УДК 519.175, 519.115

© *Х. Ш. Аль Джабри, В. И. Родионов*

ГРАФ АЦИКЛИЧЕСКИХ ОРГРАФОВ

В терминах характеристических функций на множестве всех бинарных отношений множества X вводится понятие бинарного рефлексивного отношения смежности и определяется алгебраическая система, состоящая из всех бинарных отношений множества и из всех неупорядоченных пар смежных бинарных отношений. Если X — конечное множество, то эта алгебраическая система — граф («граф графов»). Доказано, что диаметр графа бинарных отношений равен 2. Показано, что если σ и τ — смежные отношения, то σ — ациклическое отношение (конечный ациклический орграф) тогда и только тогда, когда τ — ациклическое отношение. Получена явная формула для числа компонент связности графа ациклических отношений.

Ключевые слова: бинарное отношение, ациклический ориентированный граф.

Работа продолжает исследование введенного авторами графа бинарных отношений [1, 2].

1. Смежность бинарных отношений. Пусть $B \doteq \{0,1\}$ — булево множество, X — произвольное множество, а $X^2 \doteq X \times X$ — прямое произведение. Функции $X^2 \to B$ будем называть *характеристическими.* Всякое подмножество $\sigma \subseteq X^2$, называемое *бинарным отношением* (или просто *отношением*) на множестве X, порождает характеристическую функцию

$$\chi_\sigma \colon X^2 \to B, \qquad \chi_\sigma(x,y) \doteq \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (x,y) \in \sigma, \\ 0, & \text{если} \quad (x,y) \notin \sigma. \end{cases}$$

Далее функцию $\chi_\sigma(\cdot,\cdot)$ будем обозначать через $\sigma(\cdot,\cdot)$. С другой стороны, всякая характеристическая функция $\chi\colon X^2 \to B$ порождает бинарное отношение $\sigma_\chi \subseteq X^2$ такое, что $(x,y) \in \sigma_\chi$, если $\chi(x,y) = 1$. Очевидно, отображение $\sigma \to \sigma(\cdot,\cdot)$ является биекцией между множеством бинарных отношений и множеством характеристических функций. В силу этого обстоятельства мы называем σ как отношением, так и функцией.

Определение 1. Пусть $X = Y \cup Z$ — дизъюнктное объединение двух подмножеств (допускается, что $Y = \varnothing$ или $Z = \varnothing$). Предположим, что отношение $\sigma \subseteq X^2$ таково, что $\sigma(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in Y \times Z$. Оно порождает отношение $\tau \subseteq X^2$ такое, что

$$\begin{aligned} &\tau(x,y) = 1 - \sigma(y,x) \text{ для всех } (x,y) \in Y \times Z, \\ &\tau(x,y) = 0 \text{ для всех } (x,y) \in Z \times Y, \\ &\tau(x,y) = \sigma(x,y) \text{ для всех } (x,y) \in Y^2 \cup Z^2. \end{aligned}$$

Отношение τ называется *смежным* с отношением σ.

Из определения следует, что если τ смежно с σ, то и σ смежно с τ, и этот факт мы записываем в виде диаграммы $\sigma \xleftrightarrow{Y\times Z} \tau$. Применяя обозначение $\sigma|_{P\times Q}$ для сужения функции σ на прямоугольник $P \times Q$, получаем блочное представление

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|}\hline \sigma|_{Y^2} & 0 \\ \hline \sigma|_{Z\times Y} & \sigma|_{Z^2} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{cc} Y & \quad Z \end{array} \end{array} = \sigma \xleftrightarrow{Y\times Z} \tau = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c} \cline{1-2} \tau|_{Y^2} & \tau|_{Y\times Z} & Y \\ \cline{1-2} 0 & \tau|_{Z^2} & Z \\ \cline{1-2} \end{array} \\ \begin{array}{cc} Y & \quad Z \end{array} \end{array} .$$

Так как $\sigma(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in Y \times Z$, то в блоке $Y \times Z$ записан «обобщенный» ноль (аналогично в блоке $Z \times Y$ отношения τ). В остальных блоках значения неизвестны, и там мы поступаем следующим образом. Берем за основу, например, отношение σ и проставляем в его блоках условный символ ε; так как $\tau|_{Y^2} = \sigma|_{Y^2}$ и $\tau|_{Z^2} = \sigma|_{Z^2}$, то в диагональных блоках отношения τ тоже пишем символ ε; наконец, в блоке $Y\times Z$ отношения τ пишем символ ε', означающий, что $\tau(x,y)=1-\sigma(y,x)$ для всех $(x,y)\in Y\times Z$:

$$\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|}\hline \varepsilon & 0\\ \hline \varepsilon & \varepsilon\\ \hline\end{array}\\ Y\quad Z\end{array} = \sigma \xleftrightarrow{Y\times Z} \tau = \begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|}\hline \varepsilon & \varepsilon'\\ \hline 0 & \varepsilon\\ \hline\end{array}\begin{array}{c} Y\\ Z\end{array}\\ Y\quad Z\qquad\end{array}. \tag{1}$$

На протяжении работы мы представляем диаграммы в виде (1). Заметим, что за основу можно брать и отношение τ (тогда в его блоке $Y\times Z$ следует писать символ ε, а в блоке $Z\times Y$ отношения σ — символ ε'). Еще заметим, что довольно часто мы применяем «обобщенную» единицу (в том случае, если априори известно, что все элементы блока равны 1).

Таким образом, X порождает пару $\left\langle 2^{X^2}, E(X)\right\rangle$, где через 2^{X^2} обозначено множество вершин, состоящее из всех бинарных отношений множества X, а $E(X)$ — это множество ребер, состоящее из неупорядоченных пар смежных бинарных отношений множества X (так как допускается, что $Y=\varnothing$, то $E(X)$ содержит все петли). Пару $G(X)\doteq\left\langle 2^{X^2}, E(X)\right\rangle$ будем называть (неориентированным) *графом бинарных отношений* множества X.

Будем говорить, что бинарные отношения σ и τ принадлежат одной *компоненте связности* графа $G(X)$, если существует конечная последовательность отношений $\sigma=\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m=\tau$, в которой отношения σ_{k-1} и σ_k смежны при всех $k=2,\ldots,m$. Через $G_\sigma(X)$ будем обозначать ту компоненту связности графа $G(X)$, которая содержит данное отношение σ.

2. Диаметр графа бинарных отношений.

Лемма 1. *Для любых двух несмежных отношений $\sigma',\sigma''\in G_\sigma(X)$ графа $\left\langle 2^{X^2}, E(X)\right\rangle$ существует отношение $\tau\in G_\sigma(X)$ такое, что*

$$\sigma' \xleftrightarrow{Y'\times Z'} \tau \xleftrightarrow{Y''\times Z''} \sigma'',\qquad Y'\times Z'\neq\varnothing,\qquad Y''\times Z''\neq\varnothing.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Конечную цепочку

$$\sigma_0 \xleftrightarrow{Y_1\times Z_1} \sigma_1 \xleftrightarrow{Y_2\times Z_2} \sigma_2 \longleftrightarrow \ \ldots\ \longleftrightarrow \sigma_{m-2} \xleftrightarrow{Y_{m-1}\times Z_{m-1}} \sigma_{m-1} \xleftrightarrow{Y_m\times Z_m} \sigma_m$$

смежных отношений из компоненты $G_\sigma(X)$ будем называть *канонической*, если $\sigma_{k-1}\neq\sigma_k$ для всех $k=1,\ldots,m$ и $\sigma_{k-1}\neq\sigma_{k+1}$ для всех $k=1,\ldots,m-1$. Очевидно, $Y_k\neq\varnothing\neq Z_k$ для всех $k=1,\ldots,m$ и $Z_{k-1}\neq Y_k$ для всех $k=2,\ldots,m$. Через Ω_σ^m обозначим семейство всех канонических цепочек длины m компоненты $G_\sigma(X)$.

Так как $\sigma',\sigma''\in G_\sigma(X)$, то существует конечная цепочка $\sigma'=\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_\mu=\sigma''$, в которой отношения σ_{k-1} и σ_k смежны при всех $k=2,\ldots,\mu$. Если цепочка не каноническая, то осуществим следующую процедуру удаления лишних узлов: просматривая цепочку слева направо и обнаружив при некотором k равенство $\sigma_{k-1}=\sigma_k$, удаляем из цепочки отношение σ_{k-1}; вновь просматривая цепочку слева направо и обнаружив при некотором k равенство $\sigma_{k-1}=\sigma_{k+1}$, удаляем из цепочки отношения σ_{k-1} и σ_k. В итоге мы получим каноническую цепочку $\sigma'=\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_m=\sigma''$ из Ω_σ^m. Далее рассматриваем только канонические цепи.

Так как σ' и σ'' — несмежные отношения, то $m>1$. При $m=2$ утверждение леммы очевидно (достаточно положить $\tau=\sigma_1$). При $m=3$ цепочка имеет вид

$$\sigma_0 \xleftrightarrow{Y_1\times Z_1} \sigma_1 \xleftrightarrow{Y_2\times Z_2} \sigma_2 \xleftrightarrow{Y_3\times Z_3} \sigma_3, \tag{2}$$

причем $Y_k\neq\varnothing\neq Z_k$, $k=1,2,3$, $Z_1\neq Y_2$, $Z_2\neq Y_3$. Если

$$\begin{array}{llll} S_1\doteq Y_1\cap Y_2\cap Y_3, & S_2\doteq Y_1\cap Y_2\cap Z_3, & S_3\doteq Y_1\cap Z_2\cap Y_3, & S_4\doteq Y_1\cap Z_2\cap Z_3,\\ S_5\doteq Z_1\cap Y_2\cap Y_3, & S_6\doteq Z_1\cap Y_2\cap Z_3, & S_7\doteq Z_1\cap Z_2\cap Y_3, & S_8\doteq Z_1\cap Z_2\cap Z_3,\end{array}$$

то

$$\begin{array}{lll} Y_1=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4, & Z_1=S_5\cup S_6\cup S_7\cup S_8, & Y_2=S_1\cup S_2\cup S_5\cup S_6,\\ Z_2=S_3\cup S_4\cup S_7\cup S_8, & Y_3=S_1\cup S_3\cup S_5\cup S_7, & Z_3=S_2\cup S_4\cup S_6\cup S_8.\end{array}$$

Допустим, что $S_1 \neq \varnothing$ и $S_8 \neq \varnothing$. Тогда для любой пары $(x,y) \in S_1 \times S_8$ имеем $(y,x) \in Z_1 \times Y_1$ и $(x,y) \in Y_3 \times Z_3$, поэтому в силу диаграммы (2) справедливо $\sigma_1(y,x) = 0$ и $\sigma_2(x,y) = 0$. С другой стороны, $S_1 \times S_8 \subseteq Y_2 \times Z_2$, поэтому $\sigma_2(x,y) = 1 - \sigma_1(y,x) = 1$ — противоречие. Значит, одно из множеств S_1 или S_8 пусто.

I. Допустим, что $S_1 \neq \varnothing$, а $S_8 = \varnothing$. В этом случае имеют место следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_1(x,y) = 0 \ \text{ для всех } \ (x,y) \in Z_1 \times Y_1 = [\,S_5 \cup S_6 \cup S_7] \times [\,S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4],\\
&\sigma_1(x,y) = 0 \ \text{ для всех } \ (x,y) \in Y_2 \times Z_2 = [\,S_1 \cup S_2 \cup S_5 \cup S_6] \times [\,S_3 \cup S_4 \cup S_7],\\
&\sigma_2(x,y) = 0 \ \text{ для всех } \ (x,y) \in Z_2 \times Y_2 = [\,S_3 \cup S_4 \cup S_7] \times [\,S_1 \cup S_2 \cup S_5 \cup S_6],\\
&\sigma_2(x,y) = 0 \ \text{ для всех } \ (x,y) \in Y_3 \times Z_3 = [\,S_1 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7] \times [\,S_2 \cup S_4 \cup S_6].
\end{aligned} \tag{3}
$$

Кроме того, в силу диаграммы $\sigma_1 \xleftrightarrow{Y_2 \times Z_2} \sigma_2$ справедливы следующие утверждения.

1. Так как $\Delta_1 \doteq [\,S_1 \times S_2] \cup [\,S_1 \times S_6] \cup [\,S_5 \times S_6] \subseteq Y_2^2$, то $\sigma_1(x,y) = \sigma_2(x,y)$ при $(x,y) \in \Delta_1$, а так как $\Delta_1 \subseteq Y_3 \times Z_3$, то $\sigma_2(x,y) = 0$. Значит, $\sigma_1(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in \Delta_1$.

2. Так как $\Delta_2 \doteq S_3 \times S_4 \subseteq Z_2^2$, то $\sigma_1(x,y) = \sigma_2(x,y)$ при $(x,y) \in \Delta_2$, а так как $\Delta_2 \subseteq Y_3 \times Z_3$, то $\sigma_2(x,y) = 0$. Значит, $\sigma_1(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in \Delta_2$.

3. Так как $\Delta_3 \doteq [\,S_4 \times S_1] \cup [\,S_4 \times S_5] \subseteq Z_2 \times Y_2$, то $\sigma_1(x,y) = 1 - \sigma_2(y,x)$ при $(x,y) \in \Delta_3$, а так как $\Delta_3 \subseteq Z_3 \times Y_3$, то $\sigma_2(y,x) = 0$. Значит, $\sigma_1(x,y) = 1$ для всех $(x,y) \in \Delta_3$.

4. Так как $\Delta_4 \doteq [\,S_1 \times S_7] \cup [\,S_2 \times S_7] \subseteq Y_2 \times Z_2$, то $\sigma_2(x,y) = 1 - \sigma_1(y,x)$ при $(x,y) \in \Delta_4$, а так как $\Delta_4 \subseteq Y_1 \times Z_1$, то $\sigma_1(y,x) = 0$. Значит, $\sigma_2(x,y) = 1$ для всех $(x,y) \in \Delta_4$.

5. Так как $\Delta_5 \doteq S_7 \times S_3 \subseteq Z_2^2$, то $\sigma_2(x,y) = \sigma_1(x,y)$ при $(x,y) \in \Delta_5$, а так как $\Delta_5 \subseteq Z_1 \times Y_1$, то $\sigma_1(x,y) = 0$. Значит, $\sigma_2(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in \Delta_5$.

6. Так как $\Delta_6 \doteq [\,S_5 \times S_1] \cup [\,S_6 \times S_1] \cup [\,S_6 \times S_2] \subseteq Y_2^2$, то $\sigma_2(x,y) = \sigma_1(x,y)$ при $(x,y) \in \Delta_6$, а так как $\Delta_6 \subseteq Z_1 \times Y_1$, то $\sigma_1(x,y) = 0$. Значит, $\sigma_2(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in \Delta_6$.

В силу этих утверждений и формул (3) для отношений σ_1 и σ_2 имеем блочные представления (за основу берем σ_1):

$$
\sigma_1 = \begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\varepsilon & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline
\varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \hline
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline
1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline
\end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \end{array}
\end{array}, \qquad
\sigma_2 = \begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\varepsilon & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 & 1 \\ \hline
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \hline
0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ \hline
0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon \\ \hline
0 & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 & \varepsilon' \\ \hline
0 & 0 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ \hline
\end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ \end{array} .
$$

Следовательно, в силу диаграмм $\sigma_1 \xleftrightarrow{Z_1 \times Y_1} \sigma_0$ и $\sigma_2 \xleftrightarrow{Y_3 \times Z_3} \sigma_3$ справедливы представления

$$
\sigma_0 = \begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline
1 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \hline
1 & 1 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline
\end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \end{array}
\end{array}, \qquad
\sigma_3 = \begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon' & 1 & \varepsilon & 1 & 1 \\ \hline
0 & \varepsilon & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline
0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline
0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & \varepsilon' & \varepsilon' & 1 & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \hline
0 & 0 & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline
\end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ \end{array} . \tag{4}
$$

Имеет место диаграмма $\sigma_0 \xleftrightarrow{[S_1\cup S_2]\times[S_3\cup S_4\cup S_5\cup S_6\cup S_7]} \tau \xleftrightarrow{[S_1\cup S_3\cup S_5]\times[S_2\cup S_4\cup S_6\cup S_7]} \sigma_3$, где

$$\tau \doteq \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|l}
\varepsilon & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & S_1\\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & 0 & S_2\\
0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & S_3\\
0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & S_4\\
0 & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & S_5\\
0 & 0 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & 0 & S_6\\
0 & 0 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & S_7\\
S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 &
\end{array}.$$

Так как $\varnothing = S_8 = Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3$, то справедливы равенства

$$\begin{aligned}
S_4 &= Y_1 \cap Z_2 \cap Z_3 = [Y_1 \cap Z_2 \cap Z_3] \cup [Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3] = Z_2 \cap Z_3,\\
S_6 &= Z_1 \cap Y_2 \cap Z_3 = [Z_1 \cap Y_2 \cap Z_3] \cup [Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3] = Z_1 \cap Z_3,\\
S_7 &= Z_1 \cap Z_2 \cap Y_3 = [Z_1 \cap Z_2 \cap Y_3] \cup [Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3] = Z_1 \cap Z_2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Пусть $W \doteq S_4 \cup S_6 \cup S_7 = [Z_1 \cap Z_2] \cup [Z_1 \cap Z_3] \cup [Z_2 \cap Z_3]$.

Если $W = \varnothing$, то $Z_1 \cap Z_2 = Z_1 \cap Z_3 = Z_2 \cap Z_3 = \varnothing$, поэтому

$$S_2 = Y_1 \cap Y_2 \cap Z_3 = [Y_1 \cap Y_2 \cap Z_3] \cup [Y_1 \cap Z_2 \cap Z_3] = Y_1 \cap Z_3 = [Y_1 \cap Z_3] \cup [Z_1 \cap Z_3] = Z_3 \neq \varnothing,$$
$$S_3 = Y_1 \cap Z_2 \cap Y_3 = [Y_1 \cap Z_2 \cap Y_3] \cup [Z_1 \cap Z_2 \cap Y_3] = Z_2 \cap Y_3 = [Z_2 \cap Y_3] \cup [Z_2 \cap Z_3] = Z_2 \neq \varnothing,$$
$$S_5 = Z_1 \cap Y_2 \cap Y_3 = [Z_1 \cap Y_2 \cap Y_3] \cup [Z_1 \cap Z_2 \cap Y_3] = Z_1 \cap Y_3 = [Z_1 \cap Y_3] \cup [Z_1 \cap Z_3] = Z_1 \neq \varnothing.$$

Диаграмма принимает вид $\sigma_0 \xleftrightarrow{[S_1\cup S_2]\times[S_3\cup S_5]} \tau \xleftrightarrow{[S_1\cup S_3\cup S_5]\times[S_2]} \sigma_3$, причем прямые произведения в ней не пустые.

При $W \neq \varnothing$ диаграмма имеет вид $\sigma_0 \xleftrightarrow{[S_1\cup S_2]\times[S_3\cup S_5\cup W]} \tau \xleftrightarrow{[S_1\cup S_3\cup S_5]\times[S_2\cup W]} \sigma_3$, а так как $S_1 \neq \varnothing$, то прямые произведения в диаграмме не пустые.

II. Случай $S_1 = \varnothing$, $S_8 \neq \varnothing$ доказывается симметричным образом.

III. Пусть, наконец, $S_1 = S_8 = \varnothing$. Блочные представления (4) для отношений σ_0 и σ_3 принимают вид

$$\sigma_0 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline
\varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0\\ \hline
\varepsilon' & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 & 0\\ \hline
\varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & 0\\ \hline
1 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon\\ \hline
\multicolumn{1}{c}{S_2} & \multicolumn{1}{c}{S_3} & \multicolumn{1}{c}{S_4} & \multicolumn{1}{c}{S_5} & \multicolumn{1}{c}{S_6} & \multicolumn{1}{c}{S_7}
\end{array}, \qquad
\sigma_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|l}
\hline
\varepsilon & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 & S_2\\ \hline
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & \varepsilon & S_3\\ \hline
0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & S_4\\ \hline
\varepsilon' & \varepsilon' & 1 & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon' & S_5\\ \hline
0 & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 & S_6\\ \hline
0 & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & \varepsilon & S_7\\ \hline
\multicolumn{1}{c}{S_2} & \multicolumn{1}{c}{S_3} & \multicolumn{1}{c}{S_4} & \multicolumn{1}{c}{S_5} & \multicolumn{1}{c}{S_6} & \multicolumn{1}{c}{S_7} &
\end{array}.$$

Легко убедиться в истинности следующих диаграмм:

$$\sigma_0 \xleftrightarrow{[S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5]\times[S_6\cup S_7]} \tau_1 \xleftrightarrow{[S_2\cup S_3\cup S_5\cup S_6\cup S_7]\times[S_4]} \sigma_3, \tag{6}$$

$$\sigma_0 \xleftrightarrow{[S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5\cup S_6]\times[S_7]} \tau_2 \xleftrightarrow{[S_2\cup S_3\cup S_5\cup S_7]\times[S_4\cup S_6]} \sigma_3, \tag{7}$$

$$\sigma_0 \xleftrightarrow{[S_2]\times[S_3\cup S_4\cup S_5\cup S_6\cup S_7]} \tau_3 \xleftrightarrow{[S_3\cup S_5]\times[S_2\cup S_4\cup S_6\cup S_7]} \sigma_3, \tag{8}$$

$$\sigma_0 \xleftrightarrow{[S_2\cup S_3]\times[S_4\cup S_5\cup S_6\cup S_7]} \tau_4 \xleftrightarrow{[S_5]\times[S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_6\cup S_7]} \sigma_3, \tag{9}$$

где

$$\tau_1 \doteq \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\varepsilon & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline
\varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline
\varepsilon' & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline
\multicolumn{1}{c}{S_2} & \multicolumn{1}{c}{S_3} & \multicolumn{1}{c}{S_4} & \multicolumn{1}{c}{S_5} & \multicolumn{1}{c}{S_6} & \multicolumn{1}{c}{S_7}
\end{array}, \qquad
\tau_2 \doteq \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|l}
\hline
\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_2 \\ \hline
\varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & S_3 \\ \hline
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon & S_4 \\ \hline
\varepsilon' & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 & \varepsilon' & S_5 \\ \hline
\varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' & S_6 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & S_7 \\ \hline
\multicolumn{1}{c}{S_2} & \multicolumn{1}{c}{S_3} & \multicolumn{1}{c}{S_4} & \multicolumn{1}{c}{S_5} & \multicolumn{1}{c}{S_6} & \multicolumn{1}{c}{S_7} &
\end{array},$$

$$\tau_3 \doteq \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \hline
0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline
0 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \hline
0 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline
\multicolumn{1}{c}{S_2} & \multicolumn{1}{c}{S_3} & \multicolumn{1}{c}{S_4} & \multicolumn{1}{c}{S_5} & \multicolumn{1}{c}{S_6} & \multicolumn{1}{c}{S_7}
\end{array}, \qquad
\tau_4 \doteq \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|l}
\hline
\varepsilon & 0 & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & 0 & S_2 \\ \hline
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & S_3 \\ \hline
0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & S_4 \\ \hline
0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & S_5 \\ \hline
0 & 0 & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & 0 & S_6 \\ \hline
0 & 0 & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & S_7 \\ \hline
\multicolumn{1}{c}{S_2} & \multicolumn{1}{c}{S_3} & \multicolumn{1}{c}{S_4} & \multicolumn{1}{c}{S_5} & \multicolumn{1}{c}{S_6} & \multicolumn{1}{c}{S_7} &
\end{array}.$$

В силу (5) имеем $S_4 = Z_2 \cap Z_3$, $S_6 = Z_1 \cap Z_3$, $S_7 = Z_1 \cap Z_2$, а так как $\varnothing = S_1 = Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3$, то

$$S_2 = Y_1 \cap Y_2 \cap Z_3 = [\,Y_1 \cap Y_2 \cap Z_3] \cup [\,Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3] = Y_1 \cap Y_2,$$

$$S_3 = Y_1 \cap Z_2 \cap Y_3 = [\,Y_1 \cap Z_2 \cap Y_3] \cup [\,Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3] = Y_1 \cap Y_3,$$

$$S_5 = Z_1 \cap Y_2 \cap Y_3 = [\,Z_1 \cap Y_2 \cap Y_3] \cup [\,Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3] = Y_2 \cap Y_3.$$

В элементарной теории множеств справедлива импликация

$$A, B \subseteq X, \quad A \cap B = \varnothing, \quad \overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \overline{A} = B, \quad \overline{B} = A. \tag{10}$$

Следовательно, $S_2 \cup S_7 \neq \varnothing$ и $S_4 \cup S_5 \neq \varnothing$. (Предположим, например, что $S_2 \cup S_7 = \varnothing$, тогда $\varnothing = S_2 = Y_1 \cap Y_2$ и $\varnothing = S_7 = Z_1 \cap Z_2 = \overline{Y}_1 \cap \overline{Y}_2$, поэтому $Z_1 = Y_2$, — противоречие. Предположив истинность равенства $S_4 \cup S_5 = \varnothing$, также получим противоречие $Z_2 = Y_3$.)

1. Если $S_4 \neq \varnothing$ и $S_7 \neq \varnothing$, то прямые произведения в диаграммах (6), (7) не пустые.
2. Если $S_4 = \varnothing$ и $S_7 = \varnothing$, то $S_5 \neq \varnothing$ и $S_2 \neq \varnothing$, следовательно, прямые произведения в диаграммах (8), (9) не пустые.
3. Пусть $S_4 \neq \varnothing$, а $S_7 = \varnothing$, тогда $S_2 \neq \varnothing$.

3а. Если $S_5 \neq \varnothing$, то прямые произведения в диаграммах (8), (9) не пустые.

3б. При $S_5 = \varnothing$ справедливо неравенство $S_3 \cup S_6 \neq \varnothing$. Предположив противное, имеем $S_3 = \varnothing$, $S_6 = \varnothing$, а в соответствии с (10) получаем равенство $Z_1 = Y_3$. Значит,

$$\varnothing = S_5 \cup S_7 = [\,Y_2 \cap Y_3] \cup [\,Z_1 \cap Z_2] = [\,Y_2 \cap Y_3] \cup [\,Y_3 \cap Z_2] = Y_3$$

— противоречие. Если $S_3 \neq \varnothing$, то прямые произведения в диаграмме (8) не пустые, а если $S_6 \neq \varnothing$, то прямые произведения в диаграмме (6) не пустые.

4. Пусть, наконец, $S_4 = \varnothing$, а $S_7 \neq \varnothing$, тогда $S_5 \neq \varnothing$.

4а. Если $S_2 \neq \varnothing$, то прямые произведения в диаграммах (8), (9) не пустые.

4б. При $S_2 = \varnothing$ справедливо неравенство $S_3 \cup S_6 \neq \varnothing$. Предположив противное, имеем $S_3 = \varnothing$, $S_6 = \varnothing$, а в соответствии с (10) получаем равенство $Z_3 = Y_1$. Значит,

$$\varnothing = S_2 \cup S_4 = [\,Y_1 \cap Y_2] \cup [\,Z_2 \cap Z_3] = [\,Y_1 \cap Y_2] \cup [\,Z_2 \cap Y_1] = Y_1$$

— противоречие. Если $S_3 \neq \varnothing$, то прямые произведения в диаграмме (9) не пустые, а если $S_6 \neq \varnothing$, то прямые произведения в диаграмме (7) не пустые.

Таким образом, при $m = 3$ утверждение леммы доказано. Оно является базой индукции. Зафиксируем $m > 3$ и предположим, что утверждение леммы справедливо для всех канонических цепочек из множества Ω_σ^{m-1}. Зафиксируем каноническую цепочку

$$\sigma' = \sigma_0 \xleftrightarrow{Y_1 \times Z_1} \sigma_1 \xleftrightarrow{Y_2 \times Z_2} \sigma_2 \xleftrightarrow{Y_3 \times Z_3} \sigma_3 \longleftrightarrow \ldots \longleftrightarrow \sigma_{m-1} \xleftrightarrow{Y_m \times Z_m} \sigma_m = \sigma''$$

из множества Ω_σ^m. Существует отношение $\tau \in G_\sigma(X)$ такое, что

$$\sigma_0 \xleftrightarrow{Y' \times Z'} \tau \xleftrightarrow{Y'' \times Z''} \sigma_3, \qquad Y' \times Z' \neq \varnothing, \qquad Y'' \times Z'' \neq \varnothing,$$

следовательно, отношения σ' и σ'' связаны цепочкой

$$\sigma' = \sigma_0 \xleftrightarrow{Y' \times Z'} \tau \xleftrightarrow{Y'' \times Z''} \sigma_3 \longleftrightarrow \ldots \longleftrightarrow \sigma_{m-1} \xleftrightarrow{Y_m \times Z_m} \sigma_m = \sigma''$$

из множества Ω_σ^{m-1}, что и доказывает индукционный переход.

Следствие 1. *Диаметр нетривиального графа бинарных отношений равен* 2.

3. Смежность ациклических отношений (ациклических орграфов). Далее считаем, что множество $X \doteq \{1, \ldots, n\}$ конечно. Отношение $\sigma \in 2^{X^2}$ называем *ациклическим*, если:

1) $\sigma(x, x) = 0$ для всех $x \in X$;

2) для всех $m > 1$ и для всех $(x_1, \ldots, x_m) \in X^m$ имеет место равенство

$$\sigma(x_m, x_1) \prod_{k=2}^{m} \sigma(x_{k-1}, x_k) = 0.$$

Семейство ациклических отношений обозначим через $A(X)$. Легко установить взаимно-однозначное соответствие между множеством $A(X)$ и множеством всех ациклических ориентированных графов, определенных на X. В разделе теории графов, посвященном этим графам, хорошо известно утверждение о том, что в любом конечном ациклическом орграфе множество вершин, в которые не входят дуги, не пусто. Поэтому справедливо следующее утверждение:

для любого $\sigma \in A(X)$ *множество* $S(\sigma) \doteq \{ y \in X : \sigma(x, y) = 0$ для всех $x \in X \}$ *не пусто.*

Мы называем множества $S(\sigma)$ *опорными* (или *опорами*). В теории графов они называются множествами максимальных вершин (см., например, [3]).

Очевидно, всякий подграф ациклического орграфа является ациклическим, следовательно, имеет место следующее утверждение:

$$\text{если } \sigma \in A(X) \text{ и } \varnothing \neq Y \subseteq X, \text{ то } \sigma|_{Y^2} \in A(Y) \text{ и } S(\sigma|_{Y^2}) \neq \varnothing. \tag{11}$$

Всякое отношение $\sigma \in A(X)$ порождает (рекурсивным образом) два семейства множеств:

$$X^0 \doteq X,$$
$$X_k \doteq S\big(\sigma|_{X^{k-1} \times X^{k-1}}\big) \neq \varnothing, \qquad X^k \doteq X^{k-1} \backslash X_k, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Так как $X^0 \supset X^1 \supset X^2 \supset \ldots$ и все включения строгие (в силу неравенств $X_k \neq \varnothing$), то рекурсивный процесс завершится за конечное число шагов. Другими словами, найдется p такое, что $X^{p-1} \neq \varnothing$, $X^p = \varnothing$. В частности, это означает, что $X_p = X^{p-1}$, а совокупность $(X_1, \ldots, X_p)$ является разбиением множества X. Более того, для всех $k = 1, \ldots, p$ имеет место равенство $X^{k-1} = \cup_{i=k}^{p} X_i$ (оно доказывается индукцией с помощью равенства $X^{k-1} = X^k \cup X_k$). Из рекурсии следует, что $X_k = \{ y \in X^{k-1} : \sigma(x, y) = 0$ для всех $x \in X^{k-1}\}$, $k = 1, \ldots, p$, значит,

1) $\sigma(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in X^{k-1} \times X_k$, $k = 1, \ldots, p$;

2) для любого $y \in X^k = X^{k-1} \backslash X_k$ найдется $x \in X^{k-1}$ такое, что $\sigma(x, y) = 1$, $k = 1, \ldots, p-1$.

Ниже мы приводим два следствия этих утверждений. Так как $X^{k-1} = \cup_{i=k}^{p} X_i$, $k = 1, \ldots, p$, то $\sigma(x, y) = 0$ *для всех* $(x, y) \in \Omega \doteq \cup_{k=1}^{p} \cup_{i=k}^{p} (X_i \times X_k)$. Зафиксируем элемент $y \in X_k$, $k = 2, \ldots, p$. Тогда $\sigma(x, y) = 0$ для всех $x \in X^{k-1}$, а так как $X_k \subseteq X^{k-1}$, то $y \in X^{k-1}$, поэтому найдется $x \in X^{k-2}$ такое, что $\sigma(x, y) = 1$. Следовательно, существует $x \in X^{k-2} \backslash X^{k-1} = X_{k-1}$ такое, что $\sigma(x, y) = 1$. Таким образом, *для любого* $k = 2, \ldots, p$ *и для любого* $y \in X_k$ *найдется* $x \in X_{k-1}$ *такое, что* $\sigma(x, y) = 1$.

В силу этих следствий для отношения $\sigma \in A(X)$ имеет место представление (12), в котором используется условный символ $*$, означающий, что в блоке $X_{k-1} \times X_k$, $k = 2, \ldots, p$, в каждом столбце имеется хотя бы одна единица (называем блок *невырожденным*):

$$\sigma = \begin{array}{cc} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & * & & & & \\ \hline 0 & 0 & * & & & \\ \hline \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \hline \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & * & \\ \hline 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_p \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} X_1 & X_2 & \ldots & \ldots & \ldots & X_p \end{array} & \end{array} . \tag{12}$$

Для любого $k = 1, \ldots, p$ определены множества $Y_k \doteq \cup_{i=k}^{p} X_i$ и $Z_k \doteq \cup_{j=1}^{k-1} X_j$, причем

$$Y_k \times Z_k = \bigcup_{j=1}^{k-1} \bigcup_{i=k}^{p} (X_i \times X_j) \subset \bigcup_{j=1}^{k-1} \bigcup_{i=j}^{p} (X_i \times X_j) \subset \bigcup_{j=1}^{p} \bigcup_{i=j}^{p} (X_i \times X_j) = \Omega,$$

следовательно, $\sigma(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in Y_k \times Z_k$. Очевидно, $Y_k \cup Z_k = X$ — дизъюнктное объединение, поэтому оно порождает отношение $\sigma^k \in 2^{X^2}$ такое, что

$$\sigma \xleftrightarrow{Y_k \times Z_k} \sigma^k. \tag{13}$$

(Заметим, что $Y_1 = X$, $Z_1 = \varnothing$, $\sigma^1 = \sigma$.) Таким образом, для любого $\sigma \in A(X)$ определено разбиение $(X_1, \ldots, X_p)$ множества X такое, что $X_1 = S(\sigma)$, справедливо представление (12) и в соответствии с диаграммой (13) определены отношения $\sigma^k \in 2^{X^2}$, $k = 1, \ldots, p$.

Замечание 1. Легко показать, что отношения σ^k и σ^m, $k, m = 1, \ldots, p$, смежны.

4. Граф ациклических отношений (ациклических орграфов).

Теорема 1. *Пусть σ и τ — смежные отношения. Включение $\sigma \in A(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\tau \in A(X)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sigma \in A(X)$. В силу диаграммы (1) $\tau(x, x) = \sigma(x, x)$ для всех $x \in X$. Допустим, что $\tau \notin A(X)$. Тогда для некоторого $(x_1, \ldots, x_m) \in X^m$ справедливы равенства $\tau(x_{k-1}, x_k) = 1$ для всех $k = 2, \ldots, m$ и $\tau(x_m, x_1) = 1$.

Далее применяем обозначения диаграммы (1) и равенства $\sigma|_{Y^2} = \tau|_{Y^2}$, $\sigma|_{Z^2} = \tau|_{Z^2}$.

1. Допустим, что $x_1 \in Z$. Так как $\tau(x_1, x_2) = 1$ и $\tau(x_1, \eta) = 0$ для всех $\eta \in Y$, то $x_2 \in Z$. Так как $x_2 \in Z$, $\tau(x_2, x_3) = 1$ и $\tau(x_2, \eta) = 0$ для всех $\eta \in Y$, то $x_3 \in Z$. И так далее. Таким образом, $x_k \in Z$, $k = 1, \ldots, m$. Следовательно, $\sigma(x_{k-1}, x_k) = \tau(x_{k-1}, x_k) = 1$ для всех $k = 2, \ldots, m$ и $\sigma(x_m, x_1) = \tau(x_m, x_1) = 1$, что противоречит включению $\sigma \in A(X)$.

2. Значит, $x_1 \in Y$. Так как $x_1 \in Y$, $\tau(x_m, x_1) = 1$ и $\tau(\xi, x_1) = 0$ для всех $\xi \in Z$, то $x_m \in Y$. (Допустим, что $x_k \in Z$ для некоторого $k \in \{2, \ldots, m-1\}$. Так как $x_k \in Z$, $\tau(x_k, x_{k+1}) = 1$ и $\tau(x_k, \eta) = 0$ для всех $\eta \in Y$, то $x_{k+1} \in Z$. Так как $x_{k+1} \in Z$, $\tau(x_{k+1}, x_{k+2}) = 1$ и $\tau(x_{k+1}, \eta) = 0$ для всех $\eta \in Y$, то $x_{k+2} \in Z$. И так далее. Таким образом, $x_k, \ldots, x_m \in Z$. В частности, $x_m \in Z$,

что противоречит включению $x_m \in Y$.) Итак, $x_k \in Y$ для всех $k = 1, \ldots, m$. Следовательно, $\sigma(x_{k-1}, x_k) = \tau(x_{k-1}, x_k) = 1$ для всех $k = 2, \ldots, m$, $\sigma(x_m, x_1) = \tau(x_m, x_1) = 1$, что противоречит включению $\sigma \in A(X)$. Значит, $\tau \in A(X)$. □

Таким образом, множество $A(X)$ порождает подграф $\big\langle A(X), E(X)\big\rangle$ графа $G(X)$. Будем называть его *графом ациклических отношений* (или *графом ациклических орграфов*).

Лемма 2. *Пусть $X \doteq \{1, \ldots, n\}$, $n > 2$. Для любых двух отношений $\sigma', \sigma'' \in G_\sigma(X)$ графа $\big\langle A(X), E(X)\big\rangle$ существует отношение $\tau \in G_\sigma(X)$ такое, что*

$$\sigma' \xleftrightarrow{Y' \times Z'} \tau \xleftrightarrow{Y'' \times Z''} \sigma'', \qquad Y' \times Z' \neq \varnothing, \qquad Y'' \times Z'' \neq \varnothing.$$

Доказательство. Если σ' и σ'' — несмежные отношения, то утверждение справедливо в силу леммы 1. Далее считаем, что σ' и σ'' — смежные отношения: $\sigma' \xleftrightarrow{Y \times Z} \sigma''$.

1. В случае $\sigma' = \sigma''$ полагаем, что $Y = X$, $Z = \varnothing$. Так как σ' и σ'' ациклические, то $P \doteq S(\sigma') = S(\sigma'') \neq \varnothing$. Если $P = X$, то для любого непустого $S \subset X$ имеем $S' \doteq X \backslash S \neq \varnothing$ и

$$\sigma' = \begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0\\\hline 0 & 0\\\hline\end{array}\\ S \;\; S'\end{array} \xleftrightarrow{S \times S'} \tau \doteq \begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1\\\hline 0 & 0\\\hline\end{array}\\ S \;\; S'\end{array} \xleftrightarrow{S' \times S} \sigma'' = \begin{array}{cc}\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0\\\hline 0 & 0\\\hline\end{array} & \begin{array}{c} S\\ S'\end{array}\\ S \;\; S' & \end{array}.$$

Если же $P \subset X$, то $Q \doteq X \backslash P \neq \varnothing$ и

$$\sigma' = \begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & \varepsilon\\\hline 0 & \varepsilon\\\hline\end{array}\\ P \;\; Q\end{array} \xleftrightarrow{Q \times P} \tau \doteq \begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0\\\hline \varepsilon' & \varepsilon\\\hline\end{array}\\ P \;\; Q\end{array} \xleftrightarrow{P \times Q} \sigma'' = \begin{array}{cc}\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & \varepsilon\\\hline 0 & \varepsilon\\\hline\end{array} & \begin{array}{c} P\\ Q\end{array}\\ P \;\; Q & \end{array}.$$

2. Пусть смежные σ' и σ'' таковы, что $\sigma' \neq \sigma''$ (значит, $Y \neq \varnothing \neq Z$). Тогда $\sigma'|_{Y^2} = \sigma''|_{Y^2}$ и $\sigma'|_{Z^2} = \sigma''|_{Z^2}$, а в силу (11) имеем $P \doteq S(\sigma'|_{Y^2}) = S(\sigma''|_{Y^2}) \neq \varnothing$ и $Q \doteq S(\sigma'|_{Z^2}) = S(\sigma''|_{Z^2}) \neq \varnothing$. Если $P' \doteq Y \backslash P$, $Q' \doteq Z \backslash Q$, то имеет место диаграмма

$$\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & \varepsilon & 0 & 0\\\hline 0 & \varepsilon & 0 & 0\\\hline \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon\\\hline \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon\\\hline\end{array}\\ P \;\; P' \;\; Q \;\; Q'\end{array} = \sigma' \xleftrightarrow{Y \times Z} \sigma'' = \begin{array}{cc}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon'\\\hline 0 & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon'\\\hline 0 & 0 & 0 & \varepsilon\\\hline 0 & 0 & 0 & \varepsilon\\\hline\end{array} & \begin{array}{c} P\\ P'\\ Q\\ Q'\end{array}\\ P \;\; P' \;\; Q \;\; Q' & \end{array}.$$

Легко убедиться в истинности следующих диаграмм:

$$\sigma' \xleftrightarrow{P' \times [P \cup Z]} \tau_1 \xleftrightarrow{P \times [P' \cup Z]} \sigma'', \qquad \sigma' \xleftrightarrow{[Y \cup Q'] \times Q} \tau_2 \xleftrightarrow{[Y \cup Q] \times Q'} \sigma'',$$

где

$$\tau_1 \doteq \begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 0\\\hline \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon'\\\hline \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon\\\hline \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon\\\hline\end{array}\\ P \;\; P' \;\; Q \;\; Q'\end{array}, \qquad \tau_2 \doteq \begin{array}{cc}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & \varepsilon & \varepsilon' & 0\\\hline 0 & \varepsilon & \varepsilon' & 0\\\hline 0 & 0 & 0 & 0\\\hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon\\\hline\end{array} & \begin{array}{c} P\\ P'\\ Q\\ Q'\end{array}\\ P \;\; P' \;\; Q \;\; Q' & \end{array}.$$

При $P' \neq \varnothing$ прямые произведения в первой диаграмме не пустые, а при $Q' \neq \varnothing$ таковыми являются прямые произведения во второй диаграмме. Пусть, наконец, $P' = Q' = \varnothing$. Тогда

$$\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0\\\hline \varepsilon & 0\\\hline\end{array}\\ P \;\; Q\end{array} = \sigma' \xleftrightarrow{Y \times Z} \sigma'' = \begin{array}{cc}\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & \varepsilon'\\\hline 0 & 0\\\hline\end{array} & \begin{array}{c} P\\ Q\end{array}\\ P \;\; Q & \end{array}.$$

Так как $n>2$, то $\operatorname{card}P>1$ или $\operatorname{card}Q>1$. В случае $\operatorname{card}P>1$ для любого непустого $S\subset P$ имеем $S'\doteq P\backslash S\neq\varnothing$, $S\times S'\neq\varnothing$ и

$$\sigma'=\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline \varepsilon&\varepsilon&0\\\hline\end{array}\\ S\quad S'\quad Q\end{array}\xleftrightarrow{S\times[S'\cup Q]}\tau\doteq\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&\varepsilon'\\\hline 0&0&0\\\hline 0&\varepsilon&0\\\hline\end{array}\\ S\quad S'\quad Q\end{array}\xleftrightarrow{S'\times[S\cup Q]}\sigma''=\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&\varepsilon'\\\hline 0&0&\varepsilon'\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array}\\ S\quad S'\quad Q\end{array}\begin{array}{c}S\\S'\\Q\\ \end{array}.$$

В случае $\operatorname{card}Q>1$ для любого непустого $S\subset Q$ имеем $S'\doteq Q\backslash S\neq\varnothing$, $S\times S'\neq\varnothing$ и

$$\sigma'=\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline \varepsilon&0&0\\\hline \varepsilon&0&0\\\hline\end{array}\\ P\quad S\quad S'\end{array}\xleftrightarrow{[P\cup S]\times S'}\tau\doteq\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&\varepsilon'\\\hline \varepsilon&0&1\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array}\\ P\quad S\quad S'\end{array}\xleftrightarrow{[P\cup S']\times S}\sigma''=\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&\varepsilon'&\varepsilon'\\\hline 0&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array}\\ P\quad S\quad S'\end{array}\begin{array}{c}P\\S\\S'\\ \end{array}.$$

5. Опорные множества ациклических отношений.

Лемма 3. *Пусть отношения σ и τ принадлежат одной и той же компоненте связности графа $\big\langle A(X),E(X)\big\rangle$. Равенство $S(\sigma)=S(\tau)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\sigma=\tau$.*

Доказательство. При $n=1$ утверждение тривиально. При $n=2$ в графе имеется единственная связная компонента $\left|\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right|\longleftrightarrow\left|\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right|\longleftrightarrow\left|\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right|$, в которой опорные множества равны $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{2\}$ соответственно, поэтому утверждение также очевидно. Пусть $n>2$ и $S\doteq S(\sigma)=S(\tau)$. В силу леммы 2 существует отношение π такое, что

$$\sigma\xleftrightarrow{Y\times Z}\pi\xleftrightarrow{P\times Q}\tau,\qquad Y\times Z\neq\varnothing,\qquad P\times Q\neq\varnothing.$$

Пусть $S_1\doteq Y\cap P$, $S_2\doteq Y\cap Q$, $S_3\doteq Z\cap P$, $S_4\doteq Z\cap Q$. Справедливы равенства $Y=S_1\cup S_2$, $Z=S_3\cup S_4$, $P=S_1\cup S_3$, $Q=S_2\cup S_4$ и представления (за основу берем отношение π)

$$\sigma=\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \varepsilon&0&0&0\\\hline \varepsilon&\varepsilon&0&0\\\hline \varepsilon'&\varepsilon'&\varepsilon&0\\\hline 1&\varepsilon'&\varepsilon&\varepsilon\\\hline\end{array}\\ S_1\quad S_2\quad S_3\quad S_4\end{array},\quad \pi=\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \varepsilon&0&\varepsilon&0\\\hline \varepsilon&\varepsilon&\varepsilon&\varepsilon\\\hline 0&0&\varepsilon&0\\\hline 0&0&\varepsilon&\varepsilon\\\hline\end{array}\\ S_1\quad S_2\quad S_3\quad S_4\end{array},\quad \tau=\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \varepsilon&\varepsilon'&\varepsilon&1\\\hline 0&\varepsilon&0&\varepsilon\\\hline 0&\varepsilon'&\varepsilon&\varepsilon'\\\hline 0&0&0&\varepsilon\\\hline\end{array}\\ S_1\quad S_2\quad S_3\quad S_4\end{array}\begin{array}{c}S_1\\S_2\\S_3\\S_4\\ \end{array}.$$

Очевидно, $S=S(\sigma)\subseteq S_2\cup S_3\cup S_4$ и $S=S(\tau)\subseteq S_1\cup S_2\cup S_3$, поэтому $S\subseteq S_2\cup S_3$. Предположим, что $S_4\neq\varnothing$. В силу (11) имеем $S(\sigma|_{S_4^2})\neq\varnothing$, следовательно, $S\cap S_4=S(\sigma)\cap S_4\neq\varnothing$ (см. представление для σ), что противоречит включению $S\subseteq S_2\cup S_3$. Значит, $S_4=\varnothing$. Предположим, что $S_1\neq\varnothing$. В силу (11) имеем $S(\tau|_{S_1^2})\neq\varnothing$, следовательно, $S\cap S_1=S(\tau)\cap S_1\neq\varnothing$ (см. представление для τ), что противоречит включению $S\subseteq S_2\cup S_3$. Значит, $S_1=\varnothing$, а представления принимают вид

$$\sigma=\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|}\hline \varepsilon&0\\\hline \varepsilon'&\varepsilon\\\hline\end{array}\\ S_2\quad S_3\end{array},\quad \pi=\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|}\hline \varepsilon&\varepsilon\\\hline 0&\varepsilon\\\hline\end{array}\\ S_2\quad S_3\end{array},\quad \tau=\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|}\hline \varepsilon&0\\\hline \varepsilon'&\varepsilon\\\hline\end{array}\\ S_2\quad S_3\end{array}\begin{array}{c}S_2\\S_3\\ \end{array}.$$

Итак, $\sigma=\tau$. Обратное утверждение очевидно. $\square$

В силу диаграммы (13) для любого $\sigma\in A(X)$ определены отношения σ^k, $k=1,\ldots,p$, а в силу теоремы 1 имеем $\sigma^k\in A(X)$, поэтому определены опорные множества $S(\sigma^k)$.

Предложение 1. *Для любого $k=1,\ldots,p$ справедливы включения $X_k\subseteq S(\sigma^k)\subseteq S(\sigma)\cup X_k$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $X_1 = S(\sigma)$ и $\sigma^1 = \sigma$, то при $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть $k \geqslant 2$. Тогда $p \geqslant 2$. В соответствии с диаграммой (13) справедливы равенства

$$Y_k \doteq \bigcup_{i=k}^{p} X_i, \quad Z_k \doteq \bigcup_{j=1}^{k-1} X_j, \quad \sigma^k|_{Y_k^2} = \sigma|_{Y_k^2}, \quad \sigma^k|_{Z_k^2} = \sigma|_{Z_k^2}, \quad \sigma^k(x,y) = 0 \ \ \forall\,(x,y) \in Z_k \times Y_k, \tag{14}$$

а в силу представления (12) $\sigma(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in \Pi_k \doteq Y_k \times X_k$.

Очевидно, $\Pi_k \subset Y_k^2$, поэтому $\sigma^k(x,y) = \sigma(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in \Pi_k$. Пусть, далее, $\Pi'_k \doteq Z_k \times X_k$. Очевидно, $\Pi'_k \subset Z_k \times Y_k$, поэтому $\sigma^k(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in \Pi'_k$. Таким образом, $\sigma^k(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in \Pi_k \cup \Pi'_k = X \times X_k$. Значит, $X_k \subseteq S(\sigma^k)$.

1. Пусть $k = 2$, $p \geqslant 3$. Тогда $Y_2 = \cup_{i=2}^{p} X_i$, $Z_2 = X_1$ и $X_{i-1} \times X_i \subset Y_2^2$ для всех $i = 3, \ldots, p$. В силу (14) имеем $\sigma^2|_{X_{i-1} \times X_i} = \sigma|_{X_{i-1} \times X_i}$, поэтому блоки $X_{i-1} \times X_i$ отношения σ^2 невырожденные. Значит, для любого $y \in \cup_{i=3}^{p} X_i = X \backslash (X_1 \cup X_2)$ найдется x такое, что $\sigma^2(x,y) = 1$, поэтому $S(\sigma^2) \subseteq X_1 \cup X_2$. Это же включение справедливо и при $p = 2$ (здесь $X_1 \cup X_2 = X$).

2. Пусть $k = p \geqslant 3$. Тогда $Y_p = X_p$, $Z_p = \cup_{j=1}^{p-1} X_j$ и $X_{j-1} \times X_j \subset Z_p^2$ для всех $j = 2, \ldots, p-1$. В силу (14) имеем $\sigma^p|_{X_{j-1} \times X_j} = \sigma|_{X_{j-1} \times X_j}$, поэтому блоки $X_{j-1} \times X_j$ отношения σ^p невырожденные. Значит, для любого $y \in \cup_{j=2}^{p-1} X_j = X \backslash (X_1 \cup X_p)$ найдется x такое, что $\sigma^p(x,y) = 1$, поэтому $S(\sigma^p) \subseteq X_1 \cup X_p$.

3. Пусть $p \geqslant 4$, $3 \leqslant k \leqslant p-1$ — общий случай. Тогда множества Y_k и Z_k имеют общий вид (14), $X_{i-1} \times X_i \subset Y_k^2$ для всех $i = k+1, \ldots, p$ и $X_{j-1} \times X_j \subset Z_k^2$ для всех $j = 2, \ldots, k-1$. В силу (14) (по аналогии с пунктами 1 и 2) для любого $y \in \big[\cup_{i=k+1}^{p} X_i\big] \cup \big[\cup_{j=2}^{k-1} X_j\big] = X \backslash (X_1 \cup X_k)$ найдется x такое, что $\sigma^k(x,y) = 1$, поэтому $S(\sigma^k) \subseteq X_1 \cup X_k$.

Предложение 2. *Для любого $\sigma \in A(X)$ и для любого непустого подмножества $S \subseteq S(\sigma)$ существует единственное $\tau \in G_\sigma(X)$ такое, что $S(\tau) = S$, причем τ смежно с σ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отношение σ и множество $S \subseteq S(\sigma) = X_1$ порождают (рекурсивным образом) три семейства множеств:

$$Z_1 \doteq X_1 \backslash S, \quad Y_1 \doteq S \neq \varnothing,$$

$$Y^k \doteq \bigcup_{i=1}^{k-1} Y_i \neq \varnothing, \quad Z_k \doteq \big\{\, y \in X_k \colon \sigma(x,y) = 0 \text{ для всех } x \in Y^k \,\big\}, \quad Y_k \doteq X_k \backslash Z_k, \quad k = 2, \ldots, p.$$

Пусть $Y \doteq \cup_{i=1}^{p} Y_i$, $Z \doteq \cup_{j=1}^{p} Z_j$ и $(x,y) \in Y \times Z$. Существуют i и j такие, что $(x,y) \in Y_i \times Z_j$. Если $i \geqslant j$, то $(x,y) \in Y_i \times Z_j \subseteq X_i \times X_j$, а в силу (12) справедливо равенство $\sigma(x,y) = 0$. Если же $i < j$, то $(x,y) \in Y_i \times Z_j \subseteq Y^j \times Z_j$, следовательно, $\sigma(x,y) = 0$. Таким образом, $\sigma(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in Y \times Z$. Очевидно, $Y \cup Z = X$ — дизъюнктное объединение, поэтому оно порождает отношение $\tau \in A(X)$ такое, что $\sigma \xleftrightarrow{Y \times Z} \tau$.

Зафиксируем $k = 2, \ldots, p$ и $y \in Y_k$. В силу определения Y_k существует $x \in Y^k$ такое, что $\sigma(x,y) = 1$. Так как $\tau|_{Y^2} = \sigma|_{Y^2}$ и $Y^k \times Y_k \subset Y^2$, то $\tau|_{Y^k \times Y_k} = \sigma|_{Y^k \times Y_k}$ и существует $x \in Y^k$ такое, что $\tau(x,y) = 1$. Значит, для любого $y \in \cup_{k=2}^{p} Y_k = Y \backslash Y_1$ найдется x такое, что $\tau(x,y) = 1$.

Зафиксируем пару $(x,y) \in Y_1 \times Z \subset Y \times Z$. Тогда $\tau(y,x) = 0$ и $\tau(x,y) = 1 - \sigma(y,x)$. Так как $(y,x) \in Z \times Y_1 \subset X \times S(\sigma)$, то $\sigma(y,x) = 0$, поэтому $\tau(x,y) = 1$. Значит, для любого $y \in Z$ найдется $x \in Y_1$ такое, что $\tau(x,y) = 1$.

Итак, для любого $y \in [Y \backslash Y_1] \cup Z = X \backslash Y_1$ найдется x такое, что $\tau(x,y) = 1$. Иными словами, $S(\tau) \subseteq Y_1$. С другой стороны, для любого $y \in Y_1$ справедливо:

1) если $x \in Z$, то $(x,y) \in Z \times Y_1$, поэтому $\tau(x,y) = 0$ (см. предыдущий абзац);

2) если $x \in Y$, то $(x,y) \in Y \times Y_1 \subset X \times S(\sigma)$ (поэтому $\sigma(x,y) = 0$) и $(x,y) \in Y^2$ (поэтому $\tau(x,y) = \sigma(x,y)$), следовательно, $\tau(x,y) = 0$.

Таким образом, $\tau(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in X \times Y_1$, значит, $Y_1 \subseteq S(\tau)$, поэтому $S(\tau) = S$.

Единственность τ следует из леммы 3.

Предложение 3. *Для любого $\sigma \in A(X)$ и для любого $x \in X$ существует единственное отношение $\tau \in G_\sigma(X)$ такое, что $S(\tau) = \{\, x \,\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как σ порождает разбиение $(X_1,\ldots,X_p)$ множества X, то существует k такое, что $x\in X_k$. В силу предложения 1 справедливо включение $X_k\subseteq S(\sigma^k)$, где $\sigma^k\in G_\sigma(X)$ — это отношение, определенное диаграммой (13). Так как $\{x\}\subseteq X_k\subseteq S(\sigma^k)$, то в силу предложения 2 существует $\tau\in G_{\sigma^k}(X)=G_\sigma(X)$ такое, что $S(\tau)=\{x\}$. $\square$

Замечание 2. В силу предложения 3 каждой компоненте $G_\sigma(X)$ графа $\big\langle A(X),E(X)\big\rangle$ соответствует единственное ациклическое отношение $\tau\in A(X)$ такое, что $S(\tau)=\{1\}$. Следовательно, количество связных компонент графа $\big\langle A(X),E(X)\big\rangle$ равно $\operatorname{card}A^{(1)}(X)$, где

$$A^{(\nu)}(X)\doteq\big\{\,\sigma\in A(X)\colon\ S(\sigma)=\{1,\ldots,\nu\}\,\big\},\qquad \nu=1,\ldots,n.$$

6. Число связных компонент графа ациклических отношений. Пусть $X\doteq\{1,\ldots,n\}$, $A_n\doteq\operatorname{card}A(X)$, $A_n^{(\nu)}\doteq\operatorname{card}A^{(\nu)}(X)$, $\nu=1,\ldots,n$. Согласно [3, лемма 2] справедливо равенство

$$A_n^{(\nu)}=\sum_{m=\nu}^{n}(-1)^{m-\nu}\binom{n-\nu}{m-\nu}2^{m(n-m)}A_{n-m}. \tag{15}$$

Лемма 4. *Для любых $n\in\mathbb{N}$ и $\nu=1,\ldots,n$ справедливо равенство*

$$A_n^{(\nu)}=\sum_{\substack{p_1+\ldots+p_k=n\\ \nu\leqslant p_1}}(-1)^{n+1-\nu-k}\binom{n-\nu}{p_1-\nu,\,p_2,\ldots,p_k}2^{(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2},$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $(p_1,\ldots,p_k)$ натуральных чисел таких, что $p_1+\ldots+p_k=n$ и $\nu\leqslant p_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\nu=n$ формула тривиальна. Пусть $\nu<n$. Согласно [4] справедлива формула

$$A_n=\sum_{p_1+\ldots+p_k=n}(-1)^{n-k}\binom{n}{p_1,\ldots,p_k}2^{(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2},\qquad n\geqslant 1,$$

следовательно, в силу (15)

$$A_n^{(\nu)}-(-1)^{n-\nu}=\sum_{m=\nu}^{n-1}(-1)^{m-\nu}\binom{n-\nu}{m-\nu}2^{m(n-m)}A_{n-m}=$$

$$=\sum_{m=\nu}^{n-1}(-1)^{m-\nu}\binom{n-\nu}{m-\nu}2^{m(n-m)}\sum_{p_1+\ldots+p_k=n-m}(-1)^{n-m-k}\binom{n-m}{p_1,\ldots,p_k}2^{[(n-m)^2-p_1^2-\ldots-p_k^2]/2}.$$

Переходя к суммированию по всем переменным одновременно, получаем равенство

$$A_n^{(\nu)}=(-1)^{n-\nu}+\sum_{\substack{m+p_1+\ldots+p_k=n\\ \nu\leqslant m<n}}(-1)^{n-\nu-k}\binom{n-\nu}{m-\nu,\,p_1,\ldots,p_k}2^{(n^2-m^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2}.$$

Сделав замену переменных $p_1'=m$, $p_i'=p_{i-1}$, $i=2,\ldots,k'=k+1$, получаем равенство

$$A_n^{(\nu)}=(-1)^{n-\nu}+\sum_{\substack{p_1+\ldots+p_k=n\\ \nu\leqslant p_1<n}}(-1)^{n+1-\nu-k}\binom{n-\nu}{p_1-\nu,\,p_2,\ldots,p_k}2^{(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2}$$

(штрихи у новых переменных не пишем), что и доказывает утверждение леммы.

В силу замечания 2 и леммы 4 справедлива

Теорема 2. *Если $X\doteq\{1,\ldots,n\}$, то*

$$\operatorname{card}A(X)=\sum_{p_1+\ldots+p_k=n}(-1)^{n-k}\binom{n}{p_1,\ldots,p_k}2^{(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2},$$

а количество компонент связности графа $\big\langle A(X),E(X)\big\rangle$ равно

$$\operatorname{card}A^{(1)}(X)=\sum_{p_1+\ldots+p_k=n}(-1)^{n-k}\binom{n-1}{p_1-1,\,p_2,\ldots,p_k}2^{(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аль Джабри Х.Ш., Родионов В.И. Граф частичных порядков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 3–12.
2. Аль Джабри Х.Ш. Граф рефлексивно-транзитивных отношений и граф конечных топологий // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 1. С. 3–11.
3. Лисковец В.А. О числе максимальных вершин случайного ациклического графа // Теория вероятностей и ее применения. 1975. Т. 20. Вып. 2. С. 412–420.
4. Rodionov V.I. On the number of labeled acyclic digraphs // Discrete Mathematics. 1992. Vol. 105. P. 319–321.

Поступила в редакцию 23.10.2015

Аль Джабри Халид Шиа Хайралла, аспирант, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;
преподаватель, Аль-Кадисия университет, Ирак, г. Аль-Дивания, ул. Вавилония, 29.
E-mail: khalidaljabrimath@yahoo.com

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., заведующий кафедрой, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

Kh. Sh. Al' Dzhabri, V. I. Rodionov
The graph of acyclic digraphs

Keywords: binary relation, acyclic digraph.

MSC: 05C30

The paper introduces the concept of a binary reflexive relation of adjacency on the set of all binary relations of a set X (in terms of characteristic functions) and determines an algebraic system consisting of all binary relations of the set and of all unordered pairs of adjacent binary relations. If X is a finite set then this algebraic system is a graph (“the graph of graphs”). It is proved that the diameter of a graph of binary relations is 2. It is shown that if σ and τ are adjacent relations, then σ is an acyclic relation (finite acyclic digraph) if and only if τ is an acyclic relation. An explicit formula for the number of connected components of a graph of acyclic relations is received.

REFERENCES

1. Al' Dzhabri Kh.Sh., Rodionov V.I. The graph of partial orders, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 4, pp. 3–12 (in Russian).
2. Al' Dzhabri Kh.Sh. The graph of reflexive-transitive relations and the graph of finite topologies, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 3–11 (in Russian).
3. Liskovets V.A. On the number of maximal vertices of a random acyclic digraph, *Theory Probab. Appl.*, 1976, vol. 20, no. 2, pp. 401–409.
4. Rodionov V.I. On the number of labeled acyclic digraphs, *Discrete Mathematics*, 1992, vol. 105, pp. 319–321.

Received 23.10.2015

Al' Dzhabri Khalid Shea Khairalla, post-graduate student, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia; Lecturer, University of Al-Qadisiyah, ul. Babilon, 29, Al Diwaniyah, Iraq.
E-mail: khalidaljabrimath@yahoo.com

Rodionov Vitalii Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Head of Department, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru