МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 4

УДК 519.8

© *В. В. Гусев*

ПОИСК ОПТИМАЛЬНОГО НАЧАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ИГРОКОВ В ИГРЕ ПАТРУЛИРОВАНИЯ

В работе рассматривается игра патрулирования с двумя игроками — патрулирующим и атакующим. Цель первого игрока — охранять объект от злоумышленников, поймать атакующего. Цель второго — причинить урон охраняемому объекту и не стать пойманным. В данной статье охраняемым объектом выступают базовые станции сотовых компаний. Теоретико-игровая модель построена для решения задачи о нахождении начального распределения местоположения игроков по базовым станциям. При известной матрице перехода игроков по станциям в работе находятся оптимальные стратегии игроков и значение игры. Рассмотрена обратная задача — поиск оптимальных матриц перехода при известных начальных распределениях местоположения игроков. В такой постановке найдено равновесие по Нэшу, когда атакующий совершает две атаки.

Ключевые слова: игры поиска, патрулирование, атакующий, равновесие.

Введение

Одним из направлений теории игр являются игры поиска. По данному направлению насчитывается большое количество работ, которые имеют приложение, например, в военных играх, охране объектов [1, 2, 3, 4]. Близкими работами к данной работе можно считать [5, 6]. В [5, 6] для определения местонахождения атакующего не используется теоретико-игровой подход. Данные работы посвящены определению состояния системы при помощи аппарата скрытых цепей Маркова. В данной работе, в отличие от [5, 6], для решения задачи поиска используется теоретико-игровой подход, не используется терминология цепей Маркова. Сформулируем прикладную задачу, примеры решения которой можно найти в следующих параграфах данной статьи.

Рассмотрим схему основных базовых станций некоторой компании мобильной связи в городе Петрозаводске (рис. 1). Такие схемы находятся в свободном доступе в сети Интернет. Радиус работы базовых станций составляет порядка 10–12 км за городом и около 3–5 км в городе.

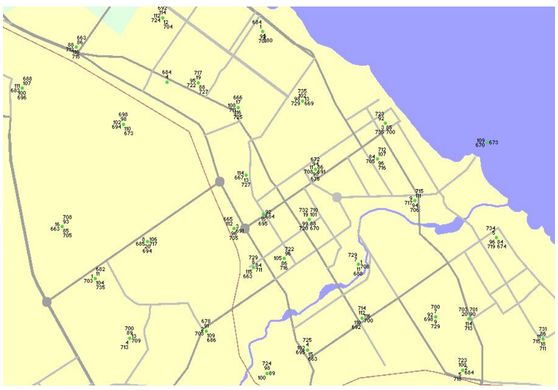

Рис. 1. Схема базовых станций

Предположим, что некий злоумышленник хочет причинить вред сотовой компании и решил сломать некоторое количество базовых станций. Предпочтительность базовой станции для злоумышленника пропорциональна среднему количеству абонентов, которые находятся в ее радиусе. Будем считать что в фирму пришло донесение о будущем нападении и компания обратилась в правоохранительные органы (охранное предприятие), чтобы те выставили патруль на некоторое время. Допустим ситуацию, когда количества патрулирующих не достаточно для того, чтобы охранять каждую станцию. Если на некоторую станцию произошло нападение и данная станция находилась под охраной патруля, то злоумышленник считается пойманным. Предполагаем, что патрулирующий всегда сильнее атакующего. Если атакующий напал на неохраняемую станцию, то причиняет ей вред и по собственному желанию может перейти к следующей станции. В таком случае патрулирующие узнают о совершившемся нападении и могут перейти на другие станции. Число нападений будем считать ограниченным. Стоит вопрос о том, как изначально распределить имеющихся патрулирующих по станциям, чтобы с наибольшей вероятностью поймать атакующего.

§ 1. Математическая модель

Чтобы решить поставленную задачу, введем следующие обозначения. Пусть $Q = \langle V, E\rangle$ — связный граф, где V — множество вершин, E — множество ребер, $|V| = n$ — число вершин в графе, $v_i \in V$, $1 \leqslant i \leqslant n$ — вершина графа Q, $(v_i, v_j) \in E$ — существующее ребро графа между вершинами v_i и v_j. Для любой вершины v_i выполнено $(v_i, v_i) \in E$. Каждая вершина графа Q — это базовая станция, поэтому будем считать термины «вершина» и «базовая станция» синонимами. Количество атак атакующего обозначим k, $k \geqslant 1$.

Пусть $B = (b_{ij})$, $0 \leqslant b_{ij} \leqslant 1\ \forall\, i\ \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} = 1$, где b_{ij} — вероятность, с которой патрулирующий или атакующий переходит из вершины v_i в вершину $v_j\ \forall\, i, j$. Значение b_{ij} зависит от количества абонентов, которые обслуживают станции v_i, v_j, расстояния между ними и других факторов.

Обозначим $\pi_l^p = (x_1^l, x_2^l, \ldots, x_n^l)$, $\pi_l^a = (y_1^l, y_2^l, \ldots, y_n^l)$, $l \geqslant 1$, где x_i^l, y_i^l — вероятности того, что патрулирующий и атакующий находятся в вершине i в момент времени l соответственно, $x_i \geqslant 0$, $y_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 1$.

Рассмотрим игру $CM = \langle P, A; S_1, S_2; H_k(\cdot)\rangle$, в которой P, A — игроки, патрулирующий и атакующий соответственно, S_1, S_2 — множества смешанных стратегий игроков. Элементы как множества S_1, так и множества S_2 представляют собой векторы $\pi_1^p = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_1$, $\pi_1^a = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in S_2$. Исходя из введенных обозначений, под смешанной стратегией первого и второго игрока понимается выбор вершины v_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, с вероятностью x_i, y_i соответственно. Далее, $H_k(\cdot)$ — функция выигрыша патрулирующего, которая равна вероятности поимки атакующего за k нападений. В первый момент времени игроки выбирают собственные местоположения на графе с вероятностями, которые являются компонентами векторов π_1^p, π_1^a соответственно. Тогда вероятность поймать атакующего при первой попытке нападения равна $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. Вероятность не поймать атакующего равна $1 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. Если атакующий не пойман, то игроки используют матрицу B для перехода в другие вершины графа (станции). Функция выигрыша в общем виде при больших значениях k и n представляет собой большое выражение. Поэтому, чтобы записать $H_k(\cdot)$ при фиксированных значениях k и n, можно составить дерево вероятностей.

Патрулирующий, выбирая стратегию $\pi_1^p \in S_1$, старается максимизировать значение $H_k(\cdot)$, а атакующий, выбирая стратегию $\pi_1^a \in S_2$, старается минимизировать значение $H_k(\cdot)$. Будем считать игру CM игрой с нулевой суммой, т. е. выигрыш патрулирующего равен проигрышу атакующего. Поставим перед собой задачу найти равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях в рассматриваемой игре.

§ 2. Нахождение начального оптимального распределения местоположения игроков

Пусть атакующий совершает k атак. Тогда справедлива теорема 1.

Теорема 1. *Игру CM можно свести к матричной игре с нулевой суммой.*

Доказательство. Игра CM начинается с выбора начального местоположения игроков. Если атакующий не пойман, то игроки делают переход из вершины v_i в вершину v_j, используя матрицу перехода. Так как на k-ом шаге ($k > 1$) вероятность поимки атакующего зависит от его местонахождения и матрицы перехода, а элементы матрицы перехода постоянны, значит, вероятность поймать атакующего за k шагов можно записать в виде

$$H_k(\pi_1^p, \pi_1^a) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k x_i y_j,$$

где c_{ij}^k — неотрицательные числа, которые зависят от элементов матрицы перехода. Чтобы найти ситуацию равновесия с такой функцией выигрыша, достаточно рассмотреть матричную игру, в которой элементы платежной матрицы равны c_{ij}, что и требовалось доказать. □

Пример 1. На протяжении длительного промежутка времени совершались две атаки на четыре базовые станции. Компания решила нанять одного охранника, чтобы тот патрулировал станции, на которые, по мнению компании, будут совершены две атаки. По собранной статистике нападений на станции была составлена матрица перехода $B = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$. Как игрокам нужно выбрать свое начальное местоположение?

Решение. Предположим, что игроки используют матрицу перехода, чтобы выбрать следующую станцию. Пусть (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) — начальные распределения местоположения игроков, которые необходимо найти. Функция выигрыша будет иметь вид

$$\begin{aligned} H_2(\pi_1^p, \pi_1^a) &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_1y_2(0.2 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.4) + \\ &+ x_1y_3(0.1 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.4) + x_1y_4(0.1 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.2) + \\ &+ x_2y_1(0.2 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.4) + x_2y_3(0.2 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.2) + \\ &+ x_2y_4(0.1 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.2) + x_3y_1(0.5 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.4) + \\ &+ x_3y_2(0.5 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.2) + x_3y_4(0.1 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.2) + \\ &+ x_4y_1(0.1 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.4) + x_4y_3(0.1 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.4 + 0.1 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.2). \end{aligned}$$

Составим платежную матрицу (таблица 1).

Таблица 1

Платежная матрица

1	0.27	0.2	0.26
0.27	1	0.23	0.25
0.2	0.23	1	0.2
0.26	0.25	0.2	1

Находим равновесие по Нэшу в данной матричной игре и получаем примерные значения: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0.25; 0.23; 0.27; 0.25)$, $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0.42; 0.33; 0.30; 0.25)$, $H_2^* \approx 0.43$.

Предположим такую ситуацию, в которой атакующий не возвращается в те вершины, в которых уже побывал. После того как атакующий посетил вершину и вышел из нее, об этом становится известно патрулирующему. Поэтому патрулирующий не посещает те вершины, в которых уже был атакующий. При таком предположении вероятность перейти из вершины v_i в вершину v_j будем считать равной

$$\frac{b_{ij}}{\sum\limits_{j \in N, j \notin P} b_{ij}},$$

где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, P — множество индексов тех вершин, в которых побывал атакующий.

Если атакующий совершает две атаки, тогда функция выигрыша запишется следующим образом:

$$H_2(\pi_1^p, \pi_1^a) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left(x_i y_j \frac{\sum\limits_{k=1, k\neq j}^{n} b_{ik} b_{jk}}{\sum\limits_{k=1, k\neq j}^{n} b_{ik} \cdot \sum\limits_{k=1, k\neq j}^{n} b_{jk}} \right),$$

где b_{ij} — элемент матрицы перехода.

Игра CM, в которой игроки не возвращаются в вершины, в которых был атакующий, также сводится к матричной игре.

§ 3. Игра CM с двумя патрулирующими и одним атакующим

Предположим, что один патрулирующий не может справиться с поставленной перед ним задачей — поймать атакующего. Это может быть связано с тем, что количество базовых станций велико и количество нападений мало. Тогда компания вынуждена нанять еще хотя бы одного патрулирующего для охраны своего имущества. Дадим ответ на следующий вопрос: какое должно быть начальное распределение местоположения второго патрулирующего, если начальное распределение местоположение первого патрулирующего остается неизменным? Вопрос формулируем именно так, потому что на практике при добавлении нового охранника, планы старого охранника редко изменяются. Неизменность планов старого патрулирующего можно объяснить тем, что новый патрулирующий неопытен.

Пример 2. Пусть имеется три базовые станции. Начальное распределение местоположения первого патрулирующего задается вектором $(0.6; 0.3; 0.1)$. Какими должны быть начальные распределения атакующего и второго охранника, если атакующий планирует совершить одну атаку?

Решение. Пусть $Z = (z_1, z_2, z_3)$, где z_i — вероятность того, что второй охранник находится в i-ой вершине в первый момент времени; $Y = (y_1, y_2, y_3)$, где y_i — вероятность того, что атакующий игрок находится в i-ой вершине в первый момент времени. Составим функцию выигрыша патрулирующего:

$$H(Z,Y) = 0.6z_1y_1 + 0.3z_2y_2 + 0.1z_3y_3 + 0.6z_2(y_1+y_2) + 0.6z_3(y_1+y_3) + 0.3z_1(y_2+y_1) +$$

$$+ 0.3z_3(y_2+y_3) + 0.1z_1(y_3+y_1) + 0.1z_2(y_3+y_2).$$

Составим платежную матрицу (таблица 2).

Таблица 2

Платежная матрица

1	0.3	0.1
0.6	1	0.1
0.6	0.3	1

Решаем данную матричную игру и получаем, что $Z = \left(\frac{1}{127}, \frac{55}{127}, \frac{71}{127}\right)$, $Y = \left(\frac{63}{127}, \frac{36}{127}, \frac{28}{127}\right)$. Значение игры равно $H_1^* = \dfrac{383}{635}$.

При большом количестве атак и базовых станций функция выигрыша запишется в виде большого выражения. Тем не менее ситуация равновесия в такой постановке задачи всегда существует, так как игра сводится к матричной игре с нулевой суммой.

§ 4. Поиск матрицы перехода

Пусть начальные распределения игроков заданы. Теперь будем считать, что стратегия игрока — это выбор матрицы перехода. В следующих теоремах найдем ситуацию равновесия и значение игры или докажем, что равновесия не существует.

Теорема 2. *Пусть $\pi_1^p = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\pi_1^a = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, где a_i, b_i — вероятности того, что патрулирующий и атакующий окажутся в первый момент времени в вершине i соответственно. Если атакующий совершает две атаки, тогда значение игры равно*

$$H_2^* = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, i\neq j}^{n} a_i b_j.$$

Доказательство. Пусть патрулирующий в качестве своей смешанной стратегии выбирает матрицу $B_P = (x_{ij})$, $0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1$, $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1\ \forall\, i = 1, 2, \dots, n$, а атакующий — матрицу $B_A = (y_{ij})$, $0 \leqslant y_{ij} \leqslant 1$, $\sum\limits_{j=1}^{n} y_{ij} = 1\ \forall\, i = 1, 2, \dots, n$, где x_{ij}, y_{ij} — вероятность перехода из станции i в станцию j патрулирующим и атакующим игроками соответственно. Вероятность поймать атакующего в первый момент времени будет равна $H_1(B_P, B_A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$. Вероятность поймать атакующего во второй момент времени равна $H_2(B_P, B_A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} a_i b_j \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_{ik} y_{jk} \right)$. Требуется найти такие матрицы B_P^*, B_A^*, чтобы выполнялись неравенства $H_2(B_P, B_A^*) \leqslant H_2(B_P^*, B_A^*) \leqslant H_2(B_P^*, B_A)\ \forall\, B_P, B_A$. В соответствии с теоремой [7] (B_P^*, B_A^*) — ситуация равновесия тогда и только тогда, когда выполняются неравенства $H_2(I, B_A^*) \leqslant H(B_P^*, B_A^*) \leqslant H_2(B_P^*, J)\ \forall\, I, J$, где I, J — чистые стратегии игроков соответственно. Покажем, что ситуация (B_P^*, B_A^*) вида $x_{ij} = y_{ij} = \frac{1}{n}$ удовлетворяет данной системе неравенств. Подставляем значения x_{ij}, y_{ij} и получаем следующие неравенства:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} a_i b_j \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x'_{ik} \cdot \dfrac{1}{n} \right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} a_i b_j \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{n} \right), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} a_i b_j \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{n} \right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} a_i b_j \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y'_{ik} \cdot \dfrac{1}{n} \right), \end{cases}$$

где x'_{ik}, y'_{ik} — элементы матриц I, J, причем существует единственное значение переменных k', l', $1 \leqslant k', l' \leqslant n$, для каждой i-ой строки, что $x'_{ik'} = y'_{il'} = 1$, а все остальные элементы i-ой строки равны нулю. Поэтому $\sum\limits_{k=1}^{n} x'_{ik} \cdot \frac{1}{n} = \sum\limits_{k=1}^{n} y'_{ik} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$. Упрощая неравенства системы, получим что левые и правые части неравенств одинаковы, значит, ситуация (B_P^*, B_A^*) является равновесием. Подставляем значения $x_{ij} = x_{ij} = \frac{1}{n}$ в функцию выигрыша, получаем, что $H_2^* = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i + \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1, i\neq j}^{n} a_i b_j$, что и требовалось доказать. □

Заключение

При помощи методов теории игр найдено равновесие по Нэшу в игре патрулирования. Полученные результаты могут использоваться на практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Benkoski S.J., Monticino M.G., Weisinger J.R. A survey of the search theory literature // Naval Research Logistics. 1991. Vol. 18. P. 469–494.

2. Chew M.C. Optimal stopping in a discrete search problem // Operations Research. 1973. Vol. 21. P. 741–747.
3. Gittins J.S. An application of control theory to a game of hide and seek // International Journal of Control. 1979. Vol. 30. P. 981–987.
4. Iida K. Optimal search and stop in continuous search process // Journal of the Operations Research Society of Japan. 1984. Vol. 27. P. 1–30.
5. Joshi S.S., Phoha V.V. Investigating hidden Markov models capabilities in anomaly detection // Proceedings of 43rd Annual Southeast Regional Conference. Kennesaw, GA, March 2005. P. 98–103.
6. Zhao F., Jin H. Automated approach to intrusion detection in vm-based dynamic execution environment // Computing and Informatics. 2012. Vol. 31. P. 271–297.
7. Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения: Учеб. пособие. СПб.: Лань, 2010. 448 с.

Поступила в редакцию 08.10.2015

Гусев Василий Васильевич, аспирант, лаборатория математической кибернетики, Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, 185910, Россия, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11.
E-mail: gusev@krc.karelia.ru

V. V. Gusev

Search for the optimal initial distribution of players' location in a patrolling game

Keywords: search game, patrolling, attacking, equilibrium.

MSC: 05C57

A patrolling game with two players, a patroller and an attacker, is considered in the paper. The aim of the former is to protect an object from intruders and catch the attacker. The aim of the latter is to cause damage to the protected object without being caught. Cellular base stations are viewed as protected objects. A game-theoretic model is constructed to find an initial distribution of players on base stations. When the transition matrix of players among the stations is known, an optimal strategy of players and the value of the game are calculated. An inverse problem of searching for optimal transition matrices with known initial distribution of players is studied. The Nash equilibrium with the attacker making two attacks is found for the considered problem.

REFERENCES

1. Benkoski S.J., Monticino M.G., Weisinger J.R. A survey of the search theory literature, *Naval Research Logistics*, 1991, vol. 18, pp. 469–494.
2. Chew M.C. Optimal stopping in a discrete search problem, *Operations Research*, 1973, vol. 21, pp. 741–747.
3. Gittins J.S. An application of control theory to a game of hide and seek, *International Journal of Control*, 1979, vol. 30, pp. 981–987.
4. Iida K. Optimal search and stop in continuous search process, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 1984, vol. 27, pp. 1–30.
5. Joshi S.S., Phoha V.V. Investigating hidden Markov models capabilities in anomaly detection, *Proceedings of 43rd Annual Southeast Regional Conference*, Kennesaw, GA, March 2005, pp. 98–103.
6. Zhao F., Jin H. Automated approach to intrusion detection in vm-based dynamic execution environment, *Computing and Informatics*, 2012, vol. 31, pp. 271–297.
7. Mazalov V.V. *Matematicheskaya teoriya igr i prilozheniya* (Mathematical theory of games and applications), St. Petersburg: Lan', 2010, 448 p.

Received 08.10.2015

Gusev Vasilii Vasil'evich, post-graduate student, Laboratory of Mathematical Cybernetics, Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre of RAS, ul. Pushkinskaya, 11, Petrozavodsk, 185910, Russia.
E-mail: gusev@krc.karelia.ru