наклону b_0 получается

$$t(b) \approx \sqrt{\frac{R_a}{g}} \left(b_0 - b + \frac{\beta_0}{2} (b_0^2 - b^2) + \frac{\beta_0^2}{2} (b_0^3 - b^3) + \frac{\beta_0 + 24\beta_0^3}{24} (b^4 - b_0^4) + \frac{(4\beta_0^2 - 5\beta_0^4)(b^5 - b_0^5)}{30} \right), \quad (5)$$

для координат в 5-м и 6-м —

$$x(b) \approx -R_a \left(b - b_0 + \beta_0 (b^2 - b_0^2) + \frac{4\beta_0^2}{3} (b^3 - b_0^3) + \frac{\beta_0 + 24\beta_0^3}{12} (b^4 - b_0^4) + \frac{4\beta_0^2 + 48\beta_0^4}{15} (b^5 - b_0^5) \right), \quad (6)$$

$$y(b) \approx -\frac{R_a}{2} \left(b^2 - b_0^2 + \frac{4\beta_0}{3} (b^3 - b_0^3) + 2\beta_0^2 (b^4 - b_0^4) + \frac{2(\beta_0 + 24\beta_0^3)}{15} (b^5 - b_0^5) + \frac{2(2\beta_0^2 + 24\beta_0^4)}{9} (b^6 - b_0^6) \right). \quad (7)$$

Наибольшая степень здесь выбиралась исходя из дальнейшего поведения числовых коэффициентов: как только они начинали катастрофически нарастать, разложение обрывалось. В этом смысле выгодное положение — у вертикальной координаты, приращение которой от вершины $b_a = 0$ начинается с квадратичного по наклону слагаемого.

Вышеприведенные соотношения уже в усеченном 4-м порядке для (5), (6) и 5-м для (7) гарантировали достаточно высокую точность в десятые доли процента не только в области прицельной стрельбы, но и далеко за ее пределами вплоть до углов 30° и более. Это имело место вследствие уже упомянутого эффекта автоподстройки точности, вызванного тем, что параметр β_0 (4) убывал с ростом начального наклона, компенсируя тем самым рост степеней последнего.

Такой эффект позволил ограничиться в разложении относительно невысокой 3-й степенью и получить кубическое уравнение малоугловой траектории:

$$y_3(x) = b_0x + \left(\frac{1}{2R_a} - \frac{b_0}{L_a}\right)x^2 + \left(\frac{b_0}{3L_a^2} - \frac{1}{3L_aR_a}\right)x^3,$$

в котором абсцисса вершины L_a приближалась выражением пятого порядка по b_0 :

$$L_a = R_a \left(b_0 + \beta_0 b_0^2 + \frac{4}{3} \beta_0^2 b_0^3 + \frac{\beta_0 + 24\beta_0^3}{12} b_0^4 + \frac{4\beta_0^2 + 48\beta_0^4}{15} b_0^5 \right).$$

Что же касается параметрических уравнений траектории (6) и (7), то их точность при начальных силах сопротивления, в 2–2.5 раза превышавших вес, сохранялась на удовлетворительном уровне в малоугловой области и даже восстанавливалась за ее пределами.

§ 2. Учет продольного ветра

Пусть скорость ветра направлена по/против оси Ox и равняется u , и она постоянна на протяжении полета. Движение точечной массы рассматривается в двух системах наблюдения: подвижной, связанной с воздухом, и неподвижной с началом в точке старта.

При переходе в подвижную систему начальные условия пересчитываются по алгебраическим формулам

$$\begin{cases} b'_0 = \operatorname{tg} \Theta'_0 = \frac{V_0 \sin \Theta_0}{V_0 \cos \Theta_0 - u} = \frac{b_0}{1 - \frac{u}{V_0} \sqrt{1 + b_0^2}}, \\ V'_0 \equiv W_0 = \sqrt{V_0^2 + u^2 - 2V_0 \cos \Theta_0 u} = V_0 \sqrt{1 - \frac{2u}{V_0 \sqrt{1 + b_0^2}} \left(\frac{u}{V_0}\right)^2}, \end{cases} \quad (8)$$

а вместе с ними и важный параметр β'_0 . (В дальнейшем будем опускать штрихи, предварительно напомнив, что речь идет о подвижной системе.)

Уравнение абсолютной траектории получается из уравнения относительной траектории простым преобразованием горизонтальной координаты как $x = x' + ut$, где x' и t зависят от наклона вектора относительной скорости b' .

Численные расчеты производились при помощи продукта Maple 15 для различных значений коэффициентов лобового сопротивления α , начальной скорости V_0 , переносной скорости u и угла запуска Θ_0 . При этом фиксировалось как текущее отклонение приближенной траектории (5)–(7) от точной (1)–(2), так и расхождения в основных характеристиках абсолютной траектории: дальности полета L , высоте H_a , абсциссе вершины L_a . Для нахождения значений последних наклон приземления в движущейся системе определялся по высокоточной в малоугловой области формуле

$$b_1(b_0) \approx -b_0 - \frac{4\beta_0}{3} b_0^2 - \frac{16\beta_0^2}{9} b_0^3 - \left(\frac{2\beta_0}{15} + \frac{352\beta_0^3}{135} \right) b_0^4.$$

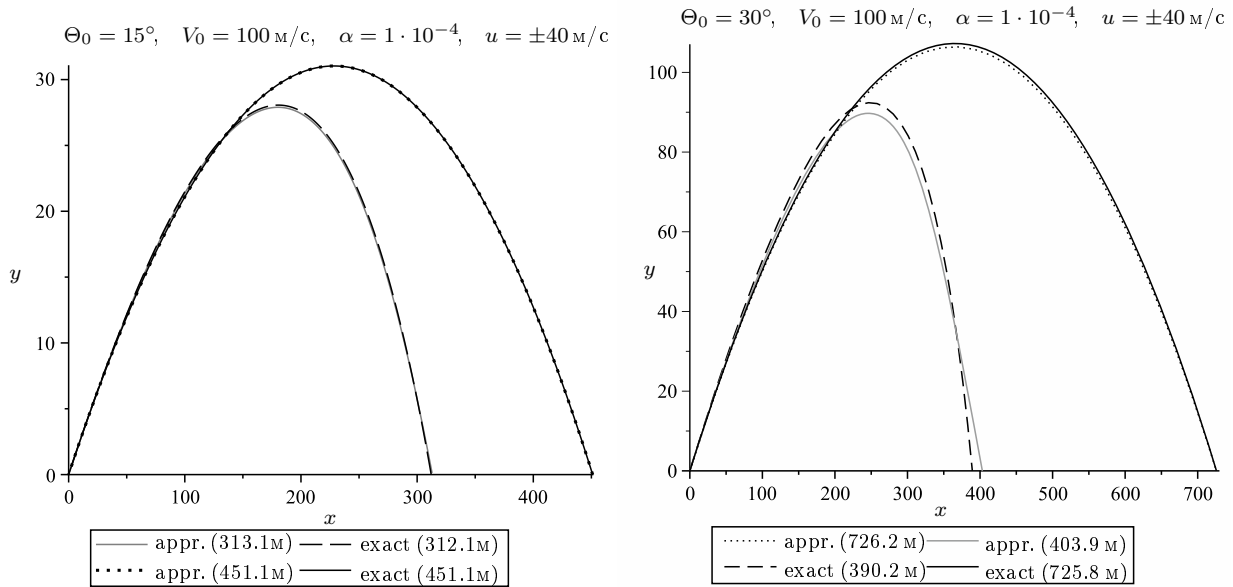


Рис. 2. Точные (exact) и приближенные (appr.) траектории при встречном и попутном ветре, имеющем скорость 40 м/с, и угле запуска $\Theta_0 = 15^\circ$

Рис. 3. Точные (exact) и приближенные (appr.) траектории при встречном и попутном ветре, имеющем скорость 40 м/с, и угле запуска $\Theta_0 = 30^\circ$

Расхождения росли по мере увеличения стартовой силы сопротивления в подвижной системе, особенно при сильном встречном ветре. Однако здесь также имел место эффект автоподстройки точности: возрастание относительной скорости при встречном движении среды приводило к уменьшению начального наклона (8), и вопрос точности — вопрос конкуренции параметров β'_0 и b'_0 . При попутном ветре имела место ситуация иная — уменьшение β'_0 и рост b'_0 .

Для демонстрации точности на графиках точных и приближенных кривых (рис. 2) приводятся данные по основным показателям для номинального граничного значения малоугловой области $\Theta_0 = 15^\circ$. На существенно меньших значениях угла, порядка нескольких градусов, влияние ветра несущественно, разве только при аномально больших значениях u , порядка скорости запуска или даже больше. Для граничного значения при попутном и встречном ветре, имеющем скорость $u = 40$ м/с, и для начальной скорости $V_0 = 100$ м/с точные и приближенные значения дальности L составили 451.1 и 451.1 м, 312.6 и 313.1 м соответственно.

Что же касается высоты H_a и абсциссы вершины L_a , то приближенные и точные значения на тех же значениях параметров при встречном ветре составили 27.90 и 28.06 м, 180.3 и 180.6 м соответственно. Для попутного ветра — 31.03 и 31.07 м, 228.5 и 228.5 м соответственно.

Обращает на себя внимание аномальная точность характеристик траектории в случае попутного ветра, что объясняется преимущественным уменьшением параметра по сравнению с увеличением (8). Точность сохранялась и при очень большом угле запуска, вдвое превышающем малоугловую границу ($\Theta_0 = 30^\circ$), составляя примерно 40 см при дальности 725.8 м. Между тем как при встречном ветре имела место ее (точности) катастрофическая потеря до недопустимых в баллистике 3.5 %, или 13 м (рис. 3). Это происходило за счет почти четырехкратного роста стартовой силы сопротивления, с 0.467 мг до 1.853 мг, при перемене направления ветра с попутного на встречный.

В то же время при $\Theta_0 = 15^\circ$ больший относительный и абсолютный рост силы от 0.38 мг до 1.93 мг сохранял хорошую точность по дальности в 0.17 % (~50 см).

Таким образом, для попутного ветра, сравнимого по скорости со скоростью запуска, хорошо сохраняется точность нахождения траектории даже для высоких начальных наклонов $b_0 = \text{tg } \Theta_0$, сравнимых с единицей. Этот факт делает формулы (5)–(7) перспективными для баллистического калькулятора танковой пушки и даже миномета. Естественно, ветер с ура-

ганной скоростью в 40 м/с не является условием применения таких орудий, но, как уже было сказано, формулы применимы и для движущегося гиросtabilизированного орудия, в данном случае удаляющегося от мишени со скоростью 144 км/ч.

Что касается текущих расхождений между точной и приближенной траекториями, то ввиду одинакового механического смысла параметра в качестве меры «текущей» точности использовались относительные погрешности. Для вертикальной координаты:

$$\delta Y \equiv 100\% \cdot \delta y(b)/y(b) = 100 \cdot \left[1 - \left(b^2 - b_0^2 + \frac{4\beta_0}{3} (b^3 - b_0^3) + 2\beta_0^2 (b^4 - b_0^4) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\frac{\beta_0 + 24\beta_0^3}{15} (b^5 - b_0^5) + 2\frac{2\beta_0^2 + 24\beta_0^4}{15} (b^6 - b_0^6) \right) / \left(2 \int_{b_0}^b \frac{\tilde{b}d\tilde{b}}{1 - \beta_0 (\tilde{b}\sqrt{\tilde{b}^2 + 1} + \operatorname{arcsinh} \tilde{b})} \right) \right],$$

аналогично для абсолютной координаты: $x = x' + ut$ (за громоздкостью не приводится). Однако по понятным причинам погрешности δY и δX вблизи старта и приземления (δY) могут оказаться высокими, что и проявляется на 3D-графиках (рис. 4). Что касается абсолютных ошибок, то, как уже было показано для граничного угла, они ничтожны при попутном ветре и незначительны при встречном.

§ 3. Боковой ветер

Обозначим скорость бокового ветра как w , чтобы различать с продольным, попутным либо встречным. Относительная траектория лежит в плоскости, повернутой на угол

$$\phi = \arcsin \frac{w}{\sqrt{V_0^2 \cos^2 \Theta_0 + w^2}} = \arcsin \left(\frac{w}{V_0} \sqrt{\frac{1 + b_0^2}{1 + (w/V_0)^2 (1 + b_0^2)}} \right)$$

в направлении, противоположном ветру по отношению к безветренной плоскости движения (плоскости выстрела). Соответственно, ось x' также повернута относительно «безветренной» оси Ox неподвижной системы на тот же угол.

Необходимо введение третьей горизонтальной координаты z , дополняющей систему до правой тройки. Уравнение относительной траектории получается пересчетом наклона и скорости запуска по соотношениям

$$b'_0 = \operatorname{tg} \Theta'_0 = \frac{V_0 \sin \Theta_0}{\sqrt{V_0^2 \cos^2 \Theta_0 + w^2}} = \frac{b_0}{\sqrt{1 + (1 + b_0^2) (w/V_0)^2}}, \\ W_0 = \sqrt{V_0^2 + w^2} \approx V_0 \left(1 + \frac{w^2}{2V_0^2} \right), \quad w \ll V_0 \cos \Theta_0.$$

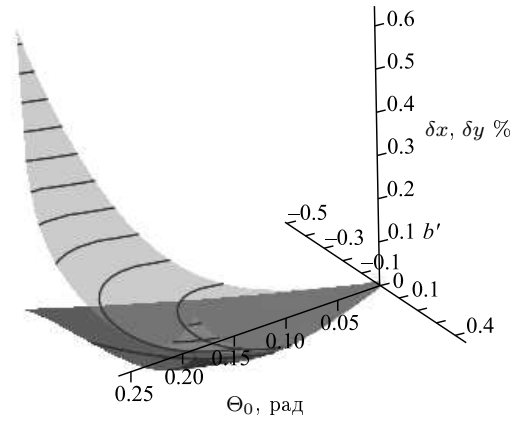
Переход к абсолютной траектории осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = x' \cos \phi = \frac{x'}{\sqrt{1 + (w/V_0)^2 (1 + b_0^2)}}, \\ z = x' \sin \phi - wt = x' \frac{w}{V_0} \sqrt{\frac{1 + b_0^2}{1 + (w/V_0)^2 (1 + b_0^2)}} - wt, \quad y = y'. \end{cases}$$

Так как абсолютная траектория движения не будет плоской, то задать ее лучше в параметрической форме. И проще, и удобней, если параметр b' — наклон траектории относительной.

И здесь использование степенных приближений дает высокоточные результаты для всех трех координат внутри малоугловой области (рис. 6) при начальных сопротивлениях, превышающих примерно на 15 % вес материальной точки. Однако за ее пределами ($\Theta_0 = 20^\circ$) при такой аномально большой переносной скорости $w = 40$ м/с стремительно ухудшается точность

$u = 40 \text{ м/с}, V_0 = 100 \text{ м/с}, \alpha = 1 \cdot 10^{-4}$



$\Theta_0 = 15^\circ, V_0 = 100 \text{ м/с}, \alpha = 1 \cdot 10^{-4}, w = 40 \text{ м/с}$

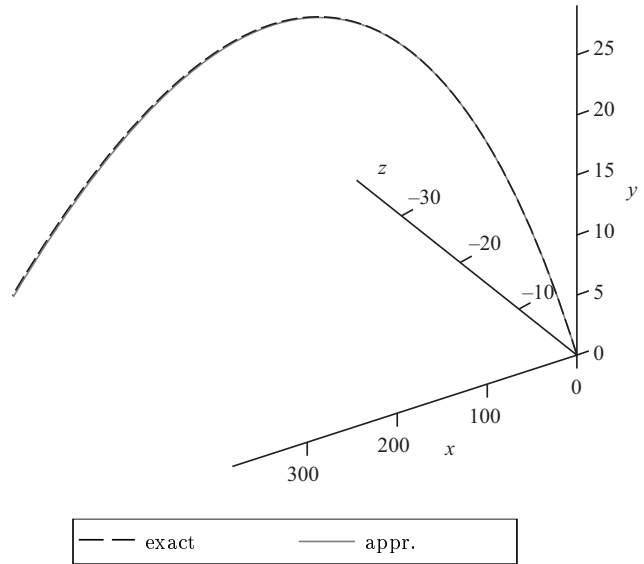
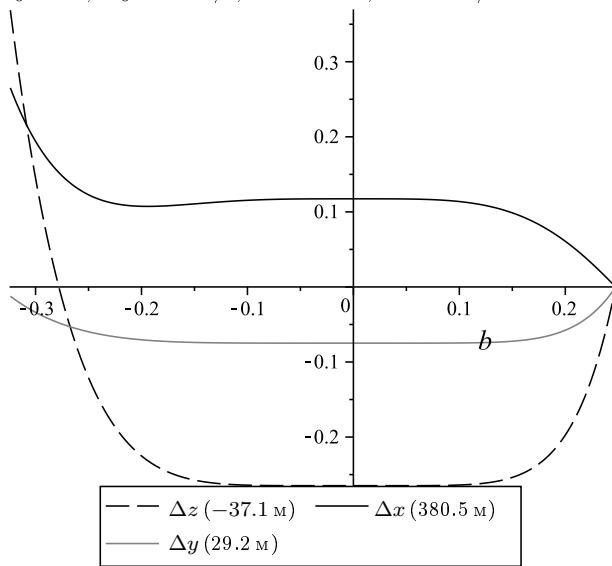


Рис. 4. Текущая точность %% приближения по (5)–(7) в области прицельной стрельбы (серый — δx , черный — δy) при различных углах запуска

Рис. 5. Точная (черная линия, пунктир) и приближенная (сплошная серая) траектории при боковом ветре

$\Theta_0 = 15^\circ, V_0 = 100 \text{ м/с}, \alpha = 1 \cdot 10^{-4}, w = 40 \text{ м/с}$



$\Theta_0 = 20^\circ, V_0 = 100 \text{ м/с}, \alpha = 1 \cdot 10^{-4}, w = 40 \text{ м/с}$

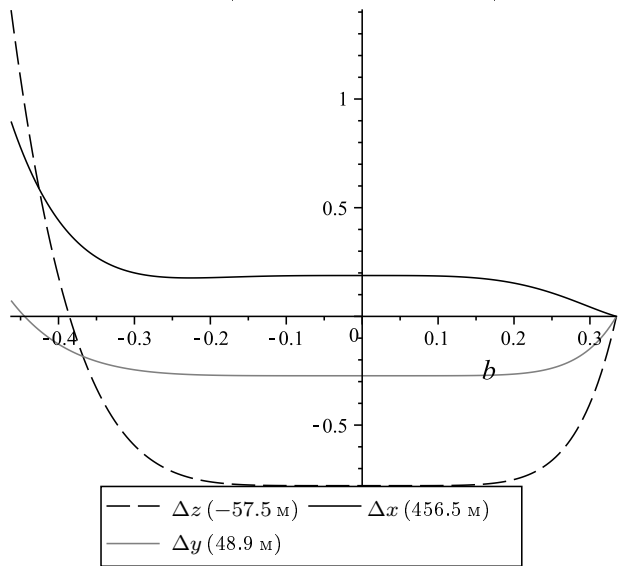
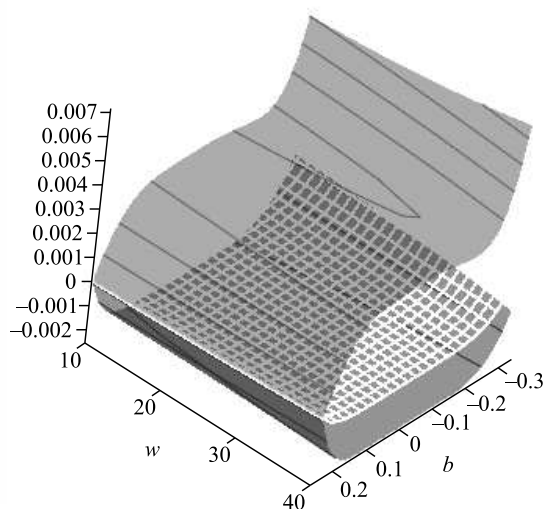


Рис. 6. Абсолютные ошибки определения координат на $x(b), y(b)$ и $z(b)$ при угле запуска $\Theta_0 = 15^\circ$

Рис. 7. Абсолютные ошибки определения координат на $x(b), y(b)$ и $z(b)$ при угле запуска $\Theta_0 = 20^\circ$

$$\Theta_0 = 15^\circ, V_0 = 100 \text{ м/с}, \alpha = 1 \cdot 10^{-4}$$



$$\Theta_0 = 15^\circ, V_0 = 100 \text{ м/с}, w = 40 \text{ м/с}$$

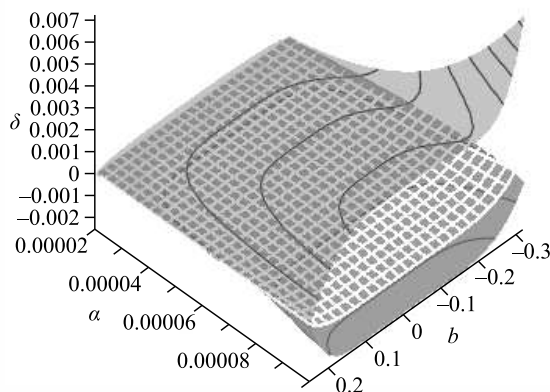


Рис. 8. Относительные ошибки $\delta x(b)$ (черн.), $\delta y(b)$ (сетка) и $\delta z(b)$ (сер.) при скоростях $w = 10\text{--}40$ м/с, $\Theta_0 = 15^\circ$ при различных коэффициентах сопротивления $\alpha = 0.00002\text{--}0.0001$.

поперечной координаты z , то есть сноса, как и следовало ожидать, на финальном участке траектории (рис. 7).

Что касается относительных ошибок всех трех координат, то для разных значений параметров они определялись как отношение текущих при данном наклоне расхождений между точными и приближенными значениями к соответствующим максимальным значениям: для абсциссы $x(b)$ — к дальности, для $y(b)$ — к высоте траектории, для $z(b)$ — к величине поперечного сноса (рис. 8, 9). При этом самая худшая точность составляла порядка 0.7 % для поперечной координаты z .

Стоит отметить, что в исследованной области параметров погрешности используемых формул (5)–(7) малочувствительны к скорости бокового ветра $w < V_0$ (рис. 8), но зато очень чувствительны к росту коэффициента сопротивления α (рис. 9) за определенным порогом. Ниже его можно сократить число членов разложения, ограничившись 3-й степенью по наклону относительной траектории b' : множители, содержащие степени параметра β_0 , уменьшившись вместе с величиной α , обеспечат приемлемую точность.

Автор не ставит перед собой цель обрисовать в многомерном пространстве параметров область такой точности, и не потому, что возникнут чисто графические проблемы такого отображения. Просто в каждом конкретном случае допустимая точность своя: где-то 2 % вполне удовлетворительно, где-то и 0.5 % плохо. То же касается и абсолютных отклонений приближенной траектории от точной.

Потому потенциальный пользователь обладает прерогативой выбора числа членов в используемых степенных разложениях и в случае необходимости может сформулировать свой заказ на дальнейшее совершенствование формул.

Выводы

Таким образом, вновь продемонстрирована эффективность ранее развитого метода [4] для нахождения траектории тяжелой точки в движущейся среде как для области прицельной стрельбы, так и за ее пределами.

Метод почти не использует трансцендентные функции и выражения, что делает его перспективным с точки зрения робастной реализации в простейших баллистических калькуляторах и микропроцессорах.

Полученные формулы также могут быть обобщены на ветер произвольного направления с целью их использования для нахождения поправок на углы запуска и дальность траектории. Такая задача не представляет принципиальной сложности — вопрос лишь в устранении, где это возможно, громоздкости получающихся выражений интерполяционным или иным путем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Euler L. Recherches sur la veritable courbe que decrivent les corps jettes dans l'air ou dans un autre fluide quelconque // Memoires de 'ademie des sciences de Berlin. 1755. Vol. 9. P. 321–352.
2. Routh E.J. A treatise on dynamics of a particle with numerous examples. Cambridge: Pergamon, 1898. 603 p.
3. Yabushita K., Yamashita M., Tsuboi K. An analytic solution of projectile motion with the quadratic resistance law using the homotopy analysis method // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2007. Vol. 40. № 29. P. 403–412.
4. Чистяков В.В. Об одном резольвентном методе интегрирования уравнений свободного движения в среде с квадратичным сопротивлением // Компьютерные исследования и моделирование. 2011. Т. 3. № 3. С. 265–277.
5. Chistyakov V.V. On one numerical method of integrating the dynamical equations of projectile planar flight affected by wind // Bulletin of PFUR. Series Mathematics. Information Sciences. Physics. 2014. № 3. P. 138–149.

Поступила в редакцию 14.09.2015

Чистяков Виктор Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра теоретической и прикладной механики, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 197101, Россия, г. Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49; доцент, Михайловская военная артиллерийская академия, 195009, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Комсомола, 22; преподаватель, Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, 197082, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 13.
E-mail: chistiakov_v_v@rambler.ru

V. V. Chistyakov

The high-precise parametrical equation for the trajectory of a point mass projectile in medium with quadratic drag under head-, tail- or side wind conditions

Keywords: quadratic air drag, head/tail/side wind, projectile, dual-projective coordinates, ballistic, direct fire angle, moving gun, trajectory, parametrical equation.

MSC: 34B15, 34C15, 70E15, 70K75

Precise trajectory equation is deduced by using dual-projective variables for a heavy projectile motion in medium with quadratic in speed longitudinal wind. By integration by parts there were received the power type formulas for low angle trajectories with initial slopes $\Theta_0 < 15^\circ$. They use the following key parameters of motion, namely $b_0 = \text{tg } \Theta_0$, with Θ_0 as an angle of throwing, R_a as the top curvature radius and β_0 as dimensionless speed square in the highest point of the trajectory. These formulas for the coordinates and time $x(b)$, $y(b)$, $z(b)$ and $t(b)$ with $b = \text{tg } \Theta$ being the current slope of the trajectory display strongly the effect of self-improving of accuracy due to diminishing of β_0 with the b_0 growing. Their precision when compared to exact integral formulas occurs to consist of 0.1–0.3 %% and this takes place in wide range of wind speeds up to 40 mps and with starting drag forces of 1.15 mg value. Due to their simplicity and quasi-algebraic type the formulas may be easily implemented in ballistic calculator, especially for the guns shooting as they moving at high speeds and in moving targets.

REFERENCES

1. Euler L. Recherches sur la veritable courbe que decrivent les corps jettes dans l'air ou dans un autre fluide quelconque, *Memoires de 'academie des sciences de Berlin*, 1755, vol. 9, pp. 321–352.
2. Routh E.J. *A treatise on dynamics of a particle with numerous examples*, Cambridge: Pergamon, 1898, 603 p.
3. Yabushita K., Yamashita M., Tsuboi K. An analytic solution of projectile motion with the quadratic resistance law using the homotopy analysis method, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2007, vol. 40, no. 29, pp. 403–412.
4. Chistyakov V.V. On one resolvent method for integrating the low angle trajectories of a heavy point projectile motion under quadratic air resistance, *Komp'yuternye Issledovaniya i Modelirovanie*, 2011, vol. 3, no. 3, pp. 265–277 (in Russian).
5. Chistyakov V.V. On one numerical method of integrating the dynamical equations of projectile planar flight affected by wind, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series Mathematics. Information Sciences. Physics*, 2014, no. 3, pp. 138–149.

Received 14.09.2015

Chistyakov Viktor Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics, Kronverkskii pr., 49, Saint Petersburg, 197101, Russia;
Associate Professor, Mikhailovskaya Artillery Military Academy, ul. Komsomola, 22, Saint Petersburg, 195009, Russia;
Lecturer, Mozhaiskiy Space Military Academy, ul. Zhdanovskaya, 13, Saint Petersburg, 197082, Russia.
E-mail: chistiakov_v_v@rambler.ru