УДК 517.935, 517.938

© *Л. И. Родина*

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВАХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ [1]

Данная работа посвящена исследованию инвариантных множеств управляемых систем с импульсными воздействиями, параметризованных метрической динамической системой. Такими системами описываются различные стохастические модели популяционной динамики, экономики, квантовой электроники и механики. Получены условия существования инвариантных множеств для множества достижимости системы и условия асимптотического приближения решений системы к заданному множеству.

Результаты работы проиллюстрированы на примерах развития популяции, подверженной промыслу, когда моменты и размеры промысловых заготовок являются случайными величинами. Для данных моделей исследованы различные динамические режимы развития, которые существенно отличаются от режимов детерминированных моделей и более полно отображают процессы, происходящие в реальных экологических системах. Получены условия, при которых размер популяции находится в заданном множестве, и условия асимптотического вырождения популяции с вероятностью единица, также приведены оценки для математического ожидания и дисперсии времени вырождения популяции.

Ключевые слова: управляемые системы со случайными коэффициентами, динамические системы, инвариантные множества, вероятностные модели популяционной динамики.

Введение

Данная работа является продолжением [1–3], в которых разработана новая стохастическая модель популяционной динамики. Эта модель является обобщением детерминированных моделей, описывающих динамику популяций с типовой или возрастной структурой, в которых предполагается, что переход из одного типа или класса в другой носит скачкообразный характер и осуществляется в фиксированные моменты времени τ_k, $k = 1, 2, \ldots$ (см. [4–6]). Для описания динамики популяции в этом случае применяются дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями, траектории которых терпят разрыв в моменты τ_k. Такое же поведение траекторий будет для различных прикладных моделей экономики, квантовой электроники и механики (например, [7, с. 183–229]).

Для вероятностной модели, описанной в работах [1–3], предполагаем, что изменение размера популяции на интервалах (τ_k, τ_{k+1}), в моменты τ_k, а также и сами эти моменты зависят от различных воздействий внешней среды, поэтому динамика популяции описывается управляемой системой со случайными коэффициентами. В данной статье на примере развития популяции, подверженной промыслу, описаны динамические режимы, возникающие в вероятностных моделях, которые существенно отличаются от режимов детерминированных моделей и более полно отображают процессы, происходящие в реальных экологических системах. Для управляемых систем со случайными коэффициентами получены условия существования инвариантного множества и условия асимптотического вырождения популяции, выполненные с вероятностью единица.

§ 1. Описание вероятностной модели

Отметим, что вероятностные модели динамики популяции являются обобщением известных детерминированных моделей, к которым относятся непрерывные модели (модель Мальтуса,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12–01–00195) и Минобрнауки РФ в рамках базовой части.

Ферхюльста, Гомпертца, Базыкина, Лотки–Вольтерры и многие другие (см. [4], [8, с. 37–44])), заданные системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Также будем рассматривать модели с непрерывно-дискретным поведением траекторий, которые описываются дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \neq \tau_k, \quad \Delta x\big|_{t=\tau_k} = g(x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

или управляемой системой с импульсами. Примеры таких моделей приведены в [4, с. 68–76], [5, 6], [7, с. 183–229].

В данной работе исследуются вероятностные модели, заданные управляемыми системами

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad t \neq \tau_k(\sigma), \\ \Delta x\big|_{t=\tau_k(\sigma)} = g(h^t\sigma, x)w, \quad (t, \sigma, x, u, w) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p, \end{gathered} \tag{1.2}$$

порожденными метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$. Напомним, что *метрической динамической системой* называется четверка $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$, где Σ — фазовое пространство динамической системы; $\mathfrak{A}$ — некоторая сигма-алгебра подмножеств Σ; h^t — однопараметрическая группа измеримых преобразований фазового пространства Σ в себя (измеримость означает, что $h^tA \in \mathfrak{A}$ для каждого $A \in \mathfrak{A}$ и для любого $t \in \mathbb{R}$). Далее, μ — вероятностная мера, инвариантная относительно потока h^t, то есть $\mu(h^tA) = \mu(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A}$ и любого $t \in \mathbb{R}$ (например, [9, с. 12]). В качестве допустимых управлений $u(t, \sigma)$ берем всевозможные ограниченные измеримые функции со значениями в множестве $U \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$, где $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$ — пространство непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^m$ с метрикой Хаусдорфа. Вектор w также является управляющим воздействием, влияющим на поведение системы в моменты времени $t = \tau_k(\sigma)$ и принимает значения в множестве $W \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^p)$. Предполагаем, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ функции $(t, x, u) \to f(h^t\sigma, x, u)$ и $(t, x) \to g(h^t\sigma, x)$ непрерывны и решения системы (1.2) непрерывны слева. В популяционной динамике система (1.2) описывает развитие популяции с типовой, возрастной, половой структурой или популяции, в которой есть особи разных типов и различных возрастных классов (например, [4, с. 68–76], [5]).

Для модели (1.1) будем предполагать, что существуют такие моменты времени $\tau_k = \tau_k(\sigma)$, $k = 0, 1, \ldots$, что длины интервалов (τ_k, τ_{k+1}) являются независимыми случайными величинами со значениями в множестве $\Omega_0 = [\alpha, \beta]$, где $0 < \alpha < \beta < +\infty$ и на каждом из этих интервалов функция f зависит от случайного параметра v_1, принимающего значения в заданном множестве Ω_1; поэтому множеством значений случайных параметров является $\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1$. В модели (1.2) моменты τ_k являются моментами скачков для системы с импульсным воздействием; это могут быть моменты появления новой генерации для изолированной популяции или моменты промысловых заготовок для популяции, подверженной промыслу. Здесь будем дополнительно предполагать, что величина скачка g зависит от случайного параметра v_2, поэтому все параметры принадлежат множеству $\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1 \times \Omega_2$, причем любое из множеств Ω_0, Ω_1 или Ω_2 может содержать только один элемент. В частном случае, когда все множество Ω состоит из одного элемента, вероятностная модель совпадает с детерминированной, поэтому она является обобщением детерминированной модели.

Основным объектом исследования в данной работе является система (1.2), поэтому опишем метрическую динамическую систему $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$, которая параметризует (1.2), для системы (1.1) динамическая система устроена аналогично (подобные системы описаны в [10–12]). Определим вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ как прямое произведением вероятностных пространств $(\Sigma_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i)$, $i = 0, 1, 2$. Здесь Σ_0 означает множество числовых последовательностей $\theta = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots)$, где $\theta_k \in \Omega_0$, система множеств $\mathfrak{A}_0$ является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами

$$E_k \doteq \{\theta \in \Sigma_0 : \theta_0 \in I_0, \ldots, \theta_k \in I_k\}, \quad \text{где} \;\; I_j \doteq (t_j, s_j], \;\; j = 0, 1, \ldots, k,$$

а вероятностная мера μ_0 определена следующим образом. Для каждого промежутка I_j, $j = 1, 2, \ldots$, определим вероятностную меру $\widetilde{\mu}_0(I_j) = G(s_j) - G(t_j)$ с помощью функций распределения $G(t)$, а для I_0 — с помощью функции распределения

$$G_0(t) = \frac{1}{m_\theta}\int_0^t \big(1 - G(s)\big)ds, \quad t \in (0, \infty),$$

где m_θ — математическое ожидание случайной величины с распределением $G(t)$. На алгебре цилиндрических множеств построим меру $\widetilde{\mu}_0(E_k) = \widetilde{\mu}_0(I_0)\widetilde{\mu}_0(I_1)\ldots\widetilde{\mu}_0(I_k)$, тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (см., например, [13, с. 176]) на измеримом пространстве $(\Sigma_0, \mathfrak{A}_0)$ существует единственная вероятностная мера μ_0, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}_0$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_0$.

Далее, пусть заданы множества Ω_i с сигма-алгебрами подмножеств $\widetilde{\mathfrak{A}}_i$, на которых определены вероятностные меры $\widetilde{\mu}_i$, $i = 1, 2$. Обозначим через Σ_i множество последовательностей

$$\Sigma_i \doteq \{\psi^i : \psi^i = (\psi_0^i, \ldots, \psi_k^i, \ldots),\ \psi_k^i \in \Omega_i\},$$

через $\mathfrak{A}_i$ обозначим наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$D_k^i \doteq \{\psi^i \in \Sigma_i : \psi_0^i \in \Psi_0^i, \ldots, \psi_k^i \in \Psi_k^i\}, \quad \text{где} \quad \Psi_j^i \in \widetilde{\mathfrak{A}}_i,\ j = 0, 1, \ldots, k,\ i = 1, 2,$$

определим меру $\widetilde{\mu}_i(D_k^i) = \widetilde{\mu}_i(\Psi_0^i)\widetilde{\mu}_i(\Psi_1^i)\ldots\widetilde{\mu}_i(\Psi_k^i)$ и меру μ_i как продолжение меры $\widetilde{\mu}_i$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2$. Заметим, что $\Sigma = \{\sigma : \sigma = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots),\ \omega_k = (\theta_k, \psi_k^1, \psi_k^2) \in \Omega\}$.

Введем последовательность $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$, где $\tau_k = \tau_k(\theta) = \sum\limits_{i=0}^{k}\theta_i$, $\theta \in \Sigma_0$. Обозначим через $\eta = \eta(t, \theta)$ число точек $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$, расположенных левее t, тогда $\eta = \eta(t, \theta) = \max\{k : \tau_k \leqslant t\}$, где $t \geqslant 0$. Величина $\eta(t, \theta)$ называется процессом восстановления. На вероятностном пространстве $(\Sigma_0, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ определим преобразование сдвига

$$h_0^t\theta = \big(\tau_{\eta+1} - t, \theta_{\eta+2}, \theta_{\eta+3}, \ldots\big), \ \ t > 0.$$

Поскольку $\eta(t, \theta)$ является стационарным процессом восстановления (см. [14, с. 145–147]), то преобразование h_0^t сохраняет меру μ_0, то есть для любого множества $A \in \mathfrak{A}_0$ и всех $t \geqslant 0$ выполнено равенство $\mu_0(h_0^t A) = \mu_0(A)$. На пространствах $(\Sigma_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i)$ при каждом фиксированном $\theta \in \Sigma_0$ зададим преобразования сдвига $h_i^t(\theta)\psi^i = (\psi_\eta^i, \psi_{\eta+1}^i, \ldots)$, $i = 1, 2$, которые сохраняют меры μ_1 и μ_2 соответственно. На пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ также определим преобразование

$$h^t\sigma = h^t(\theta, \psi^1, \psi^2) = \big(h_0^t\theta, h_1^t(\theta)\psi^1, h_2^t(\theta)\psi^2\big).$$

Преобразование $h^t\sigma$ сохраняет меру $\mu = \mu_0 \times \mu_1 \times \mu_2$ (см. [9, с. 190]), которая является прямым произведением вероятностных мер μ_i, $i = 0, 1, 2$. Это означает, что $\mu(A_0 \times A_1 \times A_2) = \mu_0(A_0)\mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ для всех $A_i \in \mathfrak{A}_i$, $i = 0, 1, 2$.

Подобным образом строится динамическая система $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$, которая параметризует систему (1.1). Здесь $\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1$ и $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ является прямым произведением двух вероятностных пространств $(\Sigma_0, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ и $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$.

Замечание 1. Поскольку распределение случайной величины θ_0 в общем случае отличается от распределений $\theta_1, \theta_2, \ldots$, то, согласно В. Феллеру (см. [15, т. 2, с. 219]), статистическое наблюдение над системой целесообразно начинать не с нулевого момента времени, а с момента $\tau_0 > 0$, что мы и будем делать в данной работе.

§ 2. Асимптотические свойства решений и инвариантные множества уравнения со случайными коэффициентами

Результаты этого раздела как представляют самостоятельный интерес, так и служат для исследования поведения решений управляемой системы со случайными коэффициентами. Рассмотрим дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\dot{z} = q(h^t\sigma, z), \quad t \neq \tau_k(\sigma), \quad \Delta z\big|_{t=\tau_k(\sigma)} = \ell(h^t\sigma, z), \quad (t, \sigma, z) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}, \qquad (2.1)$$

параметризованное метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$, которая построена в предыдущем разделе. Решения уравнения (2.1) предполагаем непрерывными слева.

Уравнению (2.1) поставим в соответствие вспомогательное детерминированное уравнение

$$\dot{z} = q(t, v_1, z), \quad t \neq k\vartheta, \quad \Delta z\big|_{t=k\vartheta} = \ell(v_2, z), \quad (t, z) \in \mathbb{R}^2, \tag{2.2}$$

где $\vartheta > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $(v_1, v_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$. Предполагаем, что для каждого $v_1 \in \Omega_1$ функция $q(t, v_1, z)$ непрерывна, удовлетворяет локальному условию Липшица и $q(t, v_1, 0) \geqslant 0$ при $t \geqslant 0$. Отметим, что уравнение (2.2) можно рассматривать как частный случай уравнения со случайными коэффициентами (2.1) при фиксированном $\sigma = ((\vartheta, v_1, v_2), (\vartheta, v_1, v_2), \ldots) \in \Sigma$.

Для каждого $v_2 \in \Omega_2$ рассмотрим функцию $z \to L(v_2, z) \doteq \ell(v_2, z) + z$ в предположении, что она непрерывная, неубывающая и $L(v_2, z) \geqslant 0$ для всех $z \geqslant 0$. Обозначим через $\varphi(t, v_1, z)$ решение уравнения $\dot{z} = q(t, v_1, z)$ при фиксированном значении $v_1 \in \Omega_1$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, v_1, z) = z$; $\omega = (\vartheta, v_1, v_2) \in \Omega = \Omega_0 \times \Omega_1 \times \Omega_2$. Введем в рассмотрение функцию

$$H(\omega, z) \doteq L\big(v_2, \varphi(\vartheta, v_1, z)\big) = \ell\big(v_2, \varphi(\vartheta, v_1, z)\big) + \varphi(\vartheta, v_1, z). \tag{2.3}$$

Лемма 1 (см. [2]). *Функция $H(\omega, z)$ удовлетворяет следующим свойствам:*

1) *если для любого $z \geqslant 0$ решение $\varphi(t, v_1, z)$ продолжаемо на полуось $[0, +\infty)$, то для каждого $\omega \in \Omega$ функция $z \to H(\omega, z)$ определена и непрерывна для всех $z \geqslant 0$;*

2) *$H(\omega, z) \geqslant 0$ для всех $\omega \in \Omega$, $z \geqslant 0$.*

3) *для каждого $\omega \in \Omega$ функция $z \to H(\omega, z)$ неубывающая.*

Обозначим через $z(t, \sigma, z_0)$ решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальному условию $z(\tau_0, \sigma, z_0) = z_0$.

Лемма 2. *Имеют место следующие утверждения:*

1) *если* $\sup\limits_{\omega\in\Omega, z>0} \dfrac{H(\omega, z)}{z} < 1$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} z(t, \sigma, z_0) = 0$ *для каждого $\sigma \in \Sigma$ и любого $z_0 \geqslant 0$;*

2) *если* $\inf\limits_{\omega\in\Omega, z>0} \dfrac{H(\omega, z)}{z} > 1$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} z(t, \sigma, z_0) = +\infty$ *для каждого $\sigma \in \Sigma$ и любого $z_0 > 0$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $C = \sup\limits_{\omega\in\Omega, z>0} \dfrac{H(\omega, z)}{z} < 1$. Для каждого $z_0 \geqslant 0$ определим последовательность $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$, где $y_0 = z_0$, $y_k = C^k z_0$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда $y_k = 0$, если $z_0 = 0$, и $y_k \to 0$ при $k \to \infty$, если $z_0 > 0$.

Решению $z(t, \sigma, z_0)$ поставим в соответствие последовательность $\{z_k(\sigma)\}_{k=0}^{\infty}$, где

$$z_0(\sigma) = z_0, \quad z_k(\sigma) = z(\tau_k(\sigma), \sigma, z_0) = H(\omega_k, z_{k-1}(\sigma)), \ \ k = 1, 2, \ldots. \tag{2.4}$$

Покажем, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ справедливы неравенства $z_k(\sigma) \leqslant y_k$, $k = 0, 1, \ldots$. Действительно, если $z_0 = 0$, то из условия $C < 1$ и непрерывности функции $z \to H(\omega, z)$ следует, что $H(\omega, 0) = 0$, поэтому $z_k(\sigma) = y_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$; если $z_0 > 0$, то $z_0(\sigma) = y_0 = z_0$,

$$z_1(\sigma) = H(\omega_1, z_0) = \frac{H(\omega_1, z_0)}{z_0} \cdot z_0 \leqslant \sup_{\omega\in\Omega, z>0} \frac{H(\omega, z)}{z} \cdot z_0 = C z_0 = y_1.$$

Далее, если $z_1(\sigma) = 0$, то $z_k(\sigma) = 0$ для всех $k = 2, 3, \ldots$, поэтому неравенство $z_k(\sigma) \leqslant y_k$ верно. При $z_1(\sigma) \neq 0$ получаем

$$z_2(\sigma) = H\big(\omega_2, z_1(\sigma)\big) = \frac{H(\omega_2, z_1(\sigma))}{z_1(\sigma)} \cdot z_1(\sigma) \leqslant C z_1(\sigma) \leqslant C y_1 = y_2.$$

Аналогично можно показать, что неравенство $z_k(\sigma) \leqslant y_k$ выполнено для всех $k = 3, 4, \ldots$. Поскольку $H(\omega, z) \geqslant 0$ для всех $z \geqslant 0$, то $0 \leqslant z_k(\sigma) \leqslant y_k$, $k = 0, 1, \ldots$. Таким образом, для каждого $\sigma \in \Sigma$ и любого $z_0 \geqslant 0$ имеет место равенство $\lim\limits_{k\to\infty} z_k(\sigma) = 0$. Следовательно, в силу теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных условий $\lim\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma,z_0) = 0$. Второе утверждение леммы доказывается аналогично. □

Напомним, что некоторое свойство выполнено с вероятностью единица, если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и это свойство верно для всех $\sigma \in \Sigma_0$. Далее буквой M будем обозначать математическое ожидание случайной величины.

Теорема 1. 1. *Если имеет место неравенство*

$$M\Big(\ln \sup_{z>0} \frac{H(\omega,z)}{z}\Big) < 0, \tag{2.5}$$

то для любого $z_0 \geqslant 0$ равенство $\lim\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma,z_0) = 0$ выполнено с вероятностью единица.

2. *Если $M\Big(\ln \inf\limits_{z>0} \dfrac{H(\omega,z)}{z}\Big) > 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma,z_0) = +\infty$ для любого $z_0 > 0$ с вероятностью единица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин

$$\{C_k(\sigma)\}_{k=1}^{\infty}, \quad \text{где} \quad C_k(\sigma) = C_k(\omega_k) = \sup_{z>0} \frac{H(\omega_k,z)}{z}.$$

Введем также последовательность $\{S_k(\sigma)\}_{k=0}^{\infty}$, где

$$S_0(\sigma) = 0, \quad S_k(\sigma) = \ln C_1(\sigma) + \ldots + \ln C_k(\sigma),$$

$k = 1,2,\ldots$, которая является случайным блужданием по целочисленным точкам прямой, тогда из неравенства $M(\ln C_k) < 0$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(\sigma) = -\infty$ с вероятностью единица (см. [15, т. 2, с. 449]).

Для каждой точки $z_0 \geqslant 0$ и каждого $\sigma \in \Sigma$ определим последовательность случайных величин $\{y_k(\sigma)\}_{k=0}^{\infty}$, где $y_0(\sigma) = z_0$, $y_k(\sigma) = C_k(\sigma) y_{k-1}$, $k = 1,2,\ldots$. Тогда

$$y_k(\sigma) = C_1(\sigma) C_2(\sigma) \ldots C_k(\sigma) z_0 = e^{S_k(\sigma)} \cdot z_0,$$

следовательно, если $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(\sigma) = -\infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty} y_k(\sigma) = 0$. Последовательность $\{z_k(\sigma)\}_{k=0}^{\infty}$ зададим равенством (2.4). Дальнейшее доказательство аналогично доказательству леммы 2. □

Замечание 1. В силу неравенства Иенсена (см. [13, с. 207]) из неравенства

$$M\Big(\sup_{z>0} \frac{H(\omega,z)}{z}\Big) < 1 \tag{2.6}$$

следует (2.5). Поэтому если имеет место (2.6), то $\lim\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma,z_0) = 0$ с вероятностью единица.

Теорема 2. *Предположим, что существуют множества $\Omega_* \subseteq \Omega$ и $K = (0,\widetilde{z}_1) \cup (\widetilde{z}_2,+\infty)$ такие, что $\mu(\Omega_*) > 0$, $0 < \widetilde{z}_1 \leqslant \widetilde{z}_2$ и*

$$\sup_{(\omega,z)\in Q} \frac{H(\omega,z)}{z} < 1, \quad \text{где} \quad Q = \big(\Omega_* \times (0,\infty)\big) \cup \big((\Omega \setminus \Omega_*) \times K\big). \tag{2.7}$$

Тогда для любого $z_0 \geqslant 0$ равенство $\lim\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma,z_0) = 0$ выполнено с вероятностью единица.

Доказательство. Поскольку $\Omega \times (\widetilde{z}_2, +\infty) \subset Q$, то из (2.7) следует, что

$$\sup_{(\omega,z)\in\Omega\times(\widetilde{z}_2,+\infty)} \frac{H(\omega,z)}{z} \leqslant \sup_{(\omega,z)\in Q} \frac{H(\omega,z)}{z} \doteq a < 1.$$

Рассмотрим последовательность случайных величин $\{z_k(\sigma)\}_{k=0}^{\infty}$, заданную равенством (2.4), и последовательность $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$, где $y_0 = z_0$, $y_k = a^k z_0$, $k = 1, 2, \ldots$. Рассуждая так же, как в лемме 2, получаем, что при $z_k(\sigma) > \widetilde{z}_2$ выполнено неравенство $z_k(\sigma) \leqslant y_k$. Поскольку $y_k \to 0$ при $k \to \infty$, то найдется такое число k_0, что $y_k \leqslant \widetilde{z}_2$ для всех $k \geqslant k_0$. Следовательно, $z_k(\sigma) \leqslant \widetilde{z}_2$ для всех $k \geqslant k_0$ и всех $\sigma \in \Sigma$.

Введем случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots$, полагая $\xi_k(\sigma) = \omega_k$ для $\sigma = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots)$. Рассмотрим события A_k, состоящие в том, что $\xi_k \in \Omega_*$, $k = 1, 2, \ldots$; события A_k назовем успехами, они независимы и имеют одинаковые вероятности $\mu(A_k) = \mu(\Omega_*) > 0$. Обозначим через s такое число, что после последовательного осуществления s успехов $A_{k_0+1}, \ldots, A_{k_0+s}$ будет выполнено неравенство $z_{k_0+s}(\sigma) \leqslant \widetilde{z}_1$. Такое число s существует, поскольку $z_{k_0}(\sigma) \leqslant \widetilde{z}_2$ и если происходят только успехи, последовательность $\{z_k(\sigma)\}_{k=0}^{\infty}$ асимптотически стремится к нулю (это следует из леммы 2). Известно [15, т. 1, с. 338], что с вероятностью единица в бесконечной последовательности испытаний Бернулли появится хотя бы одна серия успехов длиной s. Следовательно, найдутся такое множество $\Sigma_0 \subset \Sigma$ и такой момент времени τ_g, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и $z_g(\sigma) < \widetilde{z}_1$ для всех $\sigma \in \Sigma_0$. Далее, поскольку $\sup\limits_{(\omega,z)\in\Omega\times(0,\widetilde{z}_1)} \dfrac{H(\omega,z)}{z} < 1$, то в силу леммы 2 равенство $\lim\limits_{t\to\infty} z(t, \sigma, z_0) = 0$ верно для любого $z_0 \geqslant 0$ с вероятностью единица. □

Лемма 3. 1. *Пусть $I = [z_*, z^*]$, где $0 < z_* < z^* < +\infty$. Если найдется такое $\varepsilon > 0$, что*

$$\begin{aligned} &H(\omega,z) > z \quad \text{для всех} \quad z \in (z_* - \varepsilon, z_*),\ \omega \in \Omega, \\ &H(\omega,z) < z \quad \text{для всех} \quad z \in (z^*, z^* + \varepsilon),\ \omega \in \Omega, \end{aligned} \tag{2.8}$$

то множество I инвариантно относительно последовательности (2.4)*, то есть если $z_0 \in I$, то $z_k(\sigma) \in I$ для всех $k = 1, 2, \ldots$.*

2. *Если найдутся такие $z_* > 0$ и $\varepsilon > 0$, что $H(\omega,z) > z$ для всех $z \in (z_* - \varepsilon, z_*)$, $\omega \in \Omega$, то множество $I = [z_*, +\infty)$ инвариантно относительно последовательности* (2.4).

3. *Если найдутся такие $z^* > 0$ и $\varepsilon > 0$, что $H(\omega,z) < z$ для всех $z \in (z^*, z^* + \varepsilon)$, $\omega \in \Omega$, то инвариантным множеством относительно* (2.4) *является $I = [0, z^*]$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение, остальные получаются аналогично. Из неравенств (2.8) следует, что $H(\omega, z_*) \geqslant z_*$ и $H(\omega, z^*) \leqslant z^*$ для любого $\omega \in \Omega$. Пусть $z_0 = z_0(\sigma) \in I$. Поскольку функция $z \to H(\omega, z)$ неубывающая, то

$$z_* \leqslant H(\omega_1, z_*) \leqslant H(\omega_1, z_0) \leqslant H(\omega_1, z^*) \leqslant z^*.$$

Следовательно, $z_1(\sigma) = H(\omega_1, z_0) \in I$. Таким же образом получаем, что

$$z_k(\sigma) = H(\omega_k, z_{k-1}(\sigma)) \in I \quad \text{для всех} \quad k = 2, 3, \ldots.$$

□

Отметим, что множество, инвариантное относительно уравнения (2.1), в общем случае несколько шире, чем множество, инвариантное относительно последовательности (2.4). Его несложно найти, зная решения уравнения и применяя лемму 3.

§ 3. Время вырождения популяции и динамические режимы в моделях популяционной динамики

Рассмотрим модель популяции, заданной уравнением (2.1). Предположим, что существует множество $K = (0, \widetilde{z}_1) \cup (\widetilde{z}_2, +\infty)$ такое, что $0 < \widetilde{z}_1 \leqslant \widetilde{z}_2$ и $H(\omega, z) < z$ для всех $\omega \in \Omega$, $z \in K$. Обозначим

$$\widetilde{s}_1 \doteq \sup\{\widetilde{z}_1 > 0 : H(\omega, z) < z \ \text{ для всех } \ \omega \in \Omega,\ z \in (0, \widetilde{z}_1)\},$$
$$\widetilde{s}_2 \doteq \inf\{\widetilde{z}_2 > 0 : H(\omega, z) < z \ \text{ для всех } \ \omega \in \Omega,\ z \in (\widetilde{z}_2, +\infty)\}.$$

В силу леммы 2 $\widetilde{s}_1$ является наибольшим из тех начальных размеров популяции $\widetilde{z}_1$, при которых ее размер асимптотически стремится к нулю, то есть при $z_0 \leqslant \widetilde{s}_1$ дальнейшее восстановление популяции невозможно. Если $z_0 \geqslant \widetilde{s}_2$, то размер популяции также убывает до тех пор, пока не достигнет значения, меньшего $\widetilde{s}_2$. На интервале $(\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2)$ либо будет наблюдаться динамический режим, описанный в теореме 2, то есть с вероятностью единица численность популяции окажется меньше $\widetilde{s}_1$, либо $(\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2)$ будет содержать в себе некоторое инвариантное множество, в котором в дальнейшем находится размер популяции.

Определение 1. Назовем *временем биологического вырождения популяции* (2.1) с начальным размером z_0 случайную величину $T = T(\sigma, z_0)$ такую, что $T(\sigma, z_0) = 0$, если $z_0 \leqslant \widetilde{s}_1$, и $T(\sigma, z_0) = \theta_1 + \ldots + \theta_N$, если $z_0 > \widetilde{s}_1, z_1(\sigma) > \widetilde{s}_1, \ldots, z_{N-1}(\sigma) > \widetilde{s}_1$, $z_N(\sigma) \leqslant \widetilde{s}_1$. Если $z_k(\sigma) > \widetilde{s}_1$ для всех $k = 0, 1, \ldots$, положим $T(\sigma, z_0) = +\infty$.

Временем полного вырождения популяции (2.1) назовем случайную величину $\mathfrak{T}(\sigma, z_0)$ такую, что $z(\mathfrak{T}(\sigma, z_0), \sigma, z_0) = 0$. Очевидно, что $\mathfrak{T}(\sigma, z_0) \geqslant T(\sigma, z_0)$.

Лемма 4. *Предположим, что существуют множества $\Omega_* \subseteq \Omega$ и $K = (0, \widetilde{z}_1) \cup (\widetilde{z}_2, +\infty)$ такие, что $p = \mu(\Omega_*) > 0$, $0 < \widetilde{z}_1 \leqslant \widetilde{z}_2$ и имеет место* (2.7). *Пусть $Z_0 \doteq \widetilde{s}_2$, $Z_k \doteq \sup\limits_{\omega \in \Omega_*} H(\omega, Z_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots$, $r \doteq \min\{k \in \mathbb{N} : Z_k \leqslant \widetilde{s}_1\}$. Тогда если $z_0 \leqslant \widetilde{s}_2$, то для математического ожидания и дисперсии случайной величины $T = T(\sigma, z_0)$ выполнены неравенства*

$$MT \leqslant \frac{1 - p^r}{qp^r} \cdot m_\theta, \quad DT \leqslant \frac{1 - p^r}{qp^r} \cdot D_\theta + \Big(\frac{1}{(qp^r)^2} - \frac{2r+1}{qp^r} - \frac{p}{q^2}\Big) \cdot m_\theta^2, \tag{3.1}$$

где $q = 1 - p$, m_θ и D_θ — математическое ожидание и дисперсия случайных величин $\theta_1, \theta_2, \ldots$.

Доказательство. Рассмотрим независимые события A_k, введенные в теореме 2, для которых $\mu(A_k) = p = \mu(\Omega_*) > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Отметим, что если $z_0 \leqslant \widetilde{s}_2$, то $T(\sigma, z_0) \leqslant T_r(\sigma)$, где $T_r(\sigma) = \theta_1 + \ldots + \theta_{N_r}$, $N_r = N_r(\sigma)$ — номер испытания, при котором появится первая серия успехов (то есть событий A_k) длиной r. Тогда математическое ожидание и дисперсия случайной величины N_r равны [15, т. 1, с. 338]

$$MN_r = \frac{1 - p^r}{qp^r}, \quad DN_r = \frac{1}{(qp^r)^2} - \frac{2r+1}{qp^r} - \frac{p}{q^2}.$$

Вычисляя математическое ожидание и дисперсию по формуле полного математического ожидания, получаем

$$MT_r = \frac{1 - p^r}{qp^r} \cdot m_\theta, \quad DT_r = \frac{1 - p^r}{qp^r} \cdot D_\theta + \Big(\frac{1}{(qp^r)^2} - \frac{2r+1}{qp^r} - \frac{p}{q^2}\Big) \cdot m_\theta^2. \tag{3.2}$$

Поскольку в некоторых моделях множества Ω_* и K можно выбрать различными способами, из (3.2) следуют неравенства (3.1). $\square$

Пример 1. Рассмотрим модель популяции, подверженной промыслу, когда моменты промысловых заготовок и размеры этих заготовок являются случайными величинами. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается уравнением $\dot{z} = z(1-z)$ и в случайные моменты времени τ_k некоторая доля биомассы ψ_k изымается из популяции. Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана уравнением

$$\dot{z} = z(1-z), \quad t \neq \tau_k(\sigma), \quad \Delta z\big|_{t=\tau_k(\sigma)} = -\psi_k z, \quad (t,z) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.3}$$

параметризованным метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$, которая построена аналогично системе из первого раздела. Здесь $\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1$,

$$\Sigma = \{\sigma : \sigma = (\omega_1, \dots, \omega_k, \dots),\, \omega_k = (\theta_k, \psi_k) \in \Omega\}.$$

Сначала предположим, что $\omega = (\vartheta, v)$ фиксировано. В этом случае мы имеем детерминированную модель, для которой существуют два динамических режима развития. Найдем функцию $H(\vartheta, v, z) = \dfrac{ze^{\vartheta}(1-v)}{z(e^{\vartheta}-1)+1}$, заданную равенством (2.3). Если $e^{\vartheta}(1-v) \leqslant 1$, то $H(\vartheta, v, z) < z$ для всех $z > 0$; в этом случае популяция вырождается. Если $e^{\vartheta}(1-v) > 1$, то уравнение $H(\vartheta, v, z) = z$ имеет положительное решение $\widetilde{z} = \dfrac{e^{\vartheta}(1-v)-1}{e^{\vartheta}-1}$ и для любого начального размера популяции $z_0 > 0$ с течением времени размер популяции стремится к $\widetilde{z}$.

Пусть теперь длины интервалов $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ и величины ψ_k, $k = 1, 2, \dots$, независимы и нормально распределены с параметрами $(\overline{\vartheta}, \sigma_{\vartheta})$ и $(\overline{v}, \sigma_v)$ соответственно. Тогда пары случайных величин (θ_k, ψ_k), $k = 1, 2, \dots$, с доверительной вероятностью $P_{\varkappa} = 1 - e^{-\varkappa^2/2}$ находятся внутри эллипса $\dfrac{(\vartheta - \overline{\vartheta})^2}{\sigma_{\vartheta}^2} + \dfrac{(v - \overline{v})^2}{\sigma_v^2} = \varkappa^2$. Параметры распределений предполагаем такими, чтобы доверительный эллипс содержался в множестве $(0, \infty) \times (0, 1)$.

Опишем динамические режимы развития данной популяции. Найдем

$$\sup_{z>0} \frac{H(\vartheta, v, z)}{z} = (1-v)e^{\vartheta}.$$

Случайные величины e^{θ_k} и ψ_k независимы, e^{θ_k} имеет логнормальное распределение с параметрами $(\overline{\vartheta}, \sigma_{\vartheta})$ [14, с. 129], поэтому

$$M\Big(\sup_{z>0} \frac{H(\vartheta, v, z)}{z}\Big) = M(1-\psi_k)e^{\theta_k} = M(1-\psi_k) \cdot Me^{\theta_k} = (1-\overline{v}) \exp\Big(\overline{\vartheta} + \frac{\sigma_{\vartheta}^2}{2}\Big).$$

В силу замечания 2, если $(1-\overline{v}) \exp\Big(\overline{\vartheta} + \frac{\sigma_{\vartheta}^2}{2}\Big) < 1$, популяция (3.3) вырождается с вероятностью единица.

Если $(1-\overline{v}) \exp\Big(\overline{\vartheta} + \frac{\sigma_{\vartheta}^2}{2}\Big) \geqslant 1$, но кривая $v = 1 - e^{-\vartheta}$ пересекает внутренность множества

$$\Omega_{\varkappa} \doteq \Big\{(\vartheta, v) \in \Omega : \frac{(\vartheta - \overline{\vartheta})^2}{\sigma_{\vartheta}^2} + \frac{(v - \overline{v})^2}{\sigma_v^2} \leqslant \varkappa^2\Big\},$$

то в силу леммы 3 множество $I = [0, z^*]$ инвариантно относительно последовательности (2.4) (здесь z^* — наибольшее из решений уравнения $H(\omega, z) = z$ для $\omega \in \Omega_{\varkappa}$). Несложно показать, что

$$z^* < 1 - \frac{v_* e^{\vartheta^*}}{e^{\vartheta^*} - 1}, \quad \text{где} \quad v_* = \overline{v} - \varkappa\sigma_v,\ \vartheta^* = \overline{\vartheta} + \varkappa\sigma_{\vartheta}. \tag{3.4}$$

Множеством, инвариантным относительно уравнения (3.3), является отрезок $\Big[0, \dfrac{z^* e^{\vartheta^*}}{z^*(e^{\vartheta^*}-1)+1}\Big]$.

Последний динамический режим возникает, когда $\Omega_\varkappa$ расположено ниже кривой $v = 1-e^{-\vartheta}$. Здесь инвариантным множеством является множество $I = [z_*, z^*]$, где

$$z_* > 1 - \frac{v^* e^{\vartheta_*}}{e^{\vartheta_*} - 1}, \quad v^* = \overline{v} + \varkappa\sigma_v, \ \vartheta_* = \overline{\vartheta} - \varkappa\sigma_\vartheta;$$

для z^* выполнено неравенство (3.4).

Пример 2. Рассмотрим эксплуатируемую популяцию, из которой в случайные моменты τ_k извлекается случайное количество биомассы ψ_k :

$$\dot{z} = z(1-z), \quad t \neq \tau_k(\sigma), \quad \Delta z\big|_{t=\tau_k(\sigma)} = \ell(\psi_k, z), \quad (t,z) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.5}$$

Здесь динамическая система $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$ та же, что и в первом примере, $\ell(v,z) = -v$, если $z > v$, и $\ell(v,z) = -z$, если $z \leqslant v$.

Сначала предположим, что $\omega = (\vartheta, v)$ фиксировано. Покажем, что для полученной детерминированной модели существует два динамических режима развития. Найдем функцию

$$H(\vartheta, v, z) = \max\Big\{\frac{ze^{\vartheta}}{z(e^{\vartheta}-1)+1} - v, 0\Big\}.$$

В первом случае, когда уравнение $H(\vartheta, v, z) = z$ не имеет положительных решений (то есть при $v > \dfrac{e^{\vartheta/2}-1}{e^{\vartheta/2}+1}$), размер популяции асимптотически стремится к нулю. Второй динамический режим возникает, если уравнение $H(\vartheta, v, z) = z$ имеет одно или два положительных решения, то есть при $v \leqslant \dfrac{e^{\vartheta/2}-1}{e^{\vartheta/2}+1}$. Здесь если начальный размер популяции $z_0 > z_1^* = \dfrac{1}{2}\big(1 - v - \sqrt{D}\big)$, где $D = (1-v)^2 - \dfrac{4v}{e^{\vartheta}-1}$, то с течением времени численность данной популяции стремится к $z_2^* = \dfrac{1}{2}\big(1-v+\sqrt{D}\big)$; если $z_0 = z_1^*$, то размер популяции в моменты времени $t = k\vartheta$, $k = 1, 2, \ldots$, остается постоянным (равным z_1^*); если $z_0 < z_1^*$, то популяция вырождается.

Теперь предположим, что случайные величины $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ и ψ_k, $k = 1, 2, \ldots$ независимы и нормально распределены с параметрами $(\overline{\vartheta}, \sigma_\vartheta)$ и $(\overline{v}, \sigma_v)$ соответственно. Так же, как в первом примере, предполагаем, что доверительный эллипс содержится в множестве $(0,\infty) \times (0,1)$.

Опишем динамические режимы роста популяции, заданной вероятностной моделью (3.5).

1. Пусть уравнение $H(\vartheta, v, z) = z$ не имеет положительных решений для всех $(\vartheta, v) \in \Omega_\varkappa$, то есть множество $\Omega_\varkappa$ расположено выше кривой $v = \widehat{v}(\vartheta) = \dfrac{e^{\vartheta/2}-1}{e^{\vartheta/2}+1}$. Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} z(t, \sigma, z_0) = 0$ для каждого $\sigma \in \Sigma$ и любого $z_0 \geqslant 0$.

2. Предположим, что уравнение $H(\vartheta, v, z) = z$ при различных значениях $(\vartheta, v) \in \Omega_\varkappa$ имеет разное число решений и кривая $v = \widehat{v}(\vartheta)$ пересекает множество $\Omega_\varkappa$. Тогда существуют множества $\Omega_* \subset \Omega_\varkappa$ и $K = (0, \widetilde{z}_1) \cup (\widetilde{z}_2, +\infty)$ такие, что $\mu(\Omega_*) > 0$, $0 < \widetilde{z}_1 \leqslant \widetilde{z}_2$ и выполнено (2.7). В этом случае для любого $z_0 \geqslant 0$ популяция (3.5) вырождается с вероятностью единица. Множеством Ω_* может быть любое подмножество $\Omega_\varkappa$, точки которого удовлетворяют неравенству $v > \widehat{v}(\vartheta)$. Таким множеством является, в частности, множество $\Omega_* = \big\{(\vartheta, v) \in \Omega_\varkappa : v \geqslant v_0\big\}$, где $v_0 = \widehat{v}(\overline{\vartheta} + \varkappa\sigma_\vartheta)$ (поскольку внутри эллипса $\Omega_\varkappa$ отрезок прямой $v = v_0$ расположен выше дуги кривой $v = \widehat{v}(\vartheta)$). Отметим, что

$$\sup_{(\vartheta,v)\in\Omega_\varkappa} H(\vartheta, v, z) < H(\overline{\vartheta} + \varkappa\sigma_\vartheta, \overline{v} - \varkappa\sigma_v, z) \doteq h(z),$$

поэтому для множества $K = (0, \widetilde{z}_1) \cup (\widetilde{z}_2, +\infty)$ в качестве чисел $\widetilde{z}_1$, $\widetilde{z}_2$ можем взять решения уравнения $h(z) = z$.

3. Если уравнение $H(\vartheta, v, z) = z$ имеет положительные решения для всех $(\vartheta, v) \in \Omega_{\varkappa}$, то существует инвариантное относительно уравнения (3.5) множество $I = [z_*, z^*]$, где

$$z_* = \frac{1-v^*}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-v^*)^2 - \frac{4v^*}{e^{\vartheta_*}-1}}, \quad z^* = \frac{1-v_*}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-v_*)^2 - \frac{4v_*}{e^{\vartheta^*}-1}},$$

$\vartheta_* = \overline{\vartheta} - \varkappa\sigma_{\vartheta}$, $\vartheta^* = \overline{\vartheta} + \varkappa\sigma_{\vartheta}$, $v_* = \overline{v} - \varkappa\sigma_v$, $v^* = \overline{v} + \varkappa\sigma_v$.

§ 4. Инвариантные множества управляемой системы со случайными коэффициентами

Исследуются инвариантные множества управляемой системы (1.2), порожденной метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$. Поставим в соответствие системе $\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u)$ дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma, x) = \operatorname{co}\widetilde{F}(\sigma, x), \tag{4.1}$$

где для каждой фиксированной точки $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ множество $\widetilde{F}(\sigma, x)$ состоит из всех предельных значений функции $(t, x) \to f\big(h^t\sigma, x, U\big)$ при $(t_i, x_i) \to (0, x)$. Далее, запись $\operatorname{co}\widetilde{F}(\sigma, x)$ означает замыкание выпуклой оболочки множества $\widetilde{F}(\sigma, x)$. В данной работе рассматриваем дифференциальное включение (4.1), которое имеет компактные образы, то есть предполагаем, что при фиксированных (σ, x) множество $F(\sigma, x)$ выпукло и компактно; также предполагаем, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ функция $(t, x) \to F(h^t\sigma, x)$ полунепрерывна сверху.

Для каждого $\sigma \in \Sigma$ рассмотрим множество $\mathfrak{M}(\sigma) = \{(t, x) : t \geqslant 0,\ x \in M(h^t\sigma)\}$, заданное непрерывной функцией $t \to M(h^t\sigma)$. Введем следующие обозначения:

$$O_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leqslant r\},\ M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0),\ N^r(\sigma) = M^r(\sigma) \setminus M(\sigma);$$

построим множество $\mathfrak{N}^r(\sigma) = \{(t, x) : t \geqslant 0,\ x \in N^r(h^t\sigma)\}$.

Определение 2 (см. [16]). Скалярная функция $x \to V(\sigma, x)$ называется *функцией Ляпунова* (относительно множества $\mathfrak{M}(\sigma)$), если для каждого $\sigma \in \Sigma$ функция $(t, x) \to V(h^t\sigma, x)$ локально липшицева и удовлетворяет следующим условиям:

1) $V(h^t\sigma, x) = 0$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{M}(\sigma)$;

2) $V(h^t\sigma, x) > 0$ для некоторого $r > 0$ и всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r(\sigma)$.

Функция Ляпунова $V(\sigma, x)$ называется *определенно положительной*, если для любого $\varepsilon \in (0, r)$ найдется такое $\delta > 0$, что $V(h^t\sigma, x) > \delta$ для всех

$$(t, x) \notin \mathfrak{M}^{\varepsilon}(\sigma) \doteq \{(t, x) : t \geqslant 0,\ x \in M^{\varepsilon}(h^t\sigma)\}.$$

Определение 3. Для локально липшицевой функции $V(\sigma, x)$ *обобщенной производной* в точке $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $d \in \mathbb{R}^n$ (производной Ф. Кларка [17, с. 17]) называется предел

$$V^o(\sigma, x; d) \doteq \limsup_{(\vartheta, y, \varepsilon) \to (\sigma, x, +0)} \frac{V(h^{\varepsilon}\vartheta, y + \varepsilon d) - V(\vartheta, y)}{\varepsilon},$$

а выражения $V^o_{\min}(\sigma, x) \doteq \inf\limits_{d \in F(\sigma, x)} V^o(\sigma, x; d)$, $V^o_{\max}(\sigma, x) \doteq \sup\limits_{d \in F(\sigma, x)} V^o(\sigma, x; d)$ называются *нижней* и *верхней производными* функции V в силу дифференциального включения (4.1).

Множество $\mathfrak{M}(\sigma)$ называется *положительно инвариантным* относительно системы (1.2), если для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in \mathfrak{M}(\sigma)$ и любого решения $\varphi(t, \sigma, x_0)$ системы (1.2), удовлетворяющего начальному условию $\varphi(t_0, \sigma, x_0) = x_0$, включение $(t, \varphi(t, \sigma, x_0)) \in \mathfrak{M}(\sigma)$ выполнено для всех $t \geqslant t_0$. Следующие утверждения являются обобщением результатов работ [3, 16].

Теорема 3. *Предположим, что существуют функции $V(\sigma, x)$, $q(\sigma, z)$ и $L(\sigma, z)$ такие, что $V(\sigma, x)$ является определенно положительной функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}(\sigma)$ и для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства*

$$V^o_{\max}(\sigma, x) \leqslant q\big(\sigma, V(\sigma, x)\big), \qquad \sup_{\sigma\in\Sigma, w\in W} V\big(\sigma, x + g(\sigma, x)w\big) \leqslant \inf_{\sigma\in\Sigma} L\big(\sigma, V(\sigma, x)\big). \tag{4.2}$$

Тогда если тривиальное решение уравнения (2.1) *устойчиво по Ляпунову, то множество $\mathfrak{M}(\sigma)$ положительно инвариантно относительно системы* (1.2).

Пусть $\varrho(x, M) \doteq \inf\limits_{y\in M} |x - y|$ — расстояние от точки x до множества M в $\mathbb{R}^n$, $z(t, \sigma, z_0)$ — решение уравнения (2.1) с начальным условием $z(t_0, \sigma, z_0) = z_0$.

Теорема 4. *Пусть существуют функции $V(\sigma, x)$, $q(\sigma, z)$ и $L(\sigma, z)$ такие, что $V(\sigma, x)$ является определенно положительной функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}(\sigma)$ и для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ выполнено* (4.2). *Тогда если $\lim\limits_{t\to\infty} z(t, \sigma, z_0) = 0$ с вероятностью единица, то для любого решения $\varphi(t, \sigma, x_0)$ системы* (1.2), *удовлетворяющего начальному условию $\varphi(t_0, \sigma, x_0) = x_0$, где $V(h^{t_0}\sigma, x_0) \leqslant z_0$, равенство $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho\big(\varphi(t, \sigma, x_0), M(h^t\sigma)\big) = 0$ выполнено с вероятностью единица.*

Следствие 1. *Предположим, что существуют функции $V(x)$, $q(\sigma, z)$ и $L(\sigma, z)$ такие, что $V(x)$ является определенно положительной функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M} = \{(t, x) : t \geqslant 0, x = 0\}$ и для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства*

$$V^o_{\max}(\sigma, x) \leqslant q\big(\sigma, V(x)\big), \qquad \sup_{\sigma\in\Sigma, w\in W} V\big(x + g(\sigma, x)w\big) \leqslant \inf_{\sigma\in\Sigma} L\big(\sigma, V(x)\big).$$

Тогда если $\lim\limits_{t\to\infty} z(t, \sigma, z_0) = 0$ с вероятностью единица, то для любого решения $\varphi(t, \sigma, x_0)$ системы (1.2) *такого, что $\varphi(t_0, \sigma, x_0) = x_0$ и $V(h^{t_0}\sigma, x_0) \leqslant z_0$, с вероятностью единица выполнено равенство $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t, \sigma, x_0) = 0$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Родина Л.И. О некоторых вероятностных моделях динамики роста популяций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 109–124.
2. Rodina L.I. About one stochastic model of population dynamics // Population Dynamics: Analysis, Modelling, Forecast. 2014. Vol. 3. № 1. P. 1–15.
3. Rodina L.I. Conditions of invariance and extinction for stochastic model of control population // Population Dynamics: Analysis, Modelling, Forecast. 2014. Vol. 3. № 2. P. 43–54.
4. Недорезов Л.В. Курс лекций по математической экологии. Новосибирск: Сибирский хронограф, 1997. 161 с.
5. Недорезов Л.В., Утюпин Ю.В. Дискретно-непрерывная модель динамики численности двуполой популяции // Сибирский математический журнал. 2003. Т. 44. № 3. С. 650–659.
6. Bainov D.D. Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population // Applied Mathematics and Computation. 1990. Vol. 39. № 1. P. 37–48.
7. Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000. 256 с.
8. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 232 с.
9. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. 384 с.
10. Баранова О.В. О равномерной глобальной управляемости линейной системы со стационарными случайными параметрами // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 11. С. 1843–1850.

11. Мастерков Ю.В., Родина Л.И. Достаточные условия локальной управляемости систем со случайными параметрами для произвольного числа состояний системы // Известия вузов. Математика. 2008. № 3. С. 38–49.
12. Родина Л.И., Хаммади А.Х. Статистические характеристики множества достижимости управляемых систем со случайными коэффициентами // Известия вузов. Математика. 2014. №. 11. С. 50–63.
13. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 580 с.
14. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.
15. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984.
16. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.
17. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.

Поступила в редакцию 20.10.2014

Родина Людмила Ивановна, д.ф.-м.н., заведующая кафедрой математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: box0589@udmnet.ru

L. I. Rodina
On the invariant sets of control systems with random coefficients

Keywords: control systems with random coefficients, dynamical systems, invariant sets, probabilistic models of population dynamics.

MSC: 34A60, 37N35, 49J15, 93B03

This work is devoted to the investigation of invariant sets of control systems with impulse influences that are parameterized by a metric dynamic system. Such systems describe various stochastic models of population dynamics, economy, quantum electronics and mechanics. We obtain the conditions of existence of invariant sets for the attainability set of system as well as conditions of asymptotic approach of system solutions to a given set.

The obtained results are illustrated by examples of population dynamics which is subject to crafts, when the moments of trade preparations and the sizes of these preparations are random variables. For given models we investigate various dynamic modes of development which essentially differ from modes of the deterministic models and better display the processes occurring in real ecological systems. Conditions under which the population size is in the given set and conditions of asymptotic extinction of population with probability equal to one are received; estimations for a mathematical expectation and a dispersion of time of population extinction are also obtained.

REFERENCES

1. Rodina L.I. On some probability models of dynamics of population growth, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 4, pp. 109–124.
2. Rodina L.I. About one stochastic model of population dynamics, *Population Dynamics: Analysis, Modelling, Forecast*, 2014, vol. 3, no. 1, pp. 1–15.
3. Rodina L.I. Conditions of invariance and extinction for stochastic model of control population, *Population Dynamics: Analysis, Modelling, Forecast*, 2014, vol. 3, no. 2, pp. 43–54.
4. Nedorezov L.V. *Kurs lektsii po matematicheskoi ekologii* (Course of lectures on mathematical ecology), Novosibirsk: Sibirskii khronograf, 1997, 161 p.
5. Nedorezov L.V., Utyupin Yu.V. A discrete-continuous model for a bisexual population dynamics, *Siberian Mathematical Journal*, 2003, vol. 44, no. 3, pp. 511–518.
6. Bainov D.D. Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population, *Applied Mathematics and Computation*, 1990, vol. 39, no. 1, pp. 37–48.

7. Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. *Optimal'noe impul'snoe upravlenie s prilozheniyami* (Optimal impulse control with applications), Moscow: Fizmatlit, 2000, 256 p.

8. Riznichenko G.Yu. *Lektsii po matematicheskim modelyam v biologii. Chast' 1* (Lectures on mathematical models in biology. Part 1), Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2002, 232 p.

9. Kornfel'd I.P., Sinai Ya.G., Fomin S.V. *Ergodicheskaya teoriya* (The ergodic theory), Moscow: Nauka, 1980, 384 p.

10. Baranova O.V. Uniform global controllability of a linear system with stationary random parameters, *Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 11, pp. 1289–1295.

11. Masterkov Yu.V., Rodina L.I. Sufficient conditions for the local controllability of systems with random parameters for an arbitrary number of system states, *Russian Mathematics*, 2008, vol. 52, no. 3, pp. 34–44.

12. Rodina L.I., Khammadi A.Kh. Statistical characteristics of attainability set of controllable systems with random coefficients, *Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, issue 11, pp. 43–53.

13. Shiryaev A.N. *Veroyatnost'* (Probability), Moscow: Nauka, 1989, 580 p.

14. Korolyuk V.S., Portenko N.I., Skorokhod A.V., Turbin A.F. *Spravochnik po teorii veroyatnostei i matematicheskoi statistike* (Handbook of probability theory and mathematical statistics), Moscow: Nauka, 1985, 640 p.

15. Feller W. *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley, 1971. Translated under the title *Vvedenie v teoriyu veroyatnostei i ee prilozheniya*, Moscow: Mir, 1984.

16. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Invariant and stably invariant sets for differential inclusions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 262, issue 1, pp. 194–212.

17. Clarke F. *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley, 1983. Translated under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow: Nauka, 1988, 300 p.

Received 20.10.2014

Rodina Lyudmila Ivanovna, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: box0589@udmnet.ru