УДК 519.6

© *А. Г. Ченцов*

БЕЛЛМАНОВСКИЕ ВСТАВКИ В ЗАДАЧЕ МАРШРУТИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ И УСЛОЖНЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ СТОИМОСТИ [1]

Рассматривается задача последовательного обхода мегаполисов с ограничениями в виде условий предшествования и функциями стоимости, допускающими зависимость от списка заданий. Постановки такого типа могут, в частности, возникать в атомной энергетике при исследовании вопросов, связанных со снижением облучаемости работников при перемещении в радиационных полях с целью выполнения комплекса работ, связанных с демонтированием излучающих элементов.

Другое применение разрабатываемых в работе методов связано с важной инженерной задачей о маршрутизации движения инструмента при листовой резке на машинах с числовым программным управлением. Последняя задача имеет, как правило, достаточно большую размерность и большое число условий предшествования: у деталей, имеющих не только внешний, но один или несколько внутренних контуров (простейший пример — шайба), резка последних должна осуществляться раньше, чем резка внешнего контура (в роли мегаполисов здесь выступают конечные множества, располагаемые вблизи соответствующих контуров). Возможная зависимость функций стоимости от списка заданий может в данном случае отражать те или иные технологические условия. Подчеркнем, что ощутимая размерность, характеризуемая совокупностью всех контуров, подлежащих резке, приводит к необходимости использования эвристик, а потому вопросы, касающиеся хотя бы локального улучшения решений, представляются достаточно важными для исследования.

Основное внимание в работе уделяется построению оптимизирующих вставок в усложненных условиях: требуется редуцировать фрагмент условий предшествования и трансформировать соответствующие функции стоимости; в последнем случае важно сохранить в надлежащей форме зависимость от списка заданий. Оба упомянутых обстоятельства учитываются при построении процедуры, имеющей смысл алгоритма на функциональном уровне.

Ключевые слова: маршрут, трасса, условия предшествования.

Введение

В дальнейшем используются следующие сокращения: ЗК — задача коммивояжера, ДП — динамическое программирование, ДР — допустимое решение, п/м — подмножество, УП — упорядоченная пара, ЧПУ — числовое программное управление.

В статье рассматривается задача последовательного обхода конечной системы мегаполисов, осложненная условиями предшествования и тем, что стоимости перемещений и (внутренних по смыслу) работ, выполняемых при посещении мегаполисов, могут зависеть от списка заданий, которые не выполнены на текущий момент. Оба эти осложняющих обстоятельства связаны с прикладными задачами, возникающими, в частности, в машиностроении и атомной энергетике. Так, например, в задаче об управлении движением инструмента на машинах с ЧПУ при листовой резке деталей, имеющих внешний и, возможно, один или несколько внутренних контуров, требуется [1], чтобы последние вырезались раньше внешнего контура (сама резка осуществляется при этом по специальным эквидистантам, с тем чтобы обеспечить некоторый «запас»). В результате возникает большое число ограничений в виде условий предшествования (имеются и другие ограничения). Подобные условия возникают и в задачах о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации (в связи с задачами обслуживания АЭС см. [2]); так, например, одни из демонтируемых объектов могут располагаться на других, а потому (первые) «верхние» объекты должны демонтироваться, а значит, и посещаться раньше. Итак, прикладные задачи с элементами маршрутизации включают существенные особенности

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14–11–00109).

(в части используемых ограничений) в сравнении с известной труднорешаемой ЗК. Перечень этих особенностей можно продолжить. Так, в частности, в упомянутой задаче о демонтаже стоимости перемещений (дозы радиации) зависят от недемонтированных на текущий момент излучающих элементов, что порождает на уровне математической постановки зависимость от списка невыполненных заданий.

Известные трудности вычислительной реализации решений ЗК (см., например, [3]) сохраняются и в упомянутой задаче последовательного обхода мегаполисов, а потому для задач большой размерности и здесь приходится ориентироваться на построение приближенных решений и использование для этой цели эвристических алгоритмов, обеспечивающих нужное быстродействие. В то же время при реализации таких алгоритмов нередко возникают фрагменты получающихся решений, которые могут быть улучшены за счет применения той или иной вставки. В рассматриваемой задаче требуется, однако, не нарушать при этом ограничения «большой» задачи, и прежде всего ее условия предшествования. Кроме того, для усложненных функций стоимости организация вставки должна быть такой, чтобы улучшение одного фрагмента эвристического решения не повлекло бы ухудшения других, поскольку локальное изменение маршрута влияет, вообще говоря, на структуру списков (заданий), складывающихся глобально. Этим вопросам посвящена настоящая работа: исследуются возможности сочетания в рамках одной схемы эвристических «глобальных» и точных (оптимальных) локальных решений путем встраивания последних при соблюдении всех ограничений и улучшении (неухудшении) «глобального» результата. Что же касается построения локально оптимальных решений, то здесь может, в частности, применяться весьма общая схема на основе ДП, приведенная, в частности, в [4–6] и являющаяся развитием [7, § 4.9].

В связи с обсуждением методов решения ЗК отметим [8–10], вариант метода ДП для решения ЗК см. в [11, 12]. Кроме того, в связи с задачами, подобными в том или ином смысле ЗК, отметим [8, 13, 14]; см. также [15].

В связи с возможностью применения ДП при построении беллмановских вставок в задаче с усложненными функциями стоимостей напомним [16], где изложен требуемый вариант ДП (см. также [5, 6]). Здесь эти вопросы не рассматриваются.

§ 1. Обозначения и определения общего характера

В дальнейшем используется стандартная теоретико-множественная символика, включая кванторы, пропозициональные связки; $\stackrel{\triangle}{=}$ — равенство по определению, $\varnothing$ — пустое множество, def заменяет фразу «по определению». Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Если T — множество, то через $\mathcal{P}(T)$ (через $\mathcal{P}'(T)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м T; через $\mathrm{Fin}(T)$ обозначаем семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(T)$. Разумеется, в случае непустого конечного множества T имеем равенство $\mathrm{Fin}(T) = \mathcal{P}'(T)$.

Если A и B — непустые множества, $\varphi : A \to B$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то, как обычно, $\varphi^1(C) \stackrel{\triangle}{=} \{\varphi(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ множества C при действии φ; $\varphi^1(C) \in \mathcal{P}'(B)$ при $C \in \mathcal{P}'(A)$.

Если P и Q — непустые множества, то через $(\mathrm{Bi})[P; Q]$ обозначаем множество всех биекций [17, с. 87] P на Q. Разумеется, $\varphi^1(P) = Q \ \ \forall \varphi \in (\mathrm{Bi})[P; Q]$. Если S и T — непустые множества, а $\psi \in (\mathrm{Bi})[S; T]$, то определена биекция $\psi^{-1} \in (\mathrm{Bi})[T; S]$ (обратная к ψ), для которой

$$\Big(\psi\big(\psi^{-1}(t)\big) = t \ \ \forall\, t \in T\Big) \,\&\, \Big(\psi^{-1}\big(\psi(s)\big) = s \ \ \forall\, s \in S\Big).$$

Перестановка непустого множества A определяется [17, с. 87] как биекция A на себя; тогда $(\mathrm{Bi})[A; A]$ есть множество всех перестановок A (в дальнейшем среди перестановок будем выделять маршруты).

Если p и q — объекты, то $\{p; q\}$ есть def (единственное) множество, содержащее (в качестве своих элементов) p, q и не содержащее никаких других элементов; $\{p; q\}$ — неупорядоченная пара объектов p, q. Произвольному объекту y сопоставляем синглетон $\{y\} \stackrel{\triangle}{=} \{y; y\}$ (одноэлементное множество, содержащее y). Каждое множество — объект. С учетом этого полагаем, следуя [18, с. 67], что для всяких объектов a и b $(a, b) \stackrel{\triangle}{=} \big\{\{a\}; \{a; b\}\big\}$, получая УП с первым элементом a и вторым элементом b. Если z — какая-либо УП, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ (через $\mathrm{pr}_2(z)$) обозначаем первый (второй) элемент УП z. Как обычно, для любых трех объектов α, β и γ определен триплет $(\alpha, \beta, \gamma) \stackrel{\triangle}{=} \big((\alpha, \beta), \gamma\big)$ (УП специального вида). Для любых трех непустых множеств A, B и C полагаем [19, с. 17], что $A \times B \times C \stackrel{\triangle}{=} (A \times B) \times C$, это соглашение широко используется в различных разделах математики, и оно существенно для последующих построений; в этой связи отметим, что при всяком выборе непустого множества D, функции

$$\varphi : A \times B \times C \longrightarrow D,$$

а также $\alpha \in A \times B$ и $\beta \in C$ определено значение $\varphi(\alpha, \beta) \in D$, что как раз следует из упомянутого представления $A \times B \times C$.

Если при этом $\alpha_1 \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(\alpha)$ и $\alpha_2 \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(\alpha)$ (напомним, что α есть УП), то $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и, как обычно, $(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ и $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \varphi(\alpha, \beta)$. Данные обстоятельства используем ниже без дополнительных пояснений.

Если A, B и C — непустые множества, $g : A \to B$ и $h : B \to C$, то $h \circ g$, как обычно, отождествляется с отображением

$$a \longmapsto h\big(g(a)\big) : A \longrightarrow C.$$

Если при этом $g \in (\mathrm{Bi})[A; B]$ и $h \in (\mathrm{Bi})[B; C]$, то $h \circ g \in (\mathrm{Bi})[A; C]$. Как обычно, $\mathbb{R}$ есть вещественная прямая, $\mathbb{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1; 2; \ldots\}$ — натуральный ряд, $\mathbb{N}_o \stackrel{\triangle}{=} \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$ и

$$\overline{p, q} \stackrel{\triangle}{=} \{i \in \mathbb{N}_o |\, (p \leqslant i) \,\&\, (i \leqslant q)\} \quad \forall\, p \in \mathbb{N}_o \quad \forall\, q \in \mathbb{N}_o. \tag{1.1}$$

Отметим, что в силу (1.1) $\overline{p, q} = \varnothing$ для $p \in \mathbb{N}_o$ и $q \in \mathbb{N}_o$ со свойством $q < p$; в частности, $\overline{1, 0} = \varnothing$ (это свойство будет использоваться в дальнейшем). Каждому непустому конечному множеству K сопоставляется его мощность (количество элементов) $|K| \in \mathbb{N}$, при этом

$$(\mathrm{bi})[K] \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{Bi})[\overline{1, |K|}; K] \neq \varnothing. \tag{1.2}$$

Кроме того, полагаем $|\varnothing| \stackrel{\triangle}{=} 0$. Итак, всякому конечному множеству S сопоставлена его мощность $|S| \in \mathbb{N}_o$. Соглашение (1.2) является важным для дальнейшего; оно используется при определении маршрутов. Заметим, что при $n \in \mathbb{N}$ в виде $(\mathrm{bi})[\overline{1, n}]$ реализуется множество всех перестановок множества $\overline{1, n} : (\mathrm{bi})[\overline{1, n}] = (\mathrm{Bi})[\overline{1, n}; \overline{1, n}]$.

Всюду в дальнейшем используется соглашение: для каждого непустого множества T через $\mathcal{R}_+[\mathrm{T}]$ обозначаем множество всех функций из T в $[0, \infty[\stackrel{\triangle}{=} \{\xi \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leqslant \xi\}$; функции такого типа будут использоваться для оценивания затрат на перемещения и работы, связанные с посещением мегаполисов.

§ 2. Основная задача маршрутизации

В настоящем разделе определяется задача, для которой позднее будет применена процедура локального улучшения решений, определяемых тем или иным способом; в частности, первоначально может использоваться жадный алгоритм. По смыслу используемого подхода предполагается, что данная (маршрутная) задача имеет достаточно большую размерность, что затрудняет применение точных алгоритмов.

Итак, фиксируем в дальнейшем непустое множество X, точку $\mathbf{x}_o \in X$ (база процесса), число $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{n} \geqslant 2$, и множества

$$\mathbf{L}_1 \in \mathrm{Fin}(X), \ldots, \mathbf{L}_\mathbf{n} \in \mathrm{Fin}(X), \tag{2.1}$$

именуемые ниже мегаполисами. Пусть, кроме того, заданы отношения

$$\mathbb{L}_1 \in \mathcal{P}'(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_1), \ldots, \mathbb{L}_{\mathbf{n}} \in \mathcal{P}'(\mathbf{L}_{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}_{\mathbf{n}}) \tag{2.2}$$

(непустые п/м декартовых «квадратов» мегаполисов (2.1)). Предполагается, что

$$(\mathbf{x}_o \notin \mathbf{L}_j \quad \forall\, j \in \overline{1,\mathbf{n}})\,\&\,(\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_q = \varnothing \quad \forall\, p \in \overline{1,\mathbf{n}} \quad \forall\, q \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{p\}). \tag{2.3}$$

Условия (2.3) естественны для задачи последовательного обхода системы мегаполисов. Будем заниматься организацией перемещений вида

$$\mathbf{x}_o \to (z_1 \in \mathbb{L}_{\beta(1)}) \to \ldots \to (z_{\mathbf{n}} \in \mathbb{L}_{\beta(\mathbf{n})}), \tag{2.4}$$

где $\beta \in (\mathrm{bi})[\overline{1,\mathbf{n}}]$; в этой связи см. (2.2). Из (2.4) следует, что прибытие в каждый мегаполис и последующее отправление должны быть связаны посредством принадлежности соответствующей УП одному из отношений (2.2). Так, например, в задаче об управлении инструментом при листовой резке на машинах с ЧПУ такая связь задается в виде соединения в пары точек врезки и точек выключения инструмента. Итак, (2.4) говорит об организации перемещений вида

$$\mathbf{x}_o \to (z_{1,1} \in \mathbf{L}_{\beta(1)} \rightsquigarrow z_{1,2} \in \mathbf{L}_{\beta(1)}) \to \ldots \to (z_{\mathbf{n},1} \in \mathbf{L}_{\beta(\mathbf{n})} \rightsquigarrow z_{\mathbf{n},2} \in \mathbf{L}_{\beta(\mathbf{n})}), \tag{2.5}$$

с соблюдением условий $z_1 = (z_{1,1}, z_{1,2}) \in \mathbb{L}_{\beta(1)}, \ldots, z_{\mathbf{n}} = (z_{\mathbf{n},1}, z_{\mathbf{n},2}) \in \mathbb{L}_{\beta(\mathbf{n})}$. При этих условиях (2.5) вырождается в (2.4). Полагая, что $\mathbf{P} \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,\mathbf{n}}]$ (всюду в дальнейшем), отметим, что выбор $\beta \in \mathbf{P}$ может быть стеснен условиями предшествования. Для введения последних зафиксируем множество $\mathfrak{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,\mathbf{n}} \times \overline{1,\mathbf{n}})$ (итак, $\mathfrak{K}$ есть отношение в $\overline{1,\mathbf{n}}$; случай $\mathfrak{K} = \varnothing$ не исключается и отвечает ситуации, когда условия предшествования отсутствуют). Тогда [7, ч. 2]

$$\mathcal{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbf{P} |\, \alpha^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big) < \alpha^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big) \quad \forall\, z \in \mathfrak{K}\} \tag{2.6}$$

есть множество всех перестановок $\overline{1,\mathbf{n}}$, $\mathfrak{K}$-допустимых по предшествованию. В дальнейшем перестановки из $\mathbf{P}$ именуем глобальными маршрутами. Тогда элементы (2.6) суть $\mathfrak{K}$-допустимые глобальные маршруты. Мы постулируем, что

$$\forall\, \mathfrak{K}_o \in \mathcal{P}'(\mathfrak{K})\ \exists z_o \in \mathfrak{K}_o : \mathrm{pr}_1(z_o) \neq \mathrm{pr}_2(z) \quad \forall\, z \in \mathfrak{K}_o. \tag{2.7}$$

Тогда (см. (2.7); [7, ч. 2]) $\mathcal{A} \neq \varnothing$, то есть $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathbf{P})$. Как видно из (2.4), (2.5), конкретный выбор глобального маршрута еще не определяет течение интересующего нас процесса, важны еще сами перемещения по (уже занумерованным) мегаполисам. Мы отметим, что

$$\mathfrak{X} \triangleq \{\mathbf{x}_o\} \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{L}_i\Big) \in \mathrm{Fin}(X), \tag{2.8}$$

после чего введем множество $\widetilde{\mathfrak{Z}}$ всех кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{0,\mathbf{n}}} : \ \overline{0,\mathbf{n}} \longrightarrow \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}; \tag{2.9}$$

трассами будем, действуя в согласии с (2.4), называть кортежи вида (2.9), определенным образом согласованные с маршрутами: если $\beta \in \mathbf{P}$, то

$$\mathfrak{Z}_\beta \triangleq \Big\{(z_i)_{i \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \widetilde{\mathfrak{Z}} \mid (z_o = (\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_o))\ \&\ (z_t \in \mathbb{L}_{\beta(t)} \quad \forall\, t \in \overline{1,\mathbf{n}})\Big\} \in \mathrm{Fin}(\widetilde{\mathfrak{Z}}) \tag{2.10}$$

есть пучок трасс, согласованных с глобальным маршрутом β. Каждую УП $\big(\beta, (z_i)_{i \in \overline{0,\mathbf{n}}}\big)$, где $\beta \in \mathcal{A}$ и $(z_i)_{i \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\beta$, рассматриваем как ДР формулируемой ниже задачи. Тогда

$$\mathbf{D} \triangleq \Big\{\Big(\beta, (z_i)_{i \in \overline{0,\mathbf{n}}}\Big) \in \mathcal{A} \times \widetilde{\mathfrak{Z}} \mid (z_i)_{i \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\beta\Big\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A} \times \widetilde{\mathfrak{Z}}) \tag{2.11}$$

есть множество всех ДР «большой» задачи (имеем в виду ситуацию, когда $\mathbf{n}$ достаточно велико). Итак, элементы (2.11) получаются как УП, у каждой из которых первый элемент — глобальный маршрут из $\mathcal{A}$ (2.6), а второй — согласованная с ним трасса из соответствующего множества (2.10).

Мы рассматриваем аддитивный вариант агрегирования затрат, оцениваемых специальными функциями стоимости. Последние вводятся отдельно для оценивания внешних перемещений в (2.4), (2.5) и для внутренних (по смыслу) работ, выполняемых всякий раз в привязке к соответствующему мегаполису. Сами же функции стоимости полагаем по соображениям методического характера «максимально продолженными», что обычно не составляет труда. Итак, полагаем, что $\mathbf{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}'(\overline{1,\mathbf{n}})$ и фиксируем кортеж $(\mathbf{c}^\natural, c_1^\natural, \ldots, c_\mathbf{n}^\natural, f^\natural)$, где

$$\mathbf{c}^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\times\mathbf{N}], \quad c_1^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\times\mathbf{N}], \quad \ldots, \quad c_\mathbf{n}^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\times\mathbf{N}], \quad f^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X}]. \tag{2.12}$$

В (2.12) $\mathbf{c}^\natural$ используется для оценивания внешних перемещений, $c_j^\natural$ оценивает работы, связанные с мегаполисом $\mathbf{L}_j$, где $j \in \overline{1,\mathbf{n}}$, а $f^\natural$ доставляет стоимость терминального состояния (последнее совпадает с $z_{\mathbf{n},2}$ в (2.5)).

Замечание 2.1. С учетом (2.4), (2.5) имеем, что на самом деле значения $\mathbf{c}^\natural(x,y,K)$ функции $\mathbf{c}^\natural$ для нас существенны только в следующих двух случаях: 1) $x = \mathbf{x}_o$, $y \in \mathbf{L}_k$, $K \in \mathbf{N}$, $k \in K$; 2) $x \in \mathbf{L}_p$, $y \in \mathbf{L}_q$, $K \in \mathbf{N}$, $p \notin K$, $q \in K$. Для всех триплетов $(x,y,K) \in \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\times\mathbf{N}$, не удовлетворяющих ни случаю 1, ни случаю 2, можно определять значения функции произвольно; можно для определенности полагать их нулевыми.

Если $j \in \overline{1,\mathbf{n}}$, то значения $c_j^\natural(z,K)$, где $(z,K) \in \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\times\mathbf{N}$, для нас существенны только при $j \in K$ и $z \in \mathbb{L}_j$. Для всех прочих значений $(z,K) \in \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\times\mathbf{N}$ значения $c_j^\natural(z,K)$ можно определять произвольно; в частности, их можно полагать нулевыми.

Наконец, значения $f^\natural(x)$, где $x \in \mathfrak{X}$, для нас существенны только при $x \neq \mathbf{x}_o$; значение $f^\natural(\mathbf{x}_o)$ может быть произвольным и, в частности, равным нулю. □

Замечание 2.2. Если $\beta \in \mathbf{P}$ и $(z_i)_{i\in\overline{1,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\beta$, то имеем следующие естественные конкретизации значений функций стоимости.

(*a*) При $t \in \overline{0,\mathbf{n}-1}$ значение $\mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(z_t), \mathrm{pr}_1(z_{t+1}), \beta^1(\overline{t+1,\mathbf{n}})\big) = \mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(z_t), \mathrm{pr}_1(z_{t+1}), \{\beta(l) : l \in \overline{t+1,\mathbf{n}}\}\big) \in [0,\infty[$ оценивает перемещение $\big(\mathrm{pr}_2(z_t) \in \mathbf{L}_{\beta(t)}\big) \to \big(\mathrm{pr}_1(z_{t+1}) \in \mathbf{L}_{\beta(t+1)}\big)$.

(*b*) При $\tau \in \overline{1,\mathbf{n}}$ значение $c_{\beta(\tau)}\big(z_\tau, \beta^1(\overline{\tau,\mathbf{n}})\big) = c_{\beta(\tau)}(z_\tau, \{\beta(l) : l \in \overline{\tau,\mathbf{n}}\}) \in [0,\infty[$ оценивает работу, связанную с мегаполисом $\mathbf{L}_{\beta(\tau)}$.

В каждом из случаев (*a*), (*b*) отражено влияние списка заданий, которые на текущий момент еще не выполнены. □

С целью введения (аддитивного) критерия качества полагаем, что при всяком выборе $\beta \in \mathbf{P}$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\beta$

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_\beta^\natural[(z_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] &\stackrel{\triangle}{=} \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} [\mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \{\beta(l) : l \in \overline{t,\mathbf{n}}\}\big) + c_{\beta(t)}^\natural\big(z_t, \{\beta(l) : l \in \overline{t,\mathbf{n}}\}\big)] + \\ &+ f^\natural\big(\mathrm{pr}_2(z_\mathbf{n})\big) = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} [\mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \beta^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big) + c_{\beta(t)}^\natural\big(z_t, \beta^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big)] + f^\natural\big(\mathrm{pr}_2(z_\mathbf{n})\big).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Для нас будет важен вариант (2.13), отвечающий случаю $\beta \in \mathcal{A}$. В качестве основной рассматриваем следующую задачу:

$$\mathfrak{C}_\beta^\natural[(z_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] \longrightarrow \min, \quad \beta \in \mathcal{A}, \quad (z_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\beta. \tag{2.14}$$

С учетом (2.11) имеем, что данная задача совместна по ограничениям; в ней непременно существует оптимальная УП $\big(\beta^*, (z_i^*)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big) \in \mathbf{D}$, для которой $\mathfrak{C}_{\beta^*}^\natural[(z_i^*)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] \leqslant \mathfrak{C}_\beta^\natural[(z_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}]$ при

$\big(\beta,(z_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big)\in\mathbf{D}$. Однако, полагая $\mathbf{n}$ достаточно большим, мы будем ориентироваться на использование эвристических алгоритмов и процедур последующей реализации беллмановских вставок умеренной размерности. Последние могут, конечно, реализовываться многократно в итерационном режиме, подобно [20, 21]. Данный режим здесь не рассматривается; основное внимание уделяется обоснованию однократного воздействия в виде вставки, поскольку рассматриваемая здесь задача объективно является существенно более сложной в сравнении с [20, 21] за счет возможной зависимости функций стоимости от списка заданий.

§ 3. Построение беллмановской вставки; общая конструкция

В дальнейшем предполагается, что в задаче (2.14) тем или иным способом определено ДР $\big(\lambda,(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big)\in\mathbf{D}$. Тогда $\lambda\in\mathcal{A}$ и $(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}\in\mathfrak{Z}_\lambda$. У нас, следовательно, определены индексы $\lambda(j)\in\overline{1,\mathbf{n}}\ \ \forall\, j\in\overline{1,\mathbf{n}}$. Далее, $(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}\in\widetilde{\mathfrak{Z}}$, а потому (см. (2.9)) $\mathbf{h}_j\in\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\ \ \forall\, j\in\overline{0,\mathbf{n}}$. Согласно (2.10)

$$\big(\mathbf{h}_o=(\mathbf{x}_o,\mathbf{x}_o)\big)\,\&\,\big(\mathbf{h}_t\in\mathbb{L}_{\lambda(t)}\ \ \forall\, t\in\overline{1,\mathbf{n}}\big). \tag{3.1}$$

С учетом (2.13) получаем следующее значение критерия:

$$\mathfrak{C}^{\natural}_{\lambda}[(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}]=\sum_{t=1}^{\mathbf{n}}[\mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_t),\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big)+c^{\natural}_{\lambda(t)}\big(\mathbf{h}_t,\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big)]+f^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\mathbf{n}})\big). \tag{3.2}$$

Мы фиксируем $N\in\mathbb{N}$ со свойством $N\in\overline{2,\mathbf{n}}$, а также $\nu\in\overline{0,\mathbf{n}-N}$; индекс ν связываем далее с началом вставки. Сейчас мы рассмотрим, однако, одну предваряющую схему, связанную со склеиванием маршрутов. Заметим, что $\nu+s\in\overline{1,\mathbf{n}}\ \ \forall\, s\in\overline{1,N}$. С учетом этого полагаем, что

$$\Lambda\overset{\triangle}{=}\big(\lambda(\nu+s)\big)_{s\in\overline{1,N}}, \tag{3.3}$$

получая отображение из $\overline{1,N}$ в $\overline{1,\mathbf{n}}$, то есть $\Lambda:\ \overline{1,N}\to\overline{1,\mathbf{n}}$, а тогда

$$\Gamma\overset{\triangle}{=}\Lambda^1(\overline{1,N})=\{\lambda(\nu+s):\ s\in\overline{1,N}\}\in\mathcal{P}'(\overline{1,\mathbf{n}}). \tag{3.4}$$

Легко видеть, что (см. (3.3), (3.4)) $|\Gamma|=N$ и при этом $\Lambda\in(\mathrm{bi})[\Gamma]$. Мы рассматриваем Γ (3.4) как «окно» в маршруте λ, которое подлежит изменению путем вклеивания некоторого локального маршрута. Для этого, однако, потребуется и соответствующее «окно» условий предшествования:

$$Q\overset{\triangle}{=}\big\{z\in\mathfrak{K}|\ \big(\mathrm{pr}_1(z)\in\Gamma\big)\,\&\,\big(\mathrm{pr}_2(z)\in\Gamma\big)\big\}. \tag{3.5}$$

Получаем при $z\in Q$, что $\mathrm{pr}_1(z)\in\Gamma$ и $\mathrm{pr}_2(z)\in\Gamma$; а тогда определены индексы $\Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big)$ и $\Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)$. В терминах множества (3.5) определяем множество упорядоченных пар для оптимизируемого фрагмента задачи:

$$\mathbf{K}\overset{\triangle}{=}\Big\{\Big(\Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big),\Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)\Big):\ z\in Q\Big\}\in\mathcal{P}(\overline{1,N}\times\overline{1,N}). \tag{3.6}$$

Легко видеть, что $\forall\,\mathbf{K}_o\in\mathcal{P}'(\mathbf{K})\ \exists\, z_o\in\mathbf{K}_o:\ \mathrm{pr}_1(z_o)\neq\mathrm{pr}_2(z)\ \ \forall\, z\in\mathbf{K}_o$ (соответствующее рассуждение подобно [20]). Как следствие, получаем, что

$$\mathbf{A}\overset{\triangle}{=}\big\{\alpha\in\mathbb{P}\mid\alpha^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big)<\alpha^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)\ \ \forall\, z\in\mathbf{K}\big\}\in\mathcal{P}'(\mathbb{P}), \tag{3.7}$$

где (здесь и ниже) $\mathbb{P}\overset{\triangle}{=}(\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$; (3.7) есть непустое множество всех $\mathbf{K}$-допустимых по предшествованию маршрутов оптимизационного блока. Легко видеть, что

$$\Lambda\circ\alpha=\Big(\lambda\big(\nu+\alpha(s)\big)\Big)_{s\in\overline{1,N}}\in(\mathrm{bi})[\Gamma]\quad\ \forall\,\alpha\in\mathbb{P}. \tag{3.8}$$

Определение 3.1. Если $\alpha \in \mathbb{P}$, то

$$(\alpha - \mathrm{sew})[\lambda;\nu] : \overline{1,\mathbf{n}} \longrightarrow \overline{1,\mathbf{n}}$$

определяем правилом

$$\begin{gathered}\big((\alpha - \mathrm{sew})[\lambda;\nu](t) \stackrel{\triangle}{=} \lambda(t)\ \forall\, t \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \overline{\nu+1,\nu+N}\big)\ \&\\ \&\ \big((\alpha - \mathrm{sew})[\lambda;\nu](t) \stackrel{\triangle}{=} (\Lambda \circ \alpha)(t-\nu)\ \ \forall\, t \in \overline{\nu+1,\nu+N}\big).\end{gathered} \tag{3.9}$$

Предложение 3.1. *Если* $\alpha \in \mathbb{P}$, *то* $(\alpha - \mathrm{sew})[\lambda;\nu] \in \mathbf{P}$.

Доказательство подобно [20]; оно практически очевидно и в данном изложении опущено. С учетом предложения 3.1 имеем, что при $\alpha \in \mathbb{P}$ определена перестановка $(\alpha-\mathrm{sew})[\lambda;\nu]^{-1} \in \mathbf{P}$. Вполне очевидно

Предложение 3.2. *Если* $\alpha \in \mathbb{P}$ *и* $t \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \Gamma$, *то* $(\alpha - \mathrm{sew})[\lambda;\nu]^{-1}(t) = \lambda^{-1}(t)$.

Предложение 3.3. *Если* $\alpha \in \mathbf{A}$, *то* $(\alpha - \mathrm{sew})[\lambda;\nu] \in \mathcal{A}$.

Доказательство аналогично обоснованию [20, предложение 7.2].

Пусть теперь $\mathbf{e} \in \mathbb{P}$ есть def тождественная перестановка: $\mathbf{e}(s) \stackrel{\triangle}{=} s\ \ \forall\, s \in \overline{1,N}$. Более того, $\mathbf{e} \in \mathbf{A}$ (см. [20, 21]). В этом случае определен глобальный маршрут $(\mathbf{e} - \mathrm{sew})[\lambda;\nu] \in \mathcal{A}$ (см. предложение 3.3). Заметим, что $(\Lambda \circ \mathbf{e})(t-\nu) = \lambda\big(\nu+\mathbf{e}(t-\nu)\big) = \lambda(t)\ \ \forall\, t \in \overline{\nu+1,\nu+N}$. Отсюда легко следует, что (см. (3.9))

$$(\mathbf{e} - \mathrm{sew})[\lambda;\nu] = \lambda. \tag{3.10}$$

Теперь приступим к обсуждению процедуры «вклеивания» локальных трасс в кортеж $(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}$. Всюду в дальнейшем

$$x^o \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_\nu) \in \mathfrak{X} \tag{3.11}$$

играет роль базы рассматриваемых локальных процессов. Кроме того, пусть $\forall\, s \in \overline{1,N}$

$$\Big(M_s \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{L}_{\Lambda(s)}\Big)\ \&\ \Big(\mathbb{M}_s \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{L}_{\Lambda(s)}\Big). \tag{3.12}$$

Тогда $\mathbb{M}_t \in \mathcal{P}'(M_t \times M_t)\ \ \forall\, t \in \overline{1,N}$. Для реализации целей, связанных с возможным применением в оптимизационном блоке аппарата ДП, полезно ввести $\mathbf{M}_s \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}_s\} \in \mathcal{P}'(M_s)$ $\forall\, s \in \overline{1,N}$. Тогда

$$\mathbb{X} \stackrel{\triangle}{=} \{x^o\} \cup \Big(\bigcup_{s=1}^{N} M_s\Big) \in \mathcal{P}'(\mathfrak{X}), \quad \mathbf{X} \stackrel{\triangle}{=} \{x^o\} \cup \Big(\bigcup_{s=1}^{N} \mathbf{M}_s\Big) \in \mathcal{P}'(\mathbb{X}). \tag{3.13}$$

В силу (2.8) и (3.13) имеем, что $\mathbb{X} \in \mathrm{Fin}(X)$ и $\mathbf{X} \in \mathrm{Fin}(\mathbb{X})$; $\mathbb{X} \times \mathbb{X} \subset \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$.

Через $\mathbb{Z}$ обозначим множество всех кортежей $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} : \overline{0,N} \to \mathbb{X} \times \mathbb{X}$. Тогда при $\alpha \in \mathbb{P}$ в виде

$$\mathcal{Z}_\alpha \stackrel{\triangle}{=} \Big\{(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathbb{Z} \mid \big(z_o = (x^o, x^o)\big)\ \&\ \big(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)}\ \ \forall\, t \in \overline{1,N}\big)\Big\} \in \mathrm{Fin}(\mathbb{Z}) \tag{3.14}$$

имеем множество всех трасс, согласованных с (локальным) маршрутом α и стартующих из состояния x^o (3.11). В этой связи УП

$$\big(\alpha, (z_i)_{i\in\overline{0,N}}\big),\ \alpha \in \mathbf{A},\ (z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha,$$

называем локальными ДР. В силу (3.7) и (3.14) множество всех локальных ДР непусто и конечно.

Локальные функции стоимости. Через $\mathfrak{N}$ обозначаем семейство всех непустых п/м $\overline{1,N}$: $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1,N})$. Возвращаясь к (3.3), (3.4) отметим, что при $K \in \mathfrak{N}$ имеем множество-образ $\Lambda^1(K) = \{\lambda(\nu + s) : s \in K\} \in \mathcal{P}'(\Gamma)$, для которого, в частности, $\Lambda^1(K) \subset \overline{1,\mathbf{n}}$. Усилим предположение относительно ν: всюду в дальнейшем полагаем, что $\nu + N + 1 \leqslant \mathbf{n}$. Тогда $\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}} \in \mathbf{N}$ и, как следствие, $\Lambda^1(K) \cup \lambda^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}}) \in \mathbf{N}$. Последнее означает, что при $z \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ определены значения

$$\mathbf{c}^\natural\big(z, \Lambda^1(K) \cup \lambda^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}})\big) \in [0, \infty[, \quad c_1^\natural\big(z, \Lambda^1(K) \cup \lambda^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}})\big) \in [0, \infty[, \quad \ldots,$$
$$c_{\mathbf{n}}^\natural\big(z, \Lambda^1(K) \cup \lambda^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}})\big) \in [0, \infty[.$$

С учетом этого полагаем, что $\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}]$ определяется условиями

$$\mathbf{c}(z, K) \triangleq \mathbf{c}^\natural\big(z, \Lambda^1(K) \cup \lambda^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}})\big) \;\; \forall\, z \in \mathbb{X} \times \mathbb{X} \;\; \forall\, K \in \mathfrak{N}. \tag{3.15}$$

Если $j \in \overline{1,N}$, то $c_j \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}]$ определяем условиями

$$c_j(z, K) \triangleq c_{\Lambda(j)}^\natural\big(z, \Lambda^1(K) \cup \lambda^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}})\big) \;\; \forall\, z \in \mathbb{X} \times \mathbb{X} \;\; \forall\, K \in \mathfrak{N}. \tag{3.16}$$

Наконец, функцию $f \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X}]$ определяем условиями

$$f(x) \triangleq \mathbf{c}^\natural\big(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{\nu+N+1}), \lambda^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}})\big) \;\; \forall\, x \in \mathbb{X}. \tag{3.17}$$

Итак, посредством (3.15)–(3.17) определен локальный кортеж $(\mathbf{c}, c_1, \ldots, c_N, f)$ функций стоимости. Подчеркнем, что в отличие от [20,21] здесь, как и в исходной задаче (2.14), используются функции, включающие зависимость от списка заданий. Если $\alpha \in \mathbb{P}$ и $(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$, то

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0,N}}] \triangleq \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_t), \mathrm{pr}_1(z_{t+1}), \alpha^1(\overline{t+1, N})\big) + \sum_{t=1}^{N} c_{\alpha(t)}\big(z_t, \alpha^1(\overline{t, N})\big) + \tag{3.18}$$
$$+ f\big(\mathrm{pr}_2(z_N)\big) = \sum_{t=1}^{N} \big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t, N})\big) + c_{\alpha(t)}\big(z_t, \alpha^1(\overline{t, N})\big)\big] + f\big(\mathrm{pr}_2(z_N)\big) \in [0, \infty[;$$

для нас существенным является случай $\alpha \in \mathbf{A}$. Рассмотрим задачу

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0,N}}] \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbf{A}, \; (z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha. \tag{3.19}$$

Методы решения задачи (3.19) рассматривались в [4–6, 16]; основой этих методов является нестандартный вариант ДП. Мы полагаем, что при выбранном значении N упомянутый вариант ДП может быть реализован в виде соответствующего алгоритма, доставляющего оптимальное решение задачи (3.19).

Пусть $\alpha^o \in \mathbf{A}$ и $(z_i^o)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha^o}$ таковы, что ДР $\big(\alpha^o, (z_i^o)_{i \in \overline{0,N}}\big)$ оптимально в задаче (3.19):

$$\mathfrak{C}_{\alpha^o}[(z_i^o)_{i \in \overline{0,N}}] \leqslant \mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0,N}}] \;\; \forall\, \alpha \in \mathbf{A} \;\; \forall\, (z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha.$$

Тогда, в частности, имеем следующую систему неравенств:

$$\mathfrak{C}_{\alpha^o}[(z_i^o)_{i \in \overline{0,N}}] \leqslant \mathfrak{C}_{\mathbf{e}}[(z_i)_{i \in \overline{0,N}}] \;\; \forall\, (z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_{\mathbf{e}}. \tag{3.20}$$

Нам потребуется одно простое следствие (3.20), для формулировки которого введем в рассмотрение следующий кортеж $(\tilde{\mathbf{h}}_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathbb{Z}$:

$$\Big(\tilde{\mathbf{h}}_o \triangleq (x^o, x^o)\Big) \,\&\, \Big(\tilde{\mathbf{h}}_t \triangleq \mathbf{h}_{\nu+t} \;\; \forall\, t \in \overline{1,N}\Big). \tag{3.21}$$

Предложение 3.4. *Справедливо свойство* $(\tilde{\mathbf{h}}_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_{\mathbf{e}}$.

Доказательство очевидно, поскольку при $t \in \overline{1,N}$ имеем $\tilde{\mathbf{h}}_t = \mathbf{h}_{\nu+t} \in \mathbb{L}_{\lambda(\nu+t)}$, где $\lambda(\nu+t) = \Lambda(t)$ (см. (3.1), (3.3)), и в силу (3.12) $\tilde{\mathbf{h}}_t \in \mathbb{M}_t$; последнее означает, что $\tilde{\mathbf{h}}_t \in \mathbb{M}_{\mathbf{e}(t)}$. Осталось учесть (3.14) и (3.21). Из (3.20) и предложения 3.4 получаем неравенство

$$\mathfrak{C}_{\alpha^o}[(z_i^o)_{i\in\overline{0,N}}] \leqslant \mathfrak{C}_{\mathbf{e}}[(\tilde{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,N}}]. \tag{3.22}$$

Предложение 3.5. *Если $\nu = 0$, то $\tilde{\mathbf{h}}_t = \mathbf{h}_t \quad \forall\, t \in \overline{0,N}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3.21) непосредственно следует, что (при $\nu = 0$) $\tilde{\mathbf{h}}_t = \mathbf{h}_t$ $\forall\, t \in \overline{1,N}$. Далее, из (3.1) и (3.11) имеем, что $x^o = \mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_\nu) = \mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_o) = \mathbf{x}_o$, а тогда согласно (3.21) $\tilde{\mathbf{h}}_o = (\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_o) = \mathbf{h}_o$. □

В связи с (3.21) отметим, что (см. 3.22))

$$\kappa \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{C}_{\mathbf{e}}[(\tilde{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,N}}] - \mathfrak{C}_{\alpha^o}[(z_i^o)_{i\in\overline{0,N}}] \in [0,\infty[. \tag{3.23}$$

§ 4. Беллмановская вставка: алгоритм на функциональном уровне, 1

Продолжаем конструирование вставки с использованием локальной версии ДП. Располагаем при этом ДР $\big(\lambda, (\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big) \in \mathbf{D}$ и индексом $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - (N+1)}$, определяющим начало вставки. Кроме того, мы имеем локальное ДР $\big(\alpha^o, (z_i^o)_{i\in\overline{0,N}}\big)$, оптимальное в смысле (3.19); для нас в этой связи существенно (3.21), (3.23).

Мы полагаем далее, что $\eta \stackrel{\triangle}{=} (\alpha^o - \mathrm{sew})[\lambda; \nu]$, получая (склеенный) маршрут со свойством $\mathfrak{K}$-допустимости: $\eta \in \mathcal{A}$. Напомним, что (см. (3.9)) η действует в $\overline{1,\mathbf{n}}$ по правилу

$$\begin{gathered}\big(\eta(t) = \lambda(t) \quad \forall\, t \in \overline{1,\mathbf{n}} \ \setminus \ \overline{\nu+1, \nu+N}\big)\ \& \\ \&\ \Big(\eta(t) = (\Lambda \circ \alpha^o)(t-\nu) = \lambda(\nu + \alpha^o(t-\nu)) \quad \forall\, t \in \overline{\nu+1, \nu+N}\Big).\end{gathered} \tag{4.1}$$

Мы используем ниже (4.1) без дополнительных пояснений. Кроме того, введем кортеж $(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \widetilde{\mathfrak{Z}}$ по следующему правилу:

$$\Big(\hat{\mathbf{h}}_t \stackrel{\triangle}{=} z^o_{t-\nu} \quad \forall\, t \in \overline{\nu+1, \nu+N}\Big)\ \&\ \Big(\hat{\mathbf{h}}_t \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{h}_t \quad \forall\, t \in \overline{0,\mathbf{n}} \setminus \overline{\nu+1, \nu+N}\Big). \tag{4.2}$$

Тем самым определена склеенная трасса. Отметим, что из (4.2) следует, в частности, что (по выбору ν)

$$\hat{\mathbf{h}}_\nu = \mathbf{h}_\nu. \tag{4.3}$$

Предложение 4.1. *Кортеж $(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}$ есть трасса, согласованная с маршрутом η:*

$$(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\eta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (4.2) следует, что $\hat{\mathbf{h}}_o = \mathbf{h}_o$, а потому (см. (3.1)) $\hat{\mathbf{h}}_o = (\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_o)$. Далее, при $\tau \in \overline{\nu+1, \nu+N}$ имеем в силу (3.14), (4.1) и (4.2), что

$$\hat{\mathbf{h}}_\tau = z^o_{\tau-\nu} \in \mathbb{M}_{\alpha^o(\tau-\nu)},$$

а потому (см. 3.12)) $\hat{\mathbf{h}}_\tau \in \mathbb{L}_{(\Lambda\circ\alpha^o)(\tau-\nu)}$ и, как следствие, $\hat{\mathbf{h}}_\tau \in \mathbb{L}_{\eta(\tau)}$. Итак,

$$\hat{\mathbf{h}}_t \in \mathbb{L}_{\eta(t)} \quad \forall\, t \in \overline{\nu+1, \nu+N}. \tag{4.4}$$

Наконец, из (3.1), (4.1) и (4.2) имеем, что $\hat{\mathbf{h}}_t \in \mathbb{L}_{\eta(t)}$ $\forall\, t \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \overline{\nu+1, \nu+N}$. Последнее в совокупности с (4.4) означает, что $\hat{\mathbf{h}}_t \in \mathbb{L}_{\eta(t)}$ $\forall\, t \in \overline{1,\mathbf{n}}$. Из (2.10) получаем требуемое свойство. □

Таким образом, установлено, что УП $\big(\eta, (\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big)$ есть ДР «большой» задачи, то есть

$$\big(\eta, (\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big) \in \mathbf{D}. \tag{4.5}$$

Далее будет показано, что ДР (4.5) является улучшающим (точнее, неухудшающим) в смысле (2.14). При обосновании упомянутого свойства удобно рассмотреть отдельно следующие два частных случая: $\nu = 0,\ \nu \neq 0$. Первый из этих случаев соответствует начальной вставке и является объективно более простым. Рассмотрим его в настоящем разделе более кратко (напомним, что по предположению $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - (N+1)}$). Итак, пусть до конца настоящего раздела

$$\nu = 0. \tag{4.6}$$

Тогда (при условии (4.6)) $\overline{\nu+1, \nu+N} = \overline{1, N}$ и $\overline{1, \mathbf{n}} \setminus \overline{\nu+1, \nu+N} = \overline{N+1, \mathbf{n}}$. Из (4.1) следует теперь, что

$$\big(\eta(t) = (\Lambda \circ \alpha^o)(t) \ \ \forall\, t \in \overline{1, N}\big) \,\&\, \big(\eta(t) = \lambda(t) \ \ \forall\, t \in \overline{N+1, \mathbf{n}}\big). \tag{4.7}$$

Отметим также, что согласно (3.3) и (4.6) $\Lambda(s) = \lambda(s) \ \ \forall\, s \in \overline{1, N}$. Итак, Λ есть сужение λ на $\overline{1, N}$, а тогда в силу (3.4)

$$\Gamma = \lambda^1(\overline{1, N}). \tag{4.8}$$

Возвращаясь к (4.7), отметим также, что

$$\eta(t) = \lambda\big(\alpha^o(t)\big) = (\lambda \circ \alpha^o)(t) \ \ \forall\, t \in \overline{1, N}. \tag{4.9}$$

Заметим, наконец, что в силу (3.1) и (3.11)

$$x^o = \mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_o) = \mathbf{x}_o. \tag{4.10}$$

Здесь же отметим очевидное следствие (3.12): в силу (4.6) $\forall\, s \in \overline{1, N}$

$$\big(M_s = \mathbf{L}_{\lambda(s)}\big) \ \&\ \Big(\mathbb{M}_s \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{L}_{\lambda(s)}\Big). \tag{4.11}$$

Как следствие, $\mathbf{M}_s = \{\mathrm{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}_s\} = \{\mathrm{pr}_2(z) : z \in \mathbb{L}_{\lambda(s)}\} \ \ \forall\, s \in \overline{1, N}$. В силу (3.13), (4.10) и (4.11) имеем равенство

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x}_o\} \cup \Big(\bigcup_{s=1}^{N} \mathbf{L}_{\lambda(s)}\Big).$$

В рассматриваемом случае (при условии (4.6)) имеем по свойствам оператора взятия образа

$$\Lambda^1(K) \cup \lambda^1(\overline{\nu+N+1, \mathbf{n}}) = \lambda^1(K) \cup \lambda^1(\overline{N+1, \mathbf{n}}) = \lambda^1(K \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \ \ \forall\, K \in \mathfrak{N}. \tag{4.12}$$

В этом случае согласно (3.15) имеем (см. (4.12)), что $\mathbf{c}(z, K) = \mathbf{c}^\natural\big(z, \lambda^1(K \cup \overline{N+1, \mathbf{n}})\big)\ \forall\, z \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ $\forall\, K \in \mathfrak{N}$. Кроме того,

$$c_j(z, K) = c^\natural_{\lambda(j)}\big(z, \lambda^1(K \cup \overline{N+1, \mathbf{n}})\big) \ \ \forall\, j \in \overline{1, N} \ \ \forall\, z \in \mathbb{X} \times \mathbb{X} \ \ \forall\, K \in \mathfrak{N}.$$

Отметим, наконец, что $f(x) = \mathbf{c}^\natural\big(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{N+1}), \lambda^1(\overline{N+1, \mathbf{n}})\big) \ \ \forall\, x \in \mathbb{X}$. Получаем, как следствие, что

$$\begin{gathered}\mathfrak{C}_{\alpha^o}\big[(z^o_i)_{i \in \overline{0, N}}\big] = \sum_{t=1}^{N} \Big[\mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(z^o_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z^o_t), \lambda^1(\{\alpha^o(s) :\ s \in \overline{t, N}\} \cup \overline{N+1, \mathbf{n}})\big) + \\ + c^\natural_{(\lambda \circ \alpha^o)(t)}\big(z^o_t, \lambda^1(\{\alpha^o(s) :\ s \in \overline{t, N}\} \cup \overline{N+1, \mathbf{n}})\big)\Big] + \mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(z^o_N), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{N+1}), \lambda^1(\overline{N+1, \mathbf{n}})\big),\end{gathered} \tag{4.13}$$

где $\lambda^1(\overline{N+1, \mathbf{n}}) = \eta^1(\overline{N+1, \mathbf{n}})$. С учетом этого легко проверяется равенство

$$\mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(z^o_N), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{N+1}), \lambda^1(\overline{N+1, \mathbf{n}})\big) = \mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_N), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_{N+1}), \eta^1(\overline{N+1, \mathbf{n}})\big). \tag{4.14}$$

Рассмотрим слагаемые первой суммы в (4.13). Для этого фиксируем $t_* \in \overline{1, N}$ и отдельно рассмотрим случаи $t_* = 1$ и $t_* \in \overline{2, N}$.

1. Пусть $t_* = 1$. Тогда $\mathrm{pr}_2(z^o_{t_*-1}) = \mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_o)$ и $\mathrm{pr}_1(z^o_{t_*}) = \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_1)$,

$$\lambda^1(\{\alpha^o(s):\ s \in \overline{t_*, N}\} \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) = \{\lambda\bigl(\alpha^o(s)\bigr)\colon\ s \in \overline{t_*, N}\} \cup \lambda^1(\overline{N+1, \mathbf{n}}) =$$
$$= \eta^1(\overline{t_*, N}) \cup \eta^1(\overline{N+1, \mathbf{n}}) = \eta^1(\overline{t_*, N} \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) = \eta^1(\overline{t_*, \mathbf{n}}) = \eta^1(\overline{1, \mathbf{n}}) = \overline{1, \mathbf{n}}.$$

Таким образом, установлена импликация

$$(t_* = 1) \Longrightarrow \Bigl(\mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(z^o_{t_*-1}), \mathrm{pr}_1(z^o_{t_*}), \lambda^1(\{\alpha^o(s):\ s \in \overline{t_*, N}\} \cup \overline{N+1, \mathbf{n}})\bigr) = \\ = \mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{t_*-1}), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_{t_*}), \eta^1(\overline{t_*, \mathbf{n}})\bigr)\Bigr). \tag{4.15}$$

2. Пусть $t_* \in \overline{2, N}$. Тогда, как легко видеть, (см. (4.2)) $\hat{\mathbf{h}}_{t_*-1} = z^o_{t_*-1}$ и $\hat{\mathbf{h}}_{t_*} = z^o_{t_*}$. Кроме того, имеем (см. (4.9)) цепочку равенств

$$\lambda^1(\{\alpha^o(s):\ s \in \overline{t_*, N}\} \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) = \lambda^1(\{\alpha^o(s):\ s \in \overline{t_*, N}\}) \cup \lambda^1(\overline{N+1, \mathbf{n}}) =$$
$$= \{\lambda\bigl(\alpha^o(s)\bigr)\colon\ s \in \overline{t_*, N}\} \cup \lambda^1(\overline{N+1, \mathbf{n}}) = \{\eta(s):\ s \in \overline{t_*, N}\} \cup \eta^1(\overline{N+1, \mathbf{n}}) =$$
$$= \eta^1(\overline{t_*, N}) \cup \eta^1(\overline{N+1, \mathbf{n}}) = \eta^1(\overline{t_*, N} \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) = \eta^1(\overline{t_*, \mathbf{n}}).$$

Таким образом, получаем следующую импликацию:

$$(t_* \in \overline{2, N}) \Longrightarrow \Bigl(\mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(z^o_{t_*-1}), \mathrm{pr}_1(z^o_{t_*}), \lambda^1(\{\alpha^o(s):\ s \in \overline{t_*, N}\} \cup \overline{N+1, \mathbf{n}})\bigr) = \\ = \mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{t_*-1}), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_{t_*}), \eta^1(\overline{t_*, \mathbf{n}})\bigr)\Bigr). \tag{4.16}$$

Из (4.15), (4.16) имеем, поскольку выбор t_* был произвольным, что

$$\mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(z^o_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z^o_t), \lambda^1(\{\alpha^o(s):\ s \in \overline{t, N}\} \cup \overline{N+1, \mathbf{n}})\bigr) = \\ = \mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_t), \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})\bigr) \quad \forall\, t \in \overline{1, N}. \tag{4.17}$$

Аналогичными рассуждениями устанавливается, что

$$c^\natural_{(\lambda \circ \alpha^o)(t)}\Bigl(z^o_t, \lambda^1\bigl(\{\alpha^o(s):\ s \in \overline{t, N}\} \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}\bigr)\Bigr) = c^\natural_{\eta(t)}\bigl(\hat{\mathbf{h}}_t, \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})\bigr) \quad \forall\, t \in \overline{1, N}. \tag{4.18}$$

В итоге получаем с учетом (4.13), (4.14), (4.17) и (4.18), что

$$\mathfrak{C}_{\alpha^o}\left[(z^o_i)_{i \in \overline{0, N}}\right] = \sum_{t=1}^{N}\bigl[\mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_t), \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})\bigr) + c^\natural_{\eta(t)}\bigl(\hat{\mathbf{h}}_t, \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})\bigr)\bigr] + \\ + \mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_N), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_{N+1}), \eta^1(\overline{N+1, \mathbf{n}})\bigr). \tag{4.19}$$

С другой стороны, определено значение $\mathfrak{C}^\natural_\eta[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}}]$, для которого (см. (4.19)) при $N + 1 < \mathbf{n}$ имеем представление

$$\mathfrak{C}^\natural_\eta[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \mathfrak{C}_{\alpha^o}[(z^o_i)_{i \in \overline{0, N}}] + c^\natural_{\eta(N+1)}\bigl(\hat{\mathbf{h}}_{N+1}, \eta^1(\overline{N+1, \mathbf{n}})\bigr) + \\ + \sum_{t=N+2}^{\mathbf{n}}\bigl[\mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_t), \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})\bigr) + c^\natural_{\eta(t)}\bigl(\hat{\mathbf{h}}_t, \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})\bigr)\bigr] + f^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{n}})\bigr), \tag{4.20}$$

а при $\mathbf{n} = N + 1$ справедлива цепочка равенств

$$\mathfrak{C}^\natural_\eta[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \mathfrak{C}_{\alpha^o}[(z^o_i)_{i \in \overline{0, N}}] + c^\natural_{\eta(N+1)}\bigl(\hat{\mathbf{h}}_{N+1}, \eta^1(\overline{N+1, \mathbf{n}})\bigr) + f^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{n}})\bigr) = \\ = \mathfrak{C}_{\alpha^o}[(z^o_i)_{i \in \overline{0, N}}] + c^\natural_{\eta(\mathbf{n})}\bigl(\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{n}}, \eta^1(\{\mathbf{n}\})\bigr) + f^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{n}})\bigr). \tag{4.21}$$

Случаи, отмеченные в (4.20), (4.21), рассмотрим отдельно.

$1'$. Пусть $N+1 < \mathbf{n}$. Рассмотрим (4.20), учитывая, что (см. (4.2), (4.6)) $\hat{\mathbf{h}}_t = \mathbf{h}_t$ при $t \in \overline{0,\mathbf{n}} \setminus \overline{1,N}$ и, в частности, при $t \in \overline{N+1,\mathbf{n}}$. Из (3.23) и (4.20) получаем равенство

$$\mathfrak{C}^{\natural}_{\eta}[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathfrak{C}_{\mathbf{e}}[(\tilde{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,N}}] - \kappa + c^{\natural}_{\lambda(N+1)}\big(\mathbf{h}_{N+1}, \lambda^1(\overline{N+1,\mathbf{n}})\big) +$$
$$+ \sum_{t=N+2}^{\mathbf{n}} \big[\mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_t), \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big) + c^{\natural}_{\lambda(t)}\big(\mathbf{h}_t, \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big)\big] + f^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\mathbf{n}})\big)$$

(учитываем второе положение в (4.7)). Далее, поскольку (см. (3.1), (3.21), (4.6), (4.10), предложение 3.2) $\mathbf{h}_j = \tilde{\mathbf{h}}_j$ при $j \in \overline{0,N}$, имеем из последнего равенства, что в случае $1'$

$$\mathfrak{C}^{\natural}_{\eta}[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathfrak{C}^{\natural}_{\lambda}[(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] - \kappa.$$

Итак, установлена импликация

$$(N+1 < \mathbf{n}) \Longrightarrow (\mathfrak{C}^{\natural}_{\eta}[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathfrak{C}^{\natural}_{\lambda}[(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] - \kappa). \tag{4.22}$$

$2'$. Рассмотрим (4.21) при условии $\mathbf{n} = N+1$. Учитывая (3.21), (4.6) и (4.7), получаем, что (см. (3.2))

$$\mathfrak{C}^{\natural}_{\eta}[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathfrak{C}_{\mathbf{e}}[(\tilde{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] - \kappa + c^{\natural}_{\lambda(N+1)}\big(\mathbf{h}_{N+1}, \lambda^1(\overline{N+1,\mathbf{n}})\big) + f^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\mathbf{n}})\big) =$$
$$= \sum_{t=1}^{N}\big[\mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_t), \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big) + c^{\natural}_{\lambda(t)}\big(\mathbf{h}_t, \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big)\big] + \mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_N), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{N+1}), \lambda^1(\overline{N+1,\mathbf{n}})\big) +$$
$$+ c^{\natural}_{\lambda(N+1)}(\mathbf{h}_{N+1}, \lambda^1(\overline{N+1,\mathbf{n}})) + f^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\mathbf{n}})\big) - \kappa = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-1}\big[\mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_t), \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big) +$$
$$+ c^{\natural}_{\lambda(t)}\big(\mathbf{h}_t, \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big)\big] + \big[\mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\mathbf{n}-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{\mathbf{n}}), \lambda^1(\{\mathbf{n}\})\big) +$$
$$+ \mathbf{c}^{\natural}_{\lambda(\mathbf{n})}\big(\mathbf{h}_{\mathbf{n}}, \lambda^1(\{\mathbf{n}\})\big)\big] + f^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\mathbf{n}})\big) - \kappa = \mathfrak{C}_{\lambda}[(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] - \kappa.$$

Таким образом, установлена импликация

$$(\mathbf{n} = N+1) \Longrightarrow \big(\mathfrak{C}^{\natural}_{\eta}[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathfrak{C}^{\natural}_{\lambda}[(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] - \kappa\big).$$

Учитывая (4.22), получаем во всех возможных в ситуации (4.6) случаях равенство

$$\mathfrak{C}^{\natural}_{\eta}[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathfrak{C}^{\natural}_{\lambda}[(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] - \kappa$$

(напомним, что по предположению $N+1 \leqslant \mathbf{n}$ в случае (4.6)). Итак, (см. (4.6)),

$$(\nu = 0) \Longrightarrow \big(\mathfrak{C}^{\natural}_{\eta}[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathfrak{C}^{\natural}_{\lambda}[(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] - \kappa\big). \tag{4.23}$$

Тем самым исследование влияния начальной вставки завершено. Реальное улучшение качества связывается, как легко видеть, с обеспечением в (3.22) строгого неравенства.

§ 5. Беллмановская вставка: алгоритм на функциональном уровне, 2

В настоящем разделе рассматривается более сложный случай, когда начало вставки отлично от нуля. Иными словами, полагаем в настоящем разделе, что

$$\nu \neq 0,$$

а тогда $\nu \in \overline{1,\mathbf{n}-(N+1)}$. В этом случае $\overline{1,\nu} \neq \varnothing$ и $\overline{\nu+N+1,\mathbf{n}} \neq \varnothing$. С учетом (4.1) имеем при этом, что

$$\begin{gathered}\big(\eta(t) = \lambda(t) \quad \forall\, t \in \overline{1,\nu}\,\big) \;\&\; \big(\eta(t) = \lambda\,(\nu + \alpha^o(t-\nu)\,) \quad \forall\, t \in \overline{\nu+1,\nu+N}\,\big) \;\& \\ \&\; \big(\eta(t) = \lambda(t) \quad \forall\, t \in \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}}\,\big).\end{gathered} \tag{5.1}$$

Ясно, что $\eta^1(\overline{t,\mathbf{n}}) = \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})$ $\forall\, t \in \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}}$; см. (5.1). Данное свойство дополняет следующее

Предложение 5.1. *Если* $t \in \overline{1,\nu}$, *то* $\eta^1(\overline{t,\mathbf{n}}) = \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $t \in \overline{1,\nu}$. Тогда $(t = 1) \vee (t \in \overline{2,\nu})$. При этом $\lambda^1(\overline{1,\mathbf{n}}) = \eta^1(\overline{1,\mathbf{n}}) = \overline{1,\mathbf{n}}$, так как $\lambda \in \mathbf{P}$ и $\eta \in \mathbf{P}$. Поэтому

$$(t = 1) \Longrightarrow \bigl(\eta^1(\overline{t,\mathbf{n}}) = \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\bigr). \tag{5.2}$$

Пусть теперь $t \in \overline{2,\nu}$. Для $t-1 \in \overline{1,\mathbf{n}}$ имеем, что

$$\lambda^1(\overline{1,\mathbf{n}}) = \lambda^1(\overline{1,t-1}) \cup \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}}),$$

$$\eta^1(\overline{1,\mathbf{n}}) = \eta^1(\overline{1,t-1}) \cup \eta^1(\overline{t,\mathbf{n}}),$$

$$\lambda^1(\overline{1,t-1}) \cap \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}}) = \varnothing,$$

$$\eta^1(\overline{1,t-1}) \cap \eta^1(\overline{t,\mathbf{n}}) = \varnothing.$$

Получаем, как следствие, что

$$\eta^1(\overline{t,\mathbf{n}}) = \eta^1(\overline{1,\mathbf{n}}) \setminus \eta^1(\overline{1,t-1}) = \lambda^1(\overline{1,\mathbf{n}}) \setminus \lambda^1(\overline{1,t-1}) = \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}}),$$

поскольку $\eta^1(\overline{1,t-1}) = \lambda^1(\overline{1,t-1})$ в силу (5.1). $\square$

С учетом (5.1) и предложения 5.1 получаем теперь, что

$$\eta^1(\overline{t,\mathbf{n}}) = \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}}) \quad \forall\, t \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \overline{\nu+1,\nu+N}. \tag{5.3}$$

Предложение 5.2. *Если* $t \in \overline{\nu+1,\nu+N}$, *то* $\eta^1(\overline{t,\mathbf{n}}) = \lambda^1\bigl(\{\nu+\alpha^o(s) : s \in \overline{t-\nu,N}\} \cup \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}}\bigr)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t \in \overline{\nu+1,\nu+N}$. Тогда $t-\nu \in \overline{1,N}$. Определено множество

$$A \stackrel{\triangle}{=} \bigl\{\nu+\alpha^o(s) :\ s \in \overline{t-\nu,N}\bigr\} \in \mathcal{P}'(\overline{\nu+1,\nu+N}).$$

Требуется установить равенство $\eta^1(\overline{t,\mathbf{n}}) = \lambda^1(A \cup \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}})$.

Пусть $p \in \eta^1(\overline{t,\mathbf{n}})$. Тогда $p \in \overline{1,\mathbf{n}}$ и $p = \eta(\tau)$ для некоторого $\tau \in \overline{t,\mathbf{n}}$, где

$$(\tau \in \overline{\nu+1,\nu+N}) \vee (\tau \in \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}}). \tag{5.4}$$

Рассмотрим отдельно оба случая в (5.4).

$1'$. Пусть $\tau \in \overline{\nu+1,\nu+N}$. Тогда согласно (5.1) $p = \lambda\bigl(\nu+\alpha^o(\tau-\nu)\bigr)$, где $\tau-\nu \in \overline{t-\nu,N}$. Поэтому $\nu+\alpha^o(\tau-\nu) \in A$ и тем более $p \in \lambda^1(A \cup \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}})$. Итак, установлено, что

$$(\tau \in \overline{\nu+1,\nu+N}) \Longrightarrow \bigl(p \in \lambda^1(A \cup \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}})\bigr). \tag{5.5}$$

$2'$. Пусть теперь $\tau \in \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}}$. Тогда $p = \eta(\tau) \in \eta^1(\overline{\nu+N+1,\mathbf{n}})$ и, как следствие (см. (5.1)), $p = \lambda^1(\overline{\nu+N+1,\mathbf{n}})$. Тем более $p \in \lambda^1(A \cup \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}})$. Установлена импликация

$$(\tau \in \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}}) \Longrightarrow \bigl(p \in \lambda^1(A \cup \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}})\bigr).$$

С учетом (5.5) имеем теперь во всех возможных (см. (5.4)) случаях свойство $p \in \lambda^1(A \cup \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}})$, чем завершается проверка вложения

$$\eta^1(\overline{t,\mathbf{n}}) \subset \lambda^1(A \cup \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}}). \tag{5.6}$$

Выберем произвольно $q \in \lambda^1(A \cup \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}})$. Тогда $q \in \overline{1,\mathbf{n}}$ и для некоторого $r \in A \cup \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}}$ имеем равенство $q = \lambda(r)$. Ясно, что

$$(r \in A) \vee (r \in \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}}). \tag{5.7}$$

Рассмотрим отдельно возможности, упомянутые в (5.7).

$1''$. Пусть $r \in A$, то есть для некоторого $\theta \in \overline{t-\nu, N}$ имеет место $r = \nu + \alpha^o(\theta)$. Тогда $q = \lambda\big(\nu + \alpha^o(\theta)\big)$, где, в частности, $\theta \in \overline{1, N}$. Индекс $\tilde\theta \overset{\triangle}{=} \nu + \theta \in \overline{t, \nu + N}$ (и, в частности, $\tilde\theta \in \overline{\nu+1, \nu+N}$) реализует цепочку равенств $\eta(\tilde\theta) = \lambda\big(\nu + \alpha^o(\theta)\big) = q$ и, поскольку $\tilde\theta \in \overline{t, \mathbf{n}}$, имеем $q = \eta(\tilde\theta) \in \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})$. Итак,

$$(r \in A) \Longrightarrow \big(q \in \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})\big). \tag{5.8}$$

$2''$. Пусть $r \in \overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}}$. Тогда (см. (5.1)) $q = \eta(r) \in \eta^1(\overline{\nu+N+1, \mathbf{n}})$ и тем более $q \in \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})$ по выбору t. Итак,

$$(r \in \overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}}) \Longrightarrow \big(q \in \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})\big).$$

С учетом (5.7) и (5.8) имеем теперь $q \in \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})$ во всех возможных случаях; вложение, противоположное (5.6), установлено, чем и завершается доказательство. $\square$

С учетом (3.8) и предложения 5.2 получаем, что

$$\eta^1(\overline{t, \mathbf{n}}) = (\Lambda \circ \alpha^o)^1(\overline{t-\nu, N}) \cup \lambda^1(\overline{\nu+N+1, \mathbf{n}}) \quad \forall\, t \in \overline{\nu+1, \nu+N} \tag{5.9}$$

(при проверке (5.9) используется известное [18, с. 82] свойство операции взятия образа: образ объединения множеств равен объединению образов).

Напомним (см. (3.12)), что при $s \in \overline{1, N}$ имеют место равенства $M_{\alpha^o(s)} = \mathbf{L}_{(\Lambda\circ\alpha^o)(s)}$ и $\mathbb{M}_{\alpha^o(s)} = \mathbb{L}_{(\Lambda\circ\alpha^o)(s)}$ (используем предложение 3.1). Полагая

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma} \overset{\triangle}{=} \sum_{t=\nu+1}^{\nu+N} \big[\mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_t), \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})\big) + c^\natural_{\eta(t)}\big(\hat{\mathbf{h}}_t, \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})\big)\big] + \\ + c^\natural\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{\nu+N}), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_{\nu+N+1}), \eta^1(\overline{\nu+N+1, \mathbf{n}})\big),\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega} \overset{\triangle}{=} \sum_{t=\nu+N+1}^{\mathbf{n}} \big[\mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_t), \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})\big) + c^\natural_{\eta(t)}\big(\hat{\mathbf{h}}_t, \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})\big)\big] - \\ - \mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{\nu+N}), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_{\nu+N+1}), \eta^1(\overline{\nu+N+1, \mathbf{n}})\big),\end{aligned} \tag{5.11}$$

получаем (см. (5.10), (5.11)) с учетом (2.13), что справедливо равенство

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}^\natural_\eta[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \sum_{t=1}^{\nu} \big[\mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_t), \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})\big) + \\ + c^\natural_{\eta(t)}\big(\hat{\mathbf{h}}_t, \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})\big)\big] + \mathbf{\Gamma} + \Omega + f^\natural\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{n}})\big).\end{aligned} \tag{5.12}$$

Рассмотрим подробнее слагаемые в правой части (5.12). С учетом (4.2) и (5.1) получаем, что (см. также предложение 5.1)

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{\nu} \big[\mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_t), \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})\big) + c^\natural_{\eta(t)}\big(\hat{\mathbf{h}}_t, \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})\big)\big] = \\ = \sum_{t=1}^{\nu} \big[\mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_t), \lambda^1(\overline{t, \mathbf{n}})\big) + c^\natural_{\lambda(t)}\big(\mathbf{h}_t, \lambda^1(\overline{t, \mathbf{n}})\big)\big].\end{aligned} \tag{5.13}$$

В связи с представлением $\mathbf{\Gamma}$ отметим сначала, что $\hat{\mathbf{h}}_\nu = \mathbf{h}_\nu$, а потому $\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_\nu) = \mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_\nu) = x^o = \mathrm{pr}_2(z^o_o)$ согласно (3.11), (3.14); $\hat{\mathbf{h}}_{\nu+1} = z^o_1$ в силу (4.2). Тогда

$$\mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_\nu), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_{\nu+1}), \eta^1(\overline{\nu+1, \mathbf{n}})\big) = \mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(z^o_o), \mathrm{pr}_1(z^o_1), \eta^1(\overline{\nu+1, \mathbf{n}})\big).$$

Поэтому из (4.2) непосредственно следует, что

$$\mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_t), \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})\big) = \mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(z^o_{t-(\nu+1)}), \mathrm{pr}_1(z^o_{t-\nu}), \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}})\big) \quad \forall\, t \in \overline{\nu+1, \nu+N}.$$

Теперь с учетом предложения 5.2 и (5.9) отметим, что

$$\begin{gathered}\mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_t), \eta^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big) = \mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(z^o_{t-(\nu+1)}), \mathrm{pr}_1(z^o_{t-\nu}), \Lambda^1(\{\alpha^o(s):\\ s\in\overline{t-\nu,N}\})\cup\lambda^1(\overline{\nu+N+1,\mathbf{n}})\big) = \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z^o_{t-(\nu+1)}), \mathrm{pr}_1(z^o_{t-\nu}), \{\alpha^o(s):\\ s\in\overline{t-\nu,N}\}\big)\quad\forall\, t\in\overline{\nu+1,\nu+N}.\end{gathered}\tag{5.14}$$

Далее, при $t\in\overline{\nu+1,\nu+N}$ имеем, что

$$c^{\natural}_{\eta(t)}\big(\hat{\mathbf{h}}_t, \eta^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big) = c_{\alpha^o(t-\nu)}(z^o_{t-\nu}, \{\alpha^o(s):\ s\in\overline{t-\nu,N}\});\tag{5.15}$$

в этом представлении учтены (3.16) и (5.1). Здесь же отметим, что, как легко видеть с учетом (3.17), справедливо равенство

$$\mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{\nu+N}), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_{\nu+N+1}), \eta^1(\overline{\nu+N+1,\mathbf{n}})\big) = f\big(\mathrm{pr}_2(z^o_N)\big).\tag{5.16}$$

Теперь из (5.10), (5.14)–(5.16) получаем (см. (3.18)) следующую цепочку равенств:

$$\begin{gathered}\mathbf{\Gamma} \overset{\triangle}{=} \sum_{t=\nu+1}^{\nu+N}\big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z^o_{t-(\nu+1)}), \mathrm{pr}_1(z^o_{t-\nu}), \{\alpha^o(s):\ s\in\overline{t-\nu,N}\}\big) +\\ + c_{\alpha^o(t-\nu)}\big(z^o_{t-\nu}, \{\alpha^o(s):\ s\in\overline{t-\nu,N}\}\big)\big] + f\big(\mathrm{pr}_2(z^o_N)\big) = \mathfrak{C}_{\alpha^o}[(z^o_i)_{i\in\overline{0,N}}].\end{gathered}\tag{5.17}$$

Тогда из (3.23) и (5.17) получаем очевидное равенство $\mathbf{\Gamma} = \mathfrak{C}_{\mathbf{e}}[(\tilde{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,N}}] - \kappa$. Как следствие, в (5.12) приходим к выражению

$$\begin{gathered}\mathfrak{C}^{\natural}_{\eta}[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,N}}] = \sum_{t=1}^{\nu}\big[\mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_t), \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big) + c^{\natural}_{\lambda(t)}\big(\mathbf{h}_t, \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big)\big] +\\ + \mathfrak{C}_{\mathbf{e}}[(\tilde{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,N}}] - \kappa + \Omega + f^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\mathbf{n}})\big)\end{gathered}\tag{5.18}$$

(в (5.18) учитываем равенство (5.13) и вытекающее из (4.2) равенство $\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{n}} = \mathbf{h}_{\mathbf{n}}$; в самом деле, по выбору ν имеем, что $\mathbf{n}\notin\overline{\nu+1,\nu+N}$). Напомним, что по определению $\mathbf{e}$ (учитываем также, что $N\geqslant 2$)

$$\begin{gathered}\mathfrak{C}_{\mathbf{e}}[(\tilde{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,N}}] = \sum_{t=1}^{N}\big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\tilde{\mathbf{h}}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\tilde{\mathbf{h}}_t), \overline{t,N}\big) + c_t(\tilde{\mathbf{h}}_t, \overline{t,N})\big] + f\big(\mathrm{pr}_2(\tilde{\mathbf{h}}_N)\big) =\\ = \mathbf{c}\big(x^o, \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{\nu+1}), \overline{1,N}\big) + c_1(\mathbf{h}_{\nu+1}, \overline{1,N}) + \sum_{t=2}^{N}\big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\nu+(t-1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{\nu+t}), \overline{t,N}\big) +\\ + c_t(\mathbf{h}_{\nu+t}, \overline{t,N})\big] + f\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\nu+N})\big) =\\ = \sum_{t=1}^{N}\big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\nu+(t-1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{\nu+t}), \overline{t,N}\big) + c_t(\mathbf{h}_{\nu+t}, \overline{t,N})\big] + f\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\nu+N})\big).\end{gathered}\tag{5.19}$$

Учитывая (3.15), (3.16) и (5.19), получаем следующее равенство:

$$\begin{gathered}\mathfrak{C}_{\mathbf{e}}[(\tilde{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,N}}] = \sum_{t=\nu+1}^{\nu+N}\big[\mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_t), \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big) + c^{\natural}_{\lambda(t)}\big(\mathbf{h}_t, \lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big)\big] +\\ + \mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\nu+N}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{\nu+N+1}), \lambda^1(\overline{\nu+N+1,\mathbf{n}})\big)\end{gathered}\tag{5.20}$$

(в данном преобразовании учитываем, что по свойству операции взятия образа

$$\Lambda^1(\overline{\tau,N})\cup\lambda^1(\overline{\nu+N+1,\mathbf{n}}) = \lambda^1(\overline{\nu+\tau,\nu+N})\cup\lambda^1(\overline{\nu+N+1,\mathbf{n}}) =$$

$$= \lambda^1(\overline{\nu+\tau,\nu+N}) \cup \ (\overline{\nu+N+1,\mathbf{n}}) = \lambda^1(\overline{\nu+\tau,\mathbf{n}})$$

при $\tau \in \overline{1,N}$). Теперь из (5.18) и (5.20) получаем, что

$$\begin{gathered}\mathfrak{C}^\natural_\eta[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \sum_{t=1}^{\nu+N}\bigl[\mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_t),\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\bigr) + c^\natural_{\lambda(t)}\bigl(\mathbf{h}_t,\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\bigr)\bigr] + \\ + \mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\nu+N}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{\nu+N+1}),\lambda^1(\overline{\nu+N+1,\mathbf{n}})\bigr) + \Omega + f^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_\mathbf{n})\bigr) - \kappa.\end{gathered} \tag{5.21}$$

Напомним теперь, что в рассматриваемой ситуации

$$(\nu+N+1=\mathbf{n}) \vee (\nu+N+1<\mathbf{n}). \tag{5.22}$$

Оба случая в (5.22) рассмотрим отдельно.

1^o. Пусть $\nu+N+1=\mathbf{n}$. Тогда в силу (5.11) имеем цепочку равенств

$$\begin{gathered}\Omega = \mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{n}-1}),\mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_\mathbf{n}),\eta^1(\{\mathbf{n}\})\bigr) + c^\natural_{\eta(\mathbf{n})}\bigl(\hat{\mathbf{h}}_\mathbf{n},\eta^1(\{\mathbf{n}\})\bigr) - \\ - \mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{n}-1}),\mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_\mathbf{n}),\eta^1(\{\mathbf{n}\})\bigr) = c^\natural_{\eta(\mathbf{n})}\bigl(\hat{\mathbf{h}}_\mathbf{n},\eta^1(\{\mathbf{n}\})\bigr) = c^\natural_{\lambda(\mathbf{n})}\bigl(\mathbf{h}_\mathbf{n},\lambda^1(\{\mathbf{n}\})\bigr).\end{gathered} \tag{5.23}$$

Возвращаясь к (5.21), с учетом (5.23) получаем, что в рассматриваемом случае

$$\begin{gathered}\mathfrak{C}^\natural_\eta[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-1}\bigl[\mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_t),\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\bigr) + c^\natural_{\lambda(t)}\bigl(\mathbf{h}_t,\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\bigr)\bigr] + \\ + \bigl[\mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\mathbf{n}-1}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_\mathbf{n}),\lambda^1(\{\mathbf{n}\})\bigr) + c^\natural_{\lambda(\mathbf{n})}\bigl(\mathbf{h}_\mathbf{n},\lambda^1(\{\mathbf{n}\})\bigr)\bigr] + f^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_\mathbf{n})\bigr) - \kappa.\end{gathered} \tag{5.24}$$

Из (3.2) и (5.24) получаем следующее равенство:

$$\begin{gathered}\mathfrak{C}^\natural_\eta[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}}\bigl[\mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_t),\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\bigr) + c^\natural_{\lambda(t)}\bigl(\mathbf{h}_t,\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\bigr)\bigr] + \\ + f^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_\mathbf{n})\bigr) - \kappa = \mathfrak{C}^\natural_\lambda[(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] - \kappa.\end{gathered}$$

Итак, установлена следующая импликация:

$$(\nu+N+1=\mathbf{n}) \Longrightarrow \bigl(\mathfrak{C}^\natural_\eta[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathfrak{C}^\natural_\lambda[(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] - \kappa\bigr). \tag{5.25}$$

2^o. Пусть теперь $\nu+N+1<\mathbf{n}$. Тогда $\nu+N+2 \leqslant \mathbf{n}$. Согласно (4.3), (5.1) и (5.11)

$$\begin{gathered}\Omega = \mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{\nu+N}),\mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_{\nu+N+1}),\eta^1(\overline{\nu+N+1,\mathbf{n}})\bigr) + \\ + \sum_{t=\nu+N+2}^{\mathbf{n}}\mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_t),\eta^1(\overline{t,\mathbf{n}})\bigr) + \\ + \sum_{t=\nu+N+1}^{\mathbf{n}} c^\natural_{\eta(t)}\bigl(\hat{\mathbf{h}}_t,\eta^1(\overline{t,\mathbf{n}})\bigr) - \mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{\nu+N}),\mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_{\nu+N+1}),\eta^1(\overline{\nu+N+1,\mathbf{n}})\bigr) = \\ = \sum_{t=\nu+N+2}^{\mathbf{n}}\mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_t),\eta^1(\overline{t,\mathbf{n}})\bigr) + \sum_{t=\nu+N+1}^{\mathbf{n}} c^\natural_{\eta(t)}\bigl(\hat{\mathbf{h}}_t,\eta^1(\overline{t,\mathbf{n}})\bigr) = \\ = \sum_{t=\nu+N+2}^{\mathbf{n}}\mathbf{c}^\natural\bigl(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_t),\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\bigr) + \sum_{t=\nu+N+1}^{\mathbf{n}} c^\natural_{\lambda(t)}\bigl(\mathbf{h}_t,\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\bigr).\end{gathered} \tag{5.26}$$

Из (5.21) и (5.26) получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}^{\natural}_{\eta}[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \sum_{t=1}^{\nu+N}\big[\mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_t),\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big) + c^{\natural}_{\lambda(t)}\big(\mathbf{h}_t,\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big)\big]+\\ + \mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\nu+N}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{\nu+N+1}),\lambda^1(\overline{\nu+N+1,\mathbf{n}})\big)+\\ + \sum_{t=\nu+N+2}^{\mathbf{n}}\mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_t),\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big) + \sum_{t=\nu+N+1}^{\mathbf{n}} c^{\natural}_{\lambda(t)}\big(\mathbf{h}_t,\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big) + f^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\mathbf{n}})\big) - \kappa =\\ = \sum_{t=1}^{\nu+N}\big[\mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_t),\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big) + c^{\natural}_{\lambda(t)}\big(\mathbf{h}_t,\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big)\big]+\\ + \sum_{t=\nu+N+1}^{\mathbf{n}}\big[\mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_t),\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big) + c^{\natural}_{\lambda(t)}\big(\mathbf{h}_t,\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big)\big] + f^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\mathbf{n}})\big) - \kappa =\\ = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}}\big[\mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_t),\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big) + c^{\natural}_{\lambda(t)}\big(\mathbf{h}_t,\lambda^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big)\big]+\\ + f^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\mathbf{n}})\big) - \kappa = \mathfrak{C}^{\natural}_{\lambda}[(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] - \kappa.\end{aligned} \tag{5.27}$$

Тем самым (см. (5.27)) установлена импликация

$$(\nu+N+1<\mathbf{n}) \Longrightarrow \big(\mathfrak{C}^{\natural}_{\eta}[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathfrak{C}^{\natural}_{\lambda}[(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] - \kappa\big). \tag{5.28}$$

Из (5.22), (5.25) и (5.28) вытекает, что во всех возможных (при условии $\nu \neq 0$) случаях справедливо равенство $\mathfrak{C}^{\natural}_{\eta}[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathfrak{C}^{\natural}_{\lambda}[(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] - \kappa$, чем и завершается доказательство импликации

$$(\nu \neq 0) \Longrightarrow \big(\mathfrak{C}^{\natural}_{\eta}[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathfrak{C}^{\natural}_{\lambda}[(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] - \kappa\big). \tag{5.29}$$

В свою очередь, из (4.23) и (5.29) вытекает основная

Теорема 5.1. *Во всех возможных случаях значение критерия для ДР* $\big(\lambda,(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big)$ *и* $\big(\eta,(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big)$ *отличается на величину* κ *в сторону улучшения за счет локальной вставки:*

$$\mathfrak{C}^{\natural}_{\eta}[(\hat{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathfrak{C}^{\natural}_{\lambda}[(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] - \kappa \leqslant \mathfrak{C}_{\lambda}[(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}].$$

Заключительные замечания

Процедура коррекции ДР на основе оптимизационной локальной вставки может использоваться в режиме итераций. Существенный момент связан с выбором начала вставки (параметр ν в построениях разделов 3–5). Один из возможных вариантов можно связать с относительно быстрым решением по методу ДП локальных задач (3.19) для всех $\nu \in \overline{0,\mathbf{n}-(N+1)}$ при замене N достаточно малым числом с последующей оптимизацией параметра ν в смысле критерия, определяемого подобно (3.23) (основное затруднение связано здесь с многократным перестраиванием функций стоимости). После нахождения наилучшего в упомянутом смысле параметра ν можно реализовать рабочую вставку с бóльшим значением N с целью получения ощутимого влияния на значение критерия качества. Итак, в принципе возможно сочетание «малых» зондирующих вставок с последующим выбором начала основной (рабочей) вставки. После перестройки глобального ДР можно снова приступить к режиму поиска «момента» начала рабочей вставки с применением «малых» вставок, в результате чего появится возможность формирования новой рабочей вставки и так далее. Сама степень улучшения (неухудшения) результата характеризуется соотношениями, подобными (3.23) и определяемыми в терминах локальных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петунин А.А. О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестник УГАТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. Т. 13. № 2 (35). С. 280–286.
2. Ташлыков О.Л. Ремонт оборудования атомных станций: учеб. пособие для вузов // Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2003. 319 с.
3. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
4. Ченцов А.Г. К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 59–82.
5. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Элементы динамического программирования в экстремальных задачах маршрутизации // Проблемы управления. 2013. № 5. С. 12–21.
6. Ченцов А.А., Ченцов А.Г. Динамическое программирование в задаче маршрутизации со сложной зависимостью стоимостей от списка заданий // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 2. С. 26–40.
7. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.–Ижевск: РХД, 2008. 238 с.
8. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
9. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.
10. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.
11. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
12. Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
13. Сигал И.Х. Декомпозиционный подход к решению задачи коммивояжера большой размерности и некоторые его приложения // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1990. № 6. С. 143–155.
14. Сергеев С.И. Алгоритмы решения минимаксной задачи коммивояжера. I // Автоматика и телемеханика. 1995. № 7. С. 144–150.
15. Barvinok A., Gimadi E.Kh., Serdyukov A.I. The Maximum TSP // The Traveling Salesman problem and its variations / Gutin G., Punnen A.P. (Editors). Dordrecht–Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002. P. 585–607.
16. Ченцов А.Г. Задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 170–190.
17. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1999. 960 с.
18. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
19. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
20. Ченцов А.А., Ченцов А.Г. Задача последовательного обхода мегаполисов // Вестник Тамбовского университета. Серия «Естественные и технические науки». 2014. Т. 19. Вып. 2. С. 454–475.
21. Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Локальные вставки на основе динамического программирования в задаче маршрутизации с ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 2. С. 56–75.

Поступила в редакцию 15.11.2014

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

A. G. Chentsov

The Bellmann insertions in the route problem with constraints and complicated cost functions

Keywords: route, trace, precedence conditions.

MSC: 28A33

The problem of sequential circuit of megalopolises with precedence conditions and cost functions that permit a dependence on tasks list is considered. Such problems can arise, in particular, in atomic energetic while investigating the questions connected with lowering of workers irradiation under permutations in radiative fields for realization of services connected with division of radiating elements. Another application of the developed methods is connected with important engineering problem of routing the instrument movements under the leaf cutting on numerically controlled machines. This problem has sufficiently large dimensionality and many precedence conditions: if a detail has not only exterior but at least one interior contours (the simplest example is a washer) then the interior contours must be cut before the cutting of exterior contour (finite sets located near corresponding contours are used as megalopolises). In this case the possible dependence of cost functions on tasks list can reflect various technological conditions. We note that perceptible dimensionality characterized by all contours in total leads to necessity of heuristics employment. Therefore, questions concerning at least local improvement of solutions appear sufficiently important for the investigation.

The basic attention in the article is devoted to the construction of optimizing insertions in complicated conditions: it is required to reduce the fragment of precedence conditions and to transform the corresponding cost functions; in the last case, it is important to preserve the dependence on tasks list. Both above-mentioned moments are taken into account under the procedure construction having the sense of algorithm on functional level.

REFERENCES

1. Petunin A.A. About some strategies of the programming of tool route by developing of control programs for thermal cutting machines, *Vestnik UGATU*, 2009, vol. 13, no. 2 (35), pp. 280–286 (in Russian).

2. Tashlykov O.L. *Remont oborudovaniya atomnykh stantsii* (Repair of equipment of nuclear power plants), Yekaterinburg: USTU–UPI, 2003, 320 p.

3. Garey M.R., Johnson D.S. *Computers and Intractability*, New York: Macmillan Higher Education, 1979, 340 p. Translated under the title *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi*, Moscow: Mir, 1982, 416 p.

4. Chentsov A.G. To question of routing of works complexes, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 1, pp. 59–82 (in Russian).

5. Chentsov A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. Elements of dynamic programming in extremal route problems, *Problemy upravleniya*, 2013, no. 5, pp. 12–21 (in Russian).

6. Chentsov A.A., Chentsov A.G. Dynamic programming in the routing problem with complex dependence of costs on the list of jobs, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53, issue 2, pp. 172–185.

7. Chentsov A.G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadanii: voprosy teorii* (Extremal problems of routing and assignment of tasks: questions of theory), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2008, 240 p.

8. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Problems of the theory, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1989, no. 9, pp. 3–34 (in Russian).

9. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Exact algorithms, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1989, no. 10, pp. 3–29 (in Russian).

10. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Approximation algorithms, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1989, no. 11, pp. 3–26 (in Russian).

11. Bellman R. Application of dynamic programming method for the traveling salesman problem, *Kibernet. Sb.*, Moscow: Mir, 1964, vol. 9, pp. 219–228 (in Russian).

12. Kheld M., Karp R.M. Application of dynamic programming method for the sorting problems, *Kibernet. Sb.*, Moscow: Mir, 1964, vol. 9, pp. 202–218 (in Russian).

13. Sigal I.Kh. A decomposition approach to solving a travelling salesman problem of large dimensionality and some applications, *Sov. J. Comput. Syst. Sci.*, 1991, vol. 29, no. 6, pp. 48–58.

14. Sergeev S.I. Algorithms for the minimax problem of the traveling salesman. I: An approach based on dynamic programming, *Autom. Remote Control*, 1995, vol. 56, no. 7, pp. 1027–1032.

15. Barvinok A., Gimadi E.Kh., Serdyukov A.I. The Maximum TSP, *The Traveling Salesman problem and its variations*, Gutin G., Punnen A.P. (Eds.), Dordrecht–Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002, pp. 585–607.

16. Chentsov A.G. Problem of successive megalopolis traversal with the precedence conditions, *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, issue 4, pp. 728–744.

17. Cormen T., Leiserson Ch., Rivest R. *Introduction to algorithms (1st ed.)*, MIT Press and McGraw-Hill, 1990. Translated under the title *Algoritmy. Postroenie i analiz* (The algorithms. Construction and analysis), Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 1990, 960 p.

18. Kuratowski K., Mostowski A. *Teoriya mnozhestv* (Theory of sets), Moscow: Mir, 1970, 416 p.

19. Dieudonne J. *Osnovy sovremennogo analiza* (Foundations of modern analysis), Moscow: Mir, 1964, 430 p.

20. Chentsov A.A., Chentsov A.G. The problem of megalopolises consistent detouring, *Vestn. Tambov. Univ. Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2014, vol. 19, no. 2, pp. 454–475 (in Russian).

21. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. Local dynamic programming incuts in routing problems with restrictions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, no. 2, pp. 56–75 (in Russian).

Received 15.11.2014

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru