УДК 517.955.8

© *Д. А. Турсунов, У. З. Эркебаев*

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИСИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ В КОЛЬЦЕ [1]

Исследуется асимптотическое поведение решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения второго порядка в кольце с двумя независимыми переменными. Для построения асимптотического разложения решения задачи применяется модифицированная схема метода пограничных функций Вишика–Люстерника–Васильевой–Иманалиева. Предлагаемый метод отличается от метода согласования тем, что нарастающие особенности внешнего разложения фактически из него убираются и с помощью вспомогательного асимптотического ряда полностью вносятся во внутренние разложения, а от классического метода пограничных функций здесь пограничные функции убывают степенным характером, а не экспоненциально. Асимптотическое разложение решения представляет собой ряд Пюизё. Полученное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле обосновано принципом максимума.

Ключевые слова: формальное асимптотическое разложение, задача Дирихле, функции Эйри, ряд Пюизё, малый параметр, метод погранфункций, бисингулярное возмущение.

Введение

В работе исследуется краевая задача в кольце для оператора Лапласа с потенциалом. На границах ставятся краевые условия Дирихле. Уравнение и краевые условия неоднородные. Особенность задачи состоит в наличии малого параметра перед оператором Лапласа и в обращении в нуль потенциала на границе кольца, при этом неоднородная часть уравнения отлична от нуля. Такая задача, по терминологии А.М. Ильина, называется бисингулярно возмущенной [1, 2].

Исследователям известно, что во многих задачах математической физики большую роль играют асимптотические методы. На сегодняшний день существует несколько асимптотических методов. Метод погранфункций Вишика–Люстерника–Васильевой–Иманалиева является одним из классических асимптотических методов. Однако этот метод напрямую невозможно применять к бисингулярно возмущенным задачам в связи с невыполнением одного условия известной теоремы Тихонова. Поэтому в таких случаях исследователи пользуются другими асимптотическими методами. Нами предлагается аналог метода пограничных функций, который отличается от метода согласования тем, что нарастающие особенности внешнего разложения фактически из него убираются и с помощью вспомогательного ряда полностью вносятся во внутренние разложения, а от классического метода пограничных функций здесь пограничные функций убывают степенным характером. Эта идея была реализована в работах [3–6] для обыкновенных дифференциальных уравнений, а в работах [7,8] исследованы бисингулярно возмущенные эллиптические уравнения.

Основным результатом нашей работы являются модификация метода погранфункций Вишика–Люстерника–Васильевой–Иманалиева и полное асимптотическое разложение решения по малому параметру.

§ 1. Постановка задачи

Исследуем задачу

$$\varepsilon\Delta u(\rho,\varphi,\varepsilon) - (\rho-\alpha)a(\rho,\varphi)u(\rho,\varphi,\varepsilon) = f(\rho,\varphi,\varepsilon), \quad (\rho,\varphi)\in D, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке МОиН Кыргызской Республики.

$$u(\alpha,\varphi,\varepsilon)=\psi_1(\varphi,\varepsilon),\quad u(\beta,\varphi,\varepsilon)=\psi_2(\varphi,\varepsilon),\tag{2}$$

где $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\dfrac{\partial}{\rho\partial\rho}+\dfrac{\partial^2}{\rho^2\partial\varphi^2}$ — оператор Лапласа, $0<\varepsilon$ — малый параметр,

$$D=\{(\rho,\varphi)\,|\,\alpha<\rho<\beta,\,0\leqslant\varphi<2\pi\},\quad \psi_j(\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\psi_{j,k}(\varphi)\varepsilon^k,$$
$$a(\rho,\varphi)>0,\quad a(\rho,\varphi)\in C^\infty(\overline{D}),\quad \psi_{j,k}(\varphi)\in C^\infty[0,2\pi],$$
$$f(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}f_k(\rho,\varphi)\varepsilon^k,\quad f_k(\rho,\varphi)\in C^\infty(\overline{D}),\quad f(\alpha,\varphi,0)\neq 0,$$

$a(\rho,\varphi)$, $\psi_j(\varphi,\varepsilon)$, $j=1,2$, $f(\rho,\varphi,\varepsilon)$ — заданные функции, $u(\rho,\varphi,\varepsilon)$ — искомая функция.

Решение задачи (1)–(2) существует и единственно [9]. Нам требуется построить асимптотическое разложение решения задачи (1)–(2) при $\varepsilon\to 0$.

Особенности задачи. Первая особенность (сингулярность) очевидна; решение предельного уравнения при $\varepsilon=0$

$$-(\rho-\alpha)a(\rho,\varphi)u(\rho,\varphi,0)=f_0(\rho,\varphi)$$

не удовлетворяет краевым условиям (2).

Чтобы показать вторую сингулярность, рассмотрим структуру внешнего разложения решения задачи (1), которое ищем методом малого параметра:

$$U=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k u_k(\rho,\varphi),\quad \varepsilon\to 0.\tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим рекуррентную систему уравнений

$$-(\rho-\alpha)a(\rho,\varphi)u_0(\rho,\varphi)=f_0(\rho,\varphi),$$
$$(\rho-\alpha)a(\rho,\varphi)u_k(\rho,\varphi)=\Delta u_{k-1}(\rho,\varphi)-f_k(\rho,\varphi),\quad k\in N.$$

Отсюда получаем внешнее разложение решения задачи (1)–(2):

$$U=\frac{1}{(\rho-\alpha)}\left(F_0+\frac{\varepsilon}{(\rho-\alpha)^3}F_1+\ldots+\frac{\varepsilon^m}{(\rho-\alpha)^{3m}}F_m+\ldots\right),\quad \varepsilon\to 0,$$

где $F_k=F_k(\rho,\varphi)\in C^\infty(\overline{D})$, $k=0,1,\ldots$.

При $\rho\to\alpha$ все эти функции $u_k(\rho,\varphi)$ имеют нарастающие особенности вида

$$u_k(\rho,\varphi)=O(1/(\rho-\alpha)^{3k+1}),\quad k=0,1,\ldots.$$

Следовательно, исследуемая задача является бисингулярно возмущенной по терминологии А. М. Ильина [1, 2].

§ 2. Основной результат

Теорема 1. *Для решения задачи* (1)–(2) *справедливо асимптотическое разложение*

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=-1}^{+\infty}\varepsilon^{\frac{k}{3}}w_k\left(\frac{\rho-\alpha}{\sqrt[3]{\varepsilon}},\varphi\right)+\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^{\frac{k}{2}}q_k\left(\frac{\beta-\rho}{\sqrt{\varepsilon}},\varphi\right),\quad \varepsilon\to 0,\tag{4}$$

где функции $v_k(\rho,\varphi)$, $w_k\left(\frac{\rho-\alpha}{\sqrt[3]{\varepsilon}},\varphi\right)$, $q_k\left(\frac{\beta-\rho}{\sqrt{\varepsilon}},\varphi\right)$ *конкретизируются ниже.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство состоит из двух частей: построения формального асимптотического разложения (4) и обоснования этого разложения.

Формальное асимптотическое разложение решения ищем в виде

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=-1}^{+\infty}\mu^k w_k(\tau,\varphi)+\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k q_k(\eta,\varphi),\quad \varepsilon\to 0, \tag{5}$$

где $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)$ — регулярное внешнее решение, $\sum\limits_{k=-1}^{+\infty}\mu^k w_k(\tau,\varphi)$ — погранслойное решение в окрестности $\rho=\alpha$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\lambda^k q_k(\eta,\varphi)$ — классическое погранслойное решение в окрестности $\rho=\beta$, $\tau=(\rho-\alpha)/\mu$, $\eta=(\beta-\rho)/\lambda$, $\mu=\sqrt[3]{\varepsilon}$, $\lambda=\sqrt{\varepsilon}$.

Погранслойное решение $\sum\limits_{k=-1}^{+\infty}\mu^k w_k(\tau,\varphi)$ устраняет невязку на границе $\rho=\alpha$ и вне границы убывает степенным ростом. А классическое погранслойное решение устраняет невязку на границе $\rho=\beta$ и вне границы убывает экспоненциально.

Подставляя (5) в (1), получим

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k(\varepsilon\Delta v_k(\rho,\varphi)-(\rho-\alpha)a(\rho,\varphi)v_k(\rho,\varphi))=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k(f_k(\rho,\varphi)-h_k(\rho,\varphi)), \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\sum_{k=-1}^{+\infty}\mu^{k+1}\left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial\tau^2}+\frac{\mu\partial w_k}{(\mu\tau+\alpha)\partial\tau}+\frac{\mu^2\partial^2 w_k}{(\mu\tau+\alpha)^2\partial\varphi^2}-\tau a(\alpha+\mu\tau,\varphi)w_k\right)=\\=\sum_{k=0}^{+\infty}h_k(\alpha+\tau\mu,\varphi)\mu^{3k},\end{gathered} \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k\left(\frac{\partial^2 q_k}{\partial\eta^2}-\frac{\lambda\partial q_k}{(\beta-\mu\tau)\partial\eta}+\frac{\lambda^2\partial^2 q_k}{(\beta-\lambda\eta)^2\partial\varphi^2}-(\beta-\alpha-\eta\lambda)a(\alpha+\lambda\eta,\varphi)q_k\right)=0. \tag{8}$$

По идее метода здесь мы ввели новый, пока неизвестный, асимптотический ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}h_k(\rho,\varphi)\varepsilon^k$, который конкретизируем ниже. А граничные условия примут вид

$$\begin{gathered}w_{3k}(0,\varphi)=\psi_{1,k}(\varphi)-v_k(\alpha,\varphi),\quad w_s(0,\varphi)=0,\quad s\neq 3k,\\ s=-1,0,\ldots;\quad k=0,1,\ldots.\end{gathered} \tag{9}$$

$$q_{2k}(0,\varphi)=\psi_{2,k}(\varphi)-\widetilde{v}_k(\beta,\varphi),\quad q_{2k+1}(0,\varphi)=0,\quad k=0,1,\ldots. \tag{10}$$

Регулярное внешнее решение. Для определения функции $v_k(\rho,\varphi)$ из равенства (6) получим соотношение

$$\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)-(\rho-\alpha)a(\rho,\varphi)v_k(\rho,\varphi)=f_k(\rho,\varphi)-h_k(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D,\quad k=0,1,\ldots$$

или

$$v_k(\rho,\varphi)=-\frac{f_k(\rho,\varphi)-\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)-h_k(\rho,\varphi)}{(\rho-\alpha)a(\rho,\varphi)},\quad v_{-1}(\rho,\varphi)\equiv 0,\quad k=0,1,\ldots.$$

Определим теперь неизвестные функции $h_k(\rho,\varphi)$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$v_k(\rho,\varphi)\in C^\infty(\overline{D}),\quad w_{k-1}(\tau,\varphi)\to 0,\quad \tau\to+\infty,\quad k=0,1,\ldots.$$

Пусть $g_k(\rho,\varphi)=f_k(\rho,\varphi)-\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)$. Тогда $v_k(\rho,\varphi)\in C^\infty(\overline{D})$, если

$$h_k(\rho,\varphi)=g_k(\alpha,\varphi)\frac{a(\rho,\varphi)}{a(\alpha,\varphi)}+\sum_{j=1}^{\infty}A_{k+1,j}(\varphi)(\rho-\alpha)^j,$$

где $A_{k+1,j}(\varphi) \in C(\overline{D})$ — пока неизвестные функции; их подберем так, чтобы выполнялись условия

$$\lim_{\tau\to+\infty} w_k(\tau,\varphi) = 0, \quad k = -1, 0, 1, \ldots. \tag{11}$$

Таким образом, мы почти построили внешнее регулярное решение.

Погранслойное решение в окрестности $\rho = \alpha$. Равенства (7) запишем в виде

$$\sum_{k=-1}^{+\infty} \mu^{k+1}\left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial\tau^2} + \frac{\mu\partial w_k}{\partial\tau} + \frac{\mu^2\partial^2 w_k}{\partial\varphi^2} - \tau a(\mu\tau,\varphi) w_k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{g_k}{a_0}\sum_{j=0}^{+\infty} a_j(\mu\tau)^j\right)\mu^{3k} + \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} A_{k,j}\tau^j\mu^{j+3k}, \tag{12}$$

где $w_k = w_k(\tau,\varphi)$, $a_k = a_k(\varphi)$, $g_k = g_k(\alpha,\varphi)$, $A_{k,j} = A_{k,j}(\varphi)$, $a_k(\varphi) = \dfrac{\partial^j a(\alpha,\varphi)}{j!\partial\rho^j}$.

Из равенства (12) получим уравнения

$$Lw_{-1} \equiv \frac{\partial^2 w_{-1}}{\partial\tau^2} - a_0\tau w_{-1} = g_0, \quad (\tau,\varphi) \in D_1, \tag{13}$$

$$Lw_{3k+m} = -\frac{\partial w_{3k+m-1}}{\partial\tau} - \frac{\partial^2 w_{3k+m-2}}{\partial\varphi^2} + \sum_{j=1}^{3k+m+1}\tau^{j+1}a_j w_{3k+m-j} + \frac{g_0}{a_0}a_{3k+m+1}\tau^{3k+m+1} + \tag{14}$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{g_j}{a_0}a_{3(k-j)+m+1} + A_{j,3(k-j)+m+1}\right)\tau^{3(k-j)+m+1}, \quad m = 0,1,2; \quad k = 0,1,\ldots, \quad (\tau,\varphi) \in D_1,$$

где $D_1 = \{(\tau,\varphi)\,|\,0 < \tau < +\infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$. Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $\widetilde{f}(\tau)\delta(\varphi) \in C(D_1)$, $a_0 > 0$. Тогда задача*

$$\frac{\partial^2 z(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2} - \tau a_0 z(\tau,\varphi) = \widetilde{f}(\tau)\delta(\varphi), \quad (\tau,\varphi) \in D_1, \quad z(0,\varphi) = z^0(\varphi), \tag{15}$$

имеет единственное решение в классе функций, медленно растущих по какой-либо степени τ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t = \sqrt[3]{a_0}\tau$, тогда задача (15) примет вид

$$\frac{\partial^2 z(t,\varphi)}{\partial t^2} - tz(t,\varphi) = \frac{1}{\sqrt[3]{a_0^2}}\widetilde{f}(t)\delta(\varphi), \quad z(0,\varphi) = z^0(\varphi). \tag{16}$$

Решение этой задачи (16) ищем в виде $z(t,\varphi) = z_1(t)\frac{1}{\sqrt[3]{a_0^2}}\delta(\varphi)$. Тогда, относительно $z_1(t)$, получим задачу

$$z_1''(t) - tz_1(t) = \widetilde{f}(t), \quad z_1(0) = z^0(\varphi)\sqrt[3]{a_0^2}/\delta(\varphi) \equiv z_1^0. \tag{17}$$

Однородное уравнение $z_1''(t) - tz_1(t) = 0$ имеет два независимых решения $Ai(t)$, $Bi(t)$ — функции Эйри. С помощью функций Эйри запишем решение задачи (17):

$$z_1(t) = \frac{z_1^0}{Ai(0)}Ai(t) + \pi Bi(t)\int_t^{+\infty} Ai(s)\widetilde{f}(s)\,ds +$$

$$+\pi Ai(t)\left(\int_0^t Bi(s)\widetilde{f}(s)\,ds - \sqrt{3}\int_0^{+\infty} Ai(s)\widetilde{f}(s)\,ds\right).$$

Отсюда

$$z(t,\varphi) = \frac{z^0(\varphi)}{Ai(0)}Ai(t) + \frac{\pi}{\sqrt[3]{a_0^2}}\delta(\varphi)Bi(t)\int_t^{+\infty} Ai(s)\widetilde{f}(s)\,ds +$$

$$+\frac{\pi}{\sqrt[3]{a_0^2}}\delta(\varphi)Ai(t)\left(\int_0^t Bi(s)\widetilde{f}(s)\,ds - \sqrt{3}\int_0^{+\infty} Ai(s)\widetilde{f}(s)\,ds\right).$$

Лемма 1 доказана. □

Следствие 1. *Если $\widetilde{f}(\tau) = O(\tau^{N_1})$ при $\tau \to +\infty$, то, учитывая асимптотическое поведение функции Эйри при $\tau \to +\infty$, получаем $z(\tau,\varphi) = O(\tau^{N_1-1})$, $N_1 = \mathrm{const}$. Это означает, что решение задачи* (15) *принадлежит классу функций, медленно растущих по какой-либо степени τ.*

Существование и единственность решений уравнений (13)–(14), удовлетворяющих соответствующим краевым условиям (9), следуют из леммы 1. Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть $A_{k,j} = -\sum\limits_{s=0}^{3k} a_{s+j}c_{3k-1-s,s+1} - \dfrac{a_j}{a_0}g_k$, $k,j = 1,2,\ldots$. Тогда при $\tau \to +\infty$ справедливы равенства*

$$w_{3k+m} = \frac{c_{3k+m,3-m}}{\tau^{3-m}} + \frac{c_{3k,6-m}}{\tau^{6-m}} + \ldots + \frac{c_{3k,3n+3-m}}{\tau^{3n+3-m}} + \ldots, \quad m = 0,1,2, \tag{18}$$

где $c_{j,k} = c_{j,k}(\varphi)$.

Доказательство. Для $w_{-1}(\tau,\varphi)$ имеем $w_{-1}(\tau,\varphi) = \dfrac{c_{-1,1}}{\tau} + \dfrac{c_{-1,4}}{\tau^4} + \ldots$. Формально подставляя этот ряд в (13), определяем неизвестные коэффициенты $c_{-1,3k+1}$:

$$c_{-1,1} = -\frac{g_0}{a_0}, \quad c_{-1,4} = \frac{2c_{-1,1}}{a_0}, \quad \ldots, \quad c_{-1,3k+1} = \frac{(3k-2)(3k-1)c_{-1,3k-2}}{a_0}, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Аналогично, подставляя ряд $w_0(\tau,\varphi) = \dfrac{c_{0,3}}{\tau^3} + \dfrac{c_{0,6}}{\tau^6} + \ldots$ в (14) при $k=0$ и $m=0$, определяем коэффициенты $c_{0,3k}$, $4k = 1,2,\ldots$:

$$c_{0,3} = -\frac{c_{-1,1} + a_1c_{-1,4}}{a_0}, \quad c_{0,3j} = \frac{3(j-1)(3j-2)c_{0,3j-3} - (3j-2)c_{-1,3j-2} - a_1c_{-1,3j+1}}{a_0}.$$

Точно так же, подставляя ряд

$$w_1(\tau,\varphi) = \frac{c_{1,2}}{\tau^2} + \frac{c_{1,5}}{\tau^5} + \ldots + \frac{c_{1,3n+2}}{\tau^{3n+2}} + \ldots$$

в (14) при $k=0$ и $m=1$, определяем коэффициенты $c_{1,3k+2}$, $k = 0,1,\ldots$:

$$c_{1,3k+2} = \frac{c''_{-1,3k+1} - 3kc_{0,3k} - a_1c_{0,3k+3} - a_2c_{-1,3k+4} + (3k-1)3kc_{1,3k-1}}{a_0}.$$

Пусть для любого $k \in N$ при $\tau \to +\infty$ справедливы соотношения (18) при

$$A_{k,j} = -\sum_{s=0}^{3k} a_{s+j}c_{3k-1-s,s+1} - \frac{a_j}{a_0}g_k.$$

Тогда из равенств

$$Lw_{3k+m} = -\frac{\partial w_{3k+m-1}}{\partial\tau} - \frac{\partial^2 w_{3k+m-2}}{\partial\varphi^2} + \sum_{j=1}^{3k+m+1}\tau^{j+1}a_jw_{3k+m-j} + \frac{g_0}{a_0}a_{3k+m+1}\tau^{3k+m+1} + \tag{19}$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{g_j}{a_0}a_{3(k-j)+m+1} + A_{j,3(k-j)+m+1}\right)\tau^{3(k-j)+m+1}, \quad m = 3,4,5, \quad k = 0,1,\ldots, \quad (\tau,\varphi) \in D_1,$$

следует, что в случае $A_{k,j} = -\sum\limits_{s=0}^{3k} a_{s+j}c_{3k-1-s,s+1} - \dfrac{a_j}{a_0}g_k$ справедливы соотношения

$$w_{3k+3} = O(\tau^{-3}), \quad w_{3k+4} = O(\tau^{-2}), \quad w_{3k+5} = O(\tau^{-1}).$$

Действительно, рассмотрим сумму

$$\sum_{j=1}^{3k+4}\tau^{j+1}a_jw_{3k+3-j}+\sum_{j=0}^{k+1}g_j\frac{a_{3(k-j)+4}}{a_0}\tau^{3(k-j)+4}+\sum_{j=1}^{k+1}A_{j,3(k-j)+4}\tau^{3(k-j)+4}$$

при $A_{k,j}=-\sum\limits_{s=0}^{3k}a_{s+j}c_{3k-1-s,s+1}-\dfrac{a_j}{a_0}g_k$, то есть

$$\sum_{j=1}^{3k+4}\tau^{j+1}a_jw_{3k+3-j}+\sum_{j=0}^{k+1}g_j\frac{a_{3(k-j)+4}}{a_0}\tau^{3(k-j)+4}-\sum_{j=1}^{k+1}g_j\frac{a_{3(k-j)+4}}{a_0}\tau^{3(k-j)+4}-$$
$$-\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{s=0}^{3j}a_{s+3(k-j)+4}c_{3j-1-s,s+1}\tau^{3(k-j)+4}=\tau^2a_1w_{3k+2}+\tau^3a_2w_{3k+1}+\tau^4a_3w_{3k}+\ldots+$$
$$+\tau^{3k+5}a_{3k+4}w_{-1}+g_0\frac{a_{3k+4}}{a_0}\tau^{3k+4}-\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{s=0}^{3j}a_{s+3(k-j)+4}c_{3j-1-s,s+1}\tau^{3(k-j)+4}=$$
$$=\sum_{s=0}^{3(k+1)}a_{s+1}c_{3k+2-s,s+1}\tau+\sum_{s=0}^{3k}a_{s+4}c_{3k-1-s,s+1}\tau^4+\ldots+\sum_{s=0}^{3}a_{s+3k+1}c_{2-s,s+1}\tau^{3k+1}+O(\tau^{-2})-$$
$$-\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{s=0}^{3j}a_{s+3(k-j)+4}c_{3j-1-s,s+1}\tau^{3(k-j)+4}=O(\tau^{-2}),\quad \tau\to+\infty.$$

В результате для правой части равенства (19) имеем

$$Lw_{3k+3}=O(\tau^{-2}),\quad \tau\to+\infty.$$

Отсюда следует, что $w_{3k+3}=O(\tau^{-3})$. Аналогично получаются оценки $w_{3k+4}=O(\tau^{-2})$, $w_{3k+5}=$ $=O(\tau^{-1})$ при $\tau\to+\infty$. Лемма 2 доказана. Следовательно, выполняется условие (11). Кроме этого при $\tau\to+\infty\quad(\mu\tau=\rho-\alpha)$:

$$\sum_{k=-1}^{+\infty}\mu^kw_k(\tau,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\widetilde{w}_k(\rho,\varphi),\quad \widetilde{v}_k(\beta,\varphi)=v_k(\beta,\varphi)+\widetilde{w}_k(\beta,\varphi).$$

Классическое погранслойное решение. Перейдем теперь к построению классической пограничной функции в окрестности $\rho=\beta$. Из соотношений (8), (10) получаем следующие задачи:

$$\frac{\partial^2q_0}{\partial\eta^2}-(\beta-\alpha)\widetilde{a}_0q_0=0,\quad q_0(0,\varphi)=\psi_{2,0}(\varphi)-\widetilde{v}_0(\beta,\varphi);$$
$$\frac{\partial^2q_1}{\partial\eta^2}-(\beta-\alpha)\widetilde{a}_0q_1=\frac{\partial q_0}{\partial\eta}+\eta(a_0-(\beta-\alpha)a_1)q_0,\quad q_1(0,\varphi)=0;$$
$$\frac{\partial^2q_k}{\partial\eta^2}-(\beta-\alpha)\widetilde{a}_0q_k=\frac{\partial q_{k-1}}{\partial\eta}-\frac{\partial^2q_{k-2}}{\partial\varphi^2}+\eta\sum_{i=0}^{k-1}(a_i-(\beta-\alpha)a_{i+1})\eta^iq_{k-1-j},\quad k=2,3,\ldots,$$
$$q_{2m}(0,\varphi)=\psi_{2,m}(\varphi)-\widetilde{v}_m(\beta,\varphi);\quad q_{2m+1}(0,\varphi)=0,\ m=1,2,\ldots;$$

где $q_k=q_k(\eta,\varphi)$, $\widetilde{a}_k=\widetilde{a}_k(\varphi)$, $\widetilde{a}_k(\varphi)=\dfrac{\partial^ka(\beta,\varphi)}{k!\partial\rho^k}$, $\widetilde{a}_0(\varphi)>0$, $\varphi\in[0,2\pi]$.

Все эти задачи имеют единственные, бесконечно дифференцируемые и экспоненциально стремящиеся к нулю, при $\eta\to+\infty$, решения, то есть $q_k(\eta,\varphi)\in C^\infty[0,+\infty)$, $|q_k(\eta,\varphi)|\leqslant$ $\leqslant ce^{-\eta\sqrt{(\beta-\alpha)\widetilde{a}_0}}$ [1, глава 1, § 2].

Таким образом, нами построено формальное асимптотическое разложение (4) решения задачи (1)–(2).

Обоснование формального асимптотического разложения решения. Оценим остаточный член этого разложения. Пусть

$$R(\rho,\varphi,\varepsilon)=u(\rho,\varphi,\varepsilon)-u_n(\rho,\varphi,\varepsilon),$$

где $u_n(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum\limits_{k=-1}^{3n+1}\mu^k w_k(\tau,\varphi)+\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\lambda^k q_k(\eta,\varphi)$. Тогда получаем

$$\varepsilon\Delta R(\rho,\varphi,\varepsilon)-(\rho-\alpha)a(\rho,\varphi)R(\rho,\varphi,\varepsilon)=\varepsilon^{n+1}\Phi,\quad (\rho,\varphi)\in D,$$

где

$$\Phi=\widetilde{f}_{n+1}(\rho,\varphi,\varepsilon)-\Delta v_n(\rho,\varphi)+\sum_{i=0}^{\infty}\mu^i\sum_{j=3+i}^{3(n+1)+i+1}\tau^j a_{j-1}w_{3(n+1)+i-j}+\sum_{i=0}^{\infty}\mu^i\sum_{j=1}^{n+1}\frac{g_{n+1-j}}{a_0}a_{i+3j}\tau^{i+3j}+$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}\mu^i\sum_{j=1}^{n}A_{n+1-j,3j+i}\tau^{3j+i}-\frac{\partial w_{3n+1}}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 w_{3n}}{\partial\varphi^2}-\mu\frac{\partial^2 w_{3n+1}}{\partial\varphi^2}+e^{-\eta\sqrt{(\beta-\alpha)\widetilde{a}_0}}Q(\eta,\varphi,\lambda).$$

Заметим, что

$$\|\widetilde{f}_{n+1}(\rho,\varphi,\varepsilon)-\Delta v_n(\rho,\varphi)\|_C\leqslant M_1;\quad \|Q(\eta,\varphi,\lambda)\|_C\leqslant M_2.$$

Учитывая, что

$$\sum_{j=3+i}^{3(n+1)+i+1}\tau^j a_{j-1}w_{3(n+1)+i-j}+\sum_{i=0}^{\infty}\mu^i\sum_{j=1}^{n+1}\frac{g_{n+1-j}}{a_0}a_{i+3j}\tau^{i+3j}+$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}\mu^i\sum_{j=1}^{n}A_{n+1-j,3j+i}\tau^{3j+i}=\sum_{j=0}^{\infty}(\mu\tau)^j m_j,\quad m_j=\mathrm{const},$$

имеем

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty}(\mu\tau)^j m_j-\frac{\partial w_{3n+1}}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 w_{3n}}{\partial\varphi^2}-\mu\frac{\partial^2 w_{3n+1}}{\partial\varphi^2}\right\|_C\leqslant M_3,\quad 0<M_i=\mathrm{const}.$$

Отсюда получаем $\|\Phi\|_C\leqslant M$, $0<M=\mathrm{const}$, поэтому задачу для остаточного члена можем записать в виде

$$\varepsilon\Delta R(\rho,\varphi,\varepsilon)-(\rho-\alpha)a(\rho,\varphi)R(\rho,\varphi,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1}),\quad (\rho,\varphi)\in D,\quad \varepsilon\to 0,$$
$$R(\alpha,\varphi,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1}),\quad R(\beta,\varphi,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1}),\quad \varepsilon\to 0.$$

Из принципа максимума следует справедливость соотношения

$$R(\rho,\varphi,\varepsilon)=O(\varepsilon^n),\quad \varepsilon\to 0,\quad (\rho,\varphi)\in\overline{D}.$$

Теорема доказана. □

Замечание 1. Заметим, что для решения внутренней задачи Дирихле в круге, то есть

$$\varepsilon\Delta u(\rho,\varphi,\varepsilon)-(\beta-\rho)a(\rho,\varphi)u(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon),\quad (\rho,\varphi)\in\widetilde{D},$$
$$u(\beta,\varphi,\varepsilon)=\psi_1(\varphi,\varepsilon),$$

где $D = \{(\rho,\varphi)\,|\,0<\rho<\beta,\ 0\leqslant\varphi<2\pi\}$, справедливо асимптотическое разложение

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=-1}^{+\infty}\varepsilon^{\frac{k}{3}}w_k\left(\frac{\beta-\rho}{\sqrt[3]{\varepsilon}},\varphi\right),\quad \varepsilon\to 0;$$

а для внешней задачи Дирихле вне круга, то есть

$$\varepsilon\Delta u(\rho,\varphi,\varepsilon)-(\rho-\beta)a(\rho,\varphi)u(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon),\quad (\rho,\varphi)\in\widetilde{D},$$
$$u(\beta,\varphi,\varepsilon)=\psi_1(\varphi,\varepsilon),$$

где $\widetilde{D} = \{(\rho,\varphi)\,|\,\beta<\rho,\ 0\leqslant\varphi<2\pi\}$, справедливо асимптотическое разложение

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=-1}^{+\infty}\varepsilon^{\frac{k}{3}}w_k\left(\frac{\rho-\beta}{\sqrt[3]{\varepsilon}},\varphi\right),\quad \varepsilon\to 0.$$

Замечание 2. Аналогично исследуется асимптотическое поведение решения задачи

$$\varepsilon\Delta u(\rho,\varphi,\varepsilon)-(\rho-\alpha)^n a(\rho,\varphi)u(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon),\quad (\rho,\varphi)\in D,$$
$$u(\alpha,\varphi,\varepsilon)=\psi_1(\varphi,\varepsilon),\quad u(\beta,\varphi,\varepsilon)=\psi_2(\varphi,\varepsilon),$$

где n — натуральное число.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
2. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
3. Alymkulov K. Method of boundary layer function to solve the boundary value problem for a singularly perturbed differential equation of the order two with a turning point // Universal Journal of Applied Mathematics. 2014. Vol. 2. № 3. P. 119–124.
4. Алымкулов К., Халматов А.А. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой // Мат. заметки. 2012. Т. 92. Вып. 6. С. 819–824.
5. Алымкулов К., Асылбеков Т.Д., Долбеева С.Ф. Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка // Мат. заметки. 2013. Т. 94. Вып. 4. С. 484–487.
6. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками поворота // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 1 (21). С. 34–40.
7. Турсунов Д.А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения. Случай особой точки на границе // Известия Томского политехнического университета. 2014. Т. 324. № 2. С. 31–35.
8. Tursunov D.A., Belekov K.J. Asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for bisingular perturbed elliptic equations in domains with smooth boundaries // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians. Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5–7 June 2014. Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. P. 143–147.
9. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 13.10.2015

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, профессор, кафедра высшей математики, Уральский государственный педагогический университет, 620151, Россия, г. Екатеринбург, ул. Карла Либкнехта, 9.
E-mail: d_osh@rambler.ru

Эркебаев Улукбек Заирбекович, аспирант, кафедра алгебры и геометрии, Ошский государственный университет, 723500, Кыргызстан, г. Ош, ул. Ленина, 331.
E-mail: uluk3188@mail.ru

МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 4

D. A. Tursunov, U. Z. Erkebaev

Asymptotics of the Dirichlet problem solution for a bisingular perturbed equation in the ring

Keywords: formal asymptotic expansion, Dirichlet problem, Airy function, Puiseux series, small parameter, method of boundary functions, bisingular perturbation.

MSC: 35J25, 35J75, 35J15

The paper refers to the asymptotic behavior of the Dirichlet problem solution for a bisingular perturbed elliptic second-order equation with two independent variables in the ring. To construct the asymptotic expansion of the solution the authors apply the modified scheme of the method of boundary functions by Vishik–Lyusternik–Vasil'eva–Imanaliev. The proposed method differs from the matching method by the fact that growing features of the outer expansion are in fact removed from it and with the help of an auxiliary asymptotic series are placed entirely in the internal expansion, and from the classical method of boundary functions by the fact that boundary functions have power-law decrease, not exponential. An asymptotic expansion of the solution is a series of Puiseux. The resulting asymptotic expansion of the Dirichlet problem solution is justified by the maximum principle.

REFERENCES

1. Il'in A.M. *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenii reshenii kraevykh zadach* (Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems), Moscow: Nauka, 1989, 336 p.
2. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* (Asymptotic methods in analysis), Moscow: Fizmatlit, 2009, 248 p.
3. Alymkulov K. Method of boundary layer function to solve the boundary value problem for a singularly perturbed differential equation of the order two with a turning point, *Universal Journal of Applied Mathematics*, 2014, vol. 2, no. 3, pp. 119–124.
4. Alymkulov K., Khalmatov A.A. A boundary function method for solving the model lighthill equation with a regular singular point, *Mathematical Notes*, 2012, vol. 92, no. 5, pp. 751–755.
5. Alymkulov K., Asylbekov T.D., Dolbeeva S.F. Generalization of the boundary function method for solving boundary-value problems for bisingularly perturbed second-order differential equations, *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, no. 3, pp. 451–454.
6. Tursunov D.A. Asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed ordinary second-order differential equation with two turning points, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ., Mat. Mekh.*, 2013, no. 1 (21), pp. 34–40 (in Russian).
7. Tursunov D.A. Asymptotic solutions of the bisingular perturbed elliptic equation. Case of a singular point on the boundary, *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2014, vol. 324, no. 2, pp. 31–35 (in Russian).
8. Tursunov D.A., Belekov K.J. Asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for bisingular perturbed elliptic equations in domains with smooth boundaries, *Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians*, Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5–7 June 2014, pp. 143–147.
9. Gilbarg D., Trudinger N. *Ellipticheskie differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* (Elliptic partial differential equations of second order), Moscow: Nauka, 1989, 336 p.

Received 13.10.2015

Tursunov Dilmurat Abdillajanovich, Professor, Department of Higher Mathematics, Ural State Pedagogical University, ul. Karl Liebknecht, 9, Yekaterinburg, 620151, Russia.
E-mail: d_osh@rambler.ru

Erkebaev Ulukbek Zairbekovich, post-graduate student, Department of Algebra and Geometry, Osh State University, ul. Lenina, 331, Osh, 723500, Kyrgyzstan.
E-mail: uluk3188@mail.ru