

УДК 532.5.032

© В. В. Пак

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ МНОГОКОЛЬЦЕВОЙ СТРУКТУРЫ В ПОЛЗУЩЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ДВУХСЛОЙНОМ ТЕЧЕНИИ С ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНОЙ СЛОЕВ И НЕКОТОРЫЕ ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ¹

Предлагается осесимметрическая модель, построенная на основе уравнений Стокса, для исследования образования многокольцевой структуры в ползущем двухслойном течении с переменной толщиной слоев. Каждый слой имеет постоянную плотность и вязкость. Верхний слой имеет меньшую плотность, чем нижний. Течение создается рельефом поверхности и границы раздела слоев. Предполагается, что эффекты поверхностного натяжения пренебрежимо малы. Мы используем асимптотический метод многих масштабов для получения уравнений, описывающих неустойчивость, возникающую в виде волны в этом течении. С помощью преобразований Фурье и Лапласа мы исследуем уравнения главного приближения для этой неустойчивости в предположении малости возмущений. Асимптотическое исследование показывает, что эта неустойчивость проявляется в виде осесимметричной волны, длина которой соизмерима с толщиной слоев, и толщины слоев играют главную роль в пространственном распределении ее экстремумов. Остальные параметры модели влияют в основном на амплитуду волны. Получено уравнение, связывающее толщины слоев с распределением экстремумов, которое применяется для исследования закономерности расположения кольцевых хребтов, наблюдаемой для большинства крупномасштабных кольцевых структур на Луне. Используя параметры некоторых лунных кольцевых структур, мы определили радиусы последовательно расположенных экстремумов неустойчивости и провели сравнение модельных результатов с радиусами концентрических хребтов некоторых многокольцевых структур на Луне.

Ключевые слова: многослойное ползущее течение, уравнения Стокса, метод многих масштабов, неустойчивость при малых числах Рейнольдса, кольцевые структуры.

Введение

Модели многослойных течений широко используются во многих приложениях: технике, геофизике и т. д. Однако в настоящее время исследование слоистых течений со свободной границей остается важной и далеко не изученной проблемой механики жидкости [6, 8, 9, 11].

Согласно [5, 9, 11] в двухслойном течении вязкой жидкости по наклонной плоскости может возникать неустойчивость из-за взаимодействия между свободной поверхностью и границей раздела слоев, даже если число Рейнольдса стремится к нулю. Так как в этом случае инерционные эффекты пренебрежимо малы, неустойчивость называют *безынерционной* (inertialless). Эта неустойчивость проявляется в виде волны, длина которой соизмерима с толщиной слоев. Достаточные условия для возникновения безынерционной неустойчивости заключаются в том, что отношение вязкостей верхнего и нижнего слоев должно быть больше 1 и отношение плотностей верхнего и нижнего слоев должно превышать некоторое пороговое значение. Этот порог зависит главным образом от угла наклона плоскости [8].

Во всех предыдущих исследованиях [8, 9, 11] невозмущенные границы слоев предполагались плоскими, так что оба слоя имели равномерную толщину. Это предположение справедливо для большинства технических приложений, например покрытия, грунтовок и т. д. Однако в геофизике мощности слоев могут изменяться значительно. Как показано при моделировании ледников [11], эту характеристику нужно обязательно принимать в расчет, так как неоднородность

¹Работа выполнена при поддержке Дальневосточного отделения РАН (проект 09-III-A-07-317).

толщины может вызывать возмущения в течении. Однако анализ течения с изменяющимися границами является значительно более сложным.

В данной работе мы исследуем медленное двухслойное течение вязкой жидкости с переменной толщиной слоев с помощью метода многих масштабов [16]. Мы применяем полученные результаты для исследования закономерности распределения концентрических хребтов крупномасштабных многокольцевых структур на Луне. Согласно анализу большого числа кольцевых структур (подробности см. в [17]) отношение радиусов смежных кольцевых хребтов варьирует в одном и том же интервале $(2.0 \pm 0.3)^{0.5}$ для большинства крупномасштабных кольцевых структур трех планет земной группы: Луны, Меркурия и Марса, независимо от структуры и состава их коры (см. рис. 1).

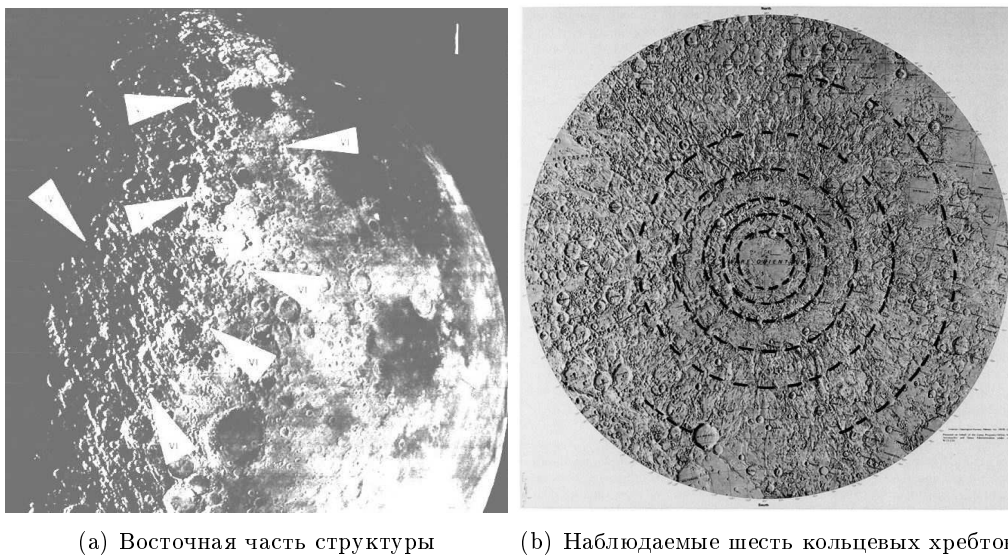


Рис. 1. Кольцевая структура Orientale на Луне, взятая из [17]

Большинство теоретических и численных исследований [24] посвящено изучению образования хребтов на начальной стадии формирования кратера. Уравнения мелкой и глубокой воды, полученные на основе уравнений Эйлера, были использованы для моделирования образования многокольцевой структуры в результате распространения бегущей волны, вызванной начальной деформацией поверхности или затухающим периодическим давлением [4, 5, 20]. Сравнение с наблюдаемыми данными показало, что эти модели подходят только для области внутри бортов кратера. Другой подход к этой проблеме представлен в [3], где были использованы стоячие волны, производимые вибрацией Луны.

Однако существует и более глубинное течение под кратером, вызванное рельефом поверхности и, так называемой Мохо (то есть границей «кора–мантия»), которое продолжается длительное время после того, как начальный кратер был образован, все избыточные напряжения срелаксированы и восстановлена вязкая реология материала. Это течение возникает из-за подъема Мохо и восстановления основания кратера [23, 24]. Согласно геофизическим данным [13, 22], вязкость мантии намного меньше, чем у коры, и отношение плотностей «кора/мантия» примерно равно 0.9. Так как угол наклона рельефа поверхности, который оценивается характерным отношением «глубина/диаметр кратера», изменяется в пределах 0.02–0.2 [23, 24], отношение плотностей превышает пороговое значение, полученное в [8]. Следовательно, можно предположить, что безынерционная неустойчивость здесь может действительно возникнуть.

Данная статья построена следующим образом. В параграфе 1 получена осесимметричная система уравнений для медленного двухслойного течения вязкой жидкости на основе уравнений Стокса. В параграфе 2 с использованием метода многих масштабов получены уравнения для описания возмущений в течении с конечной длиной волны. В параграфе 3 мы анализируем

наиболее быстро растущую компоненту неустойчивой волны. В параграфе 4, используя типичные параметры лунных многокольцевых структур, мы вычисляем радиусы кольцевых хребтов неустойчивости и сравниваем их с наблюдаемыми данными для крупномасштабных кольцевых структур на Луне. Полученные результаты обсуждаются в параграфе 5.

§ 1. Система уравнений

Рассмотрим вязкую жидкость, состоящую из двух слоев (обозначены индексами $i = 1, 2$), которые ограничены поверхностями раздела $z_i, i = \overline{1, 3}$. Таким образом, верхний и нижний слои заключены соответственно в пределах границ $z_2 < z < z_1$ и $z_3 < z < z_2$. Общая схема модели показана на рисунке 2. Медленное течение создается рельефом поверхности z_1 и границы раздела слоев z_2 .

При рассмотрении осесимметричного течения в слоях мы вводим цилиндрические координаты (r, φ, z) , где r, φ и z — это соответственно радиальная, азимутальная и вертикальная координаты. Пусть начало координат совпадает с пересечением вертикальной оси и нижней границей z_3 . Из-за осевой симметрии предполагается, что все переменные не зависят от φ . Для описания вязкого течения в слоях мы использовали уравнения Стокса в цилиндрических координатах

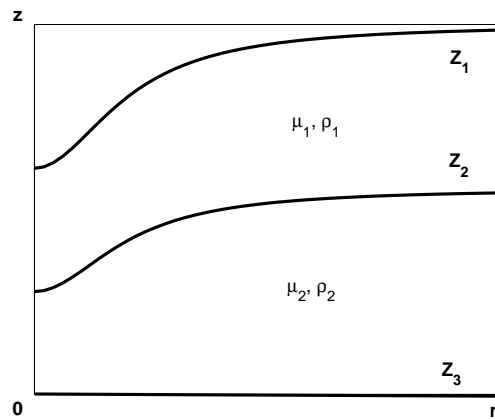


Рис. 2. Общая схема модели двухслойной жидкости

Пусть L — это горизонтальный размер кратера кольцевой структуры, ϵ — малый параметр, равный удвоенному отношению глубины и диаметра кратера. Предположим, что $\rho_i, \mu_i, i = \overline{1, 2}$ — это соответственно плотности и вязкости, постоянные внутри каждого слоя; u, w — r - и z -компоненты скорости; p — давление; g — ускорение силы тяжести.

Приведем уравнения Стокса и граничные условия в цилиндрических координатах к безразмерному виду путем введения новых переменных:

$$\begin{aligned} r &= \epsilon R \bar{r}, & z &= \epsilon R \bar{z}, & \mu_i &= \mu_0 \bar{\mu}_i, & \rho_i &= \rho_0 \bar{\rho}_i, \\ u &= u_0 \bar{u}, & w &= u_0 \bar{w}, & p &= p \bar{p}, & t &= t_0 \bar{t}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где ρ_0, μ_0, p_0, u_0 и t_0 — характерные масштабы плотности, вязкости, давления, скорости и времени соответственно. Пусть $\rho_0 = \rho_1, \mu_0 = \mu_1, t_0 = R/u_0$. Предположим, что $\bar{\rho}_2 = 1 + \epsilon \Delta \rho \delta_{1i}$, где $\Delta \rho \sim 1$.

Исходя из предположения, что компоненты девиатора тензора напряжений по величине много меньше давления, определим масштабы давления и скорости следующим образом:

$$p_0 = \rho_1 g \epsilon R, \quad u_0 = \frac{\epsilon^3 \rho_1 g R^2}{\mu_1}.$$

Подставляя (1.1) в уравнения Стокса и граничные условия и отбрасывая в дальнейшем для удобства надчеркивания, получим уравнения

$$\begin{aligned} -p_{,r} + \epsilon \mu_i \left(u_{,rr} + \frac{u_{,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} + u_{,zz} \right) &= 0, \\ -p_{,z} + \epsilon \mu_i \left(w_{,rr} + \frac{w_{,r}}{r} + w_{,zz} \right) - (1 + \epsilon \Delta \rho) g &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

с условием несжимаемости

$$u_{,r} + \frac{u}{r} + w_{,z} = 0. \quad (1.3)$$

Для замыкания системы (1.2)–(1.3) поставим на границе расчетной области следующие условия.

1. На верхней границе зададим условие свободной поверхности, то есть отсутствия внешних напряжений:

$$\begin{aligned} \left((-p + 2\epsilon \mu_i u_{,r}) n_{ri} + \epsilon \mu_i (u_{,z} + w_{,r}) n_{zi} \right) \Big|_{z=z_1} &= 0, \\ \left(\epsilon \mu_i (w_{,r} + u_{,z}) n_{ri} + (-p + 2\epsilon \mu_i w_{,z}) n_{zi} \right) \Big|_{z=z_1} &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где n_{ri} , n_{zi} — компоненты нормали к границе z_i :

$$n_{ri} = -\frac{z_{i,r}}{\sqrt{1 + z_{i,r}^2}}, \quad n_{zi} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_{i,r}^2}}. \quad (1.5)$$

2. На границе между слоями — условия непрерывности напряжений и скоростей:

$$\begin{aligned} u \Big|_{z_2-0}^{z_2+0} = 0, \quad w \Big|_{z_2-0}^{z_2+0} = 0, \\ \left((-p + 2\epsilon \mu_i u_{,r}) n_{ri} + \epsilon \mu_i (u_{,z} + w_{,r}) n_{zi} \right) \Big|_{z_2-0}^{z_2+0} = 0, \\ \left(\epsilon \mu_i (w_{,r} + u_{,z}) n_{ri} + (-p + 2\epsilon \mu_i w_{,z}) n_{zi} \right) \Big|_{z_2-0}^{z_2+0} = 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $F \Big|_{z_2-0}^{z_2+0}$ — это скачок функции F в точке $z = z_2$:

$$F \Big|_{z_2-0}^{z_2+0} = F \Big|_{z=z_2+0} - F \Big|_{z=z_2-0}.$$

3. На нижней границе $z = z_3$ мы задаем условия жесткого контакта:

$$u \Big|_{z=z_3} = 0, \quad w \Big|_{z=z_3} = 0. \quad (1.7)$$

Кроме этого, определим кинематическое условие отсутствия перетока массы через подвижные границы z_1 и z_2 , которое имеет вид

$$w \Big|_{z=z_i} - z_{i,r} u \Big|_{z=z_i} - z_{i,t} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.8)$$

§ 2. Метод многих масштабов

Для анализа полученных уравнений (1.2)–(1.8) мы используем обобщенный метод многих масштабов (см. [16]). Предположим, что p , u , w , z_1 и z_2 явно зависят от следующих координат:

$$\xi = \epsilon r, \quad \eta = \frac{1}{\epsilon} \theta(\xi), \quad \vartheta = t, \quad \tau = \epsilon t, \quad (2.1)$$

а также от самой ϵ . Определим θ таким образом, чтобы $\theta(0) = 0$.

Пусть

$$p = P + \epsilon p', \quad u = U + \epsilon u', \quad w = W + \epsilon w', \quad z = Z + \epsilon z', \quad (2.2)$$

где P, U, W, Z не зависят от η .

Предположим, что существует асимптотическое представление давления, скоростей и подвижных границ расчетной области. Например, разложения для U и u' по ϵ имеют вид

$$\begin{aligned} U &= U_0(\xi, z, \vartheta, \tau) + \epsilon U_1(\xi, z, \vartheta, \tau) + \dots, \\ u' &= u'_1(\xi, \eta, z, \vartheta, \tau) + \epsilon u'_2(\xi, \eta, z, \vartheta, \tau) + \dots \end{aligned} \tag{2.3}$$

Коэффициенты асимптотических разложений удовлетворяют условиям

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} < \infty, \quad \frac{u'_n}{u'_{n-1}} < \infty \tag{2.4}$$

равномерно по ξ и η . Эти условия являются математическим выражением регулярности разложений (2.3) во всей расчетной области.

Подставляя (2.3) и (2.2) в (1.2)–(1.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , получим последовательность уравнений для определения коэффициентов разложения p_n, u_n, w_n и z_{in} .

Система уравнений нулевого приближения для P, W и Z_i имеет вид

$$\begin{aligned} W_{0,z} &= 0, & P_{0,z} &= -1, \\ W_0 \Big|_{Z_{20}-0}^{Z_{20}+0} &= 0, \quad W_0 \Big|_{z=Z_{30}} = 0, & P_0 \Big|_{z=Z_{10}} &= 0, \quad P_0 \Big|_{Z_{20}-0}^{Z_{20}+0} = 0. \\ W_0 \Big|_{z=Z_{i0}} - Z_{i,\vartheta} &= 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Решая (2.5), получим

$$\overline{W_0} = 0, \quad P_0 = Z_{10} - z. \tag{2.6}$$

Следовательно, Z_{10} , а также P_0 независимы от ϑ .

Система уравнений нулевого приближения для U_1 является системой уравнений смазки (см. [6, 12]):

$$\begin{aligned} P_{0,\xi} &= U_{0,zz}, & U_0 \Big|_{Z_{20}-0}^{Z_{20}+0} &= 0, \\ (\mu_1 U_{0,z}) \Big|_{z=Z_{10}} &= 0, & (\mu U_{0,z}) \Big|_{Z_{20}-0}^{Z_{20}+0} &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Решение (2.7) имеет вид

$$\begin{aligned} U_0 &= -Z_{10,\xi} \left[\frac{(Z_{20} + 2Z_{10} - 3Z_{30})(Z_{20} - Z_{30})}{2\mu_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(z - Z_{20} + Z_{30})(2Z_{10} + Z_{20} - 3Z_{30} - z)}{2\mu_1} \right] \end{aligned} \tag{2.8}$$

в верхнем слое и

$$U_0 = -Z_{10,\xi} \frac{z(2Z_{10} - 2Z_{30} - z)}{2\mu_2} \tag{2.9}$$

в нижнем слое. Нетрудно видеть, что U_0 также не зависит от ϑ .

Подставляя (2.8)–(2.9) в асимптотические разложения и используя условие несжимаемости (1.3), получим систему уравнений для эволюции Z_{10} :

$$Z_{10,\tau} = \frac{1}{\xi} \left(\xi a Z_{j0,\xi} \right)_{,\xi} \tag{2.10}$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{3} (Z_{10} - Z_{20})^2 (Z_{10} - Z_{20}) + \frac{1}{\mu_{20}} [(Z_{10} - Z_{20})^2 (Z_{20} - Z_{30}) + \\ &\quad + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})^2 + \frac{1}{3} (Z_{20} - Z_{30})^3]. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Для упрощения дальнейшего анализа произведем замену переменных $z, \eta, \vartheta, p', z'_i$ на $\zeta, \beta, \alpha, p'', \zeta'_i$ следующим образом:

$$z = H \zeta + Z_{30}, \quad \eta = \theta_{,\xi} H \beta, \quad \vartheta = H \alpha, \quad z'_i = H \zeta'_i, \quad p' = \frac{p''}{H}, \quad (2.12)$$

где $H = Z_{10} - Z_{30}$. Таким образом, мы исключаем переменную $\theta_{,\xi}$ и преобразуем расчетную область в полосу *единичной толщины* $0 \leq \zeta \leq 1$.

Система уравнений относительно p''_0 имеет вид

$$\begin{aligned} p''_{1,\beta} &= 0, & p''_{1,\zeta} &= 0, \\ -p''_1|_{\zeta=1} + \zeta'_1 &= 0, \\ p''_1|_{\zeta_{20}-0}^{\zeta_{20}+0} &= 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $\zeta'_i = \frac{z'_i}{H}$ и $\zeta_{20} = \frac{Z_{20} - Z_{30}}{H}$.

Решая (2.13), получим

$$p''_1 = 0, \quad \zeta'_1 = 0. \quad (2.14)$$

Подставляя (2.14) в кинематическое условие (1.8), мы получим

$$w'_1|_{\zeta=1} = 0. \quad (2.15)$$

Система уравнений второго приближения имеет вид

$$\begin{aligned} -p''_{2,\beta} + \mu_i (u'_{1,\beta\beta} + u'_{1,\zeta\zeta}) &= 0, \\ -p''_{2,z} + \mu_i (w'_{1,\beta\beta} + w'_{1,\zeta\zeta}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$u'_{1,\beta} + w'_{1,\zeta} = 0. \quad (2.17)$$

На подвижной поверхности и границе раздела слоев ($z_i, i = \overline{1,2}$) разложим в ряд Тейлора граничные условия относительно Z_{i0} и линеаризуем их по ϵ . Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} (\mu_1 (U_{0,\zeta\zeta} \zeta'_{11} + u'_{1,\zeta} + w'_{1,\beta}))|_{\zeta=1} &= 0, \\ (2 \mu_1 (u'_{1,\beta} + w'_{1,\zeta}) - p''_2)|_{\zeta=1} &= 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} (u'_1 + U_{0,\zeta} \zeta'_{21})|_{\zeta_{20}-0}^{\zeta_{20}+0} &= 0, & w'_1|_{\zeta_{20}-0}^{\zeta_{20}+0} &= 0, \\ (\mu_i (U_{0,\zeta\zeta} \zeta'_{21} + u'_{1,\zeta} + w'_{1,\beta}))|_{\zeta_{20}-0}^{\zeta_{20}+0} &= 0, \\ (2 \mu_i (u'_{1,\beta} + w'_{1,\zeta}) + \Delta \rho \zeta'_{21} - p''_2)|_{\zeta_{20}-0}^{\zeta_{20}+0} &= 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$u'_1|_{\zeta=0} = 0, \quad w'_1|_{\zeta=0} = 0, \quad (2.20)$$

$$w'_1|_{\zeta=\zeta_{20}} - \zeta'_{21,\beta} U_0|_{\zeta=\zeta_{20}} - \zeta'_{21,\alpha} = 0. \quad (2.21)$$

§ 3. Анализ системы уравнений

Согласно [8, 11], для анализа уравнений (2.16)–(2.21) мы используем преобразование Фурье. Каждая искомая переменная представляется в виде интеграла, например w'_1 :

$$w'_1 = \int_0^{+\infty} \widehat{w}(\xi, k, z, \tau, \lambda) \exp(\lambda \alpha + \imath k \beta) dk, \quad (3.1)$$

где k и λ — это соответственно безразмерные волновое число и инкремент.

Подставляя (3.1) в (2.15)–(2.21) и исключая переменные \widehat{p}_2 , \widehat{u}_1 , $\widehat{\zeta}_1$ и $\widehat{\zeta}_2$, получим уравнение

$$(D^2 - k^2)^2 \widehat{w}_1 = 0, \quad (3.2)$$

где D — это дифференциальный оператор $\frac{d}{d\zeta}$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} (\mu_1 (-D^2 - k^2) \widehat{w}_1) \Big|_{\zeta=1} &= 0, \\ \widehat{w}_1 \Big|_{\zeta=1} &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{D \widehat{w}_1}{\imath k} + \frac{\imath k U_{0,\zeta}}{\imath k U_0 + \lambda} \right) \Big|_{\zeta_{20}-0}^{\zeta_{20}+0} &= 0, \\ \widehat{w}_1 \Big|_{\zeta_{20}-0}^{\zeta_{20}+0} &= 0, \\ \left(\frac{\imath k U_{0,\zeta\zeta}}{\imath k U_0 + \lambda} - \mu_i (D^2 - k^2) \widehat{w}_1 \right) \Big|_{\zeta_{20}-0}^{\zeta_{20}+0} &= 0, \\ \left(-\mu_1 (D^2 - 3k^2) D \widehat{w}_{1,\zeta} + \frac{\Delta \rho_2 \widehat{w}_1}{\imath k U_0 + \lambda} \right) \Big|_{\zeta_{20}-0}^{\zeta_{20}+0} &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$D \widehat{w}_1 \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad \widehat{w}_1 \Big|_{\zeta=0} = 0. \quad (3.5)$$

Мы можем получить общее решение уравнения (3.2) в обоих слоях в виде линейной комбинации гиперболических функций:

$$\widehat{w}_1 = C_{i1} \cosh k \zeta + C_{i2} \sinh k \zeta + C_{i3} k \zeta \cosh k \zeta + C_{i4} k \zeta \sinh k \zeta, \quad (3.6)$$

где C_{ij} — произвольные функции, зависящие от ξ и τ .

Чтобы определить инкремент λ , подставим (3.6) в (3.3)–(3.5) и в результате получим линейную систему уравнений относительно C_{ij} . Определитель матрицы коэффициентов этой системы D — это квадратичный полином от λ , так как степень этого полинома равна числу слоев жидкости. Очевидно, что эта система уравнений имеет нетривиальное решение только в случае, когда выполняется следующее дисперсионное соотношение:

$$D(\lambda) = 0. \quad (3.7)$$

Пусть λ_1 и λ_2 — это комплексные корни уравнения (3.7). Тогда (3.1) может быть определена в следующей интегральной форме, например для w'_1 :

$$w'_1 = \int_0^{+\infty} \widehat{w}_1(\xi, k, z, \tau, \lambda) \exp(\lambda \alpha + \imath k \eta) dk. \quad (3.8)$$

Двухслойное течение является неустойчивым, если один из корней λ_i имеет положительную вещественную часть. Обозначим через k_{\max} и λ_{\max} соответственно волновое число и инкремент

наиболее быстро растущего решения. Согласно [8, 11] величина k_{\max} определяется главным образом отношением толщин слоев (верхний слой/нижний слой), тогда как наклон границ слоев, их вязкости и плотности не оказывают существенного влияния на k_{\max} .

Определим главный член быстро растущего решения (3.8) на больших временах, используя метод Лапласа [2].

$$\begin{aligned} u'_1 &\approx A \widehat{u}_1^{\max} \exp \frac{\lambda_{\max}^R \vartheta}{H} \exp i \left(\frac{\lambda_i^I \vartheta}{H} + \frac{k_{\max} \eta}{\theta_{,\xi} H} \right), \\ w'_1 &\approx A \widehat{w}_1^{\max} \exp \frac{\lambda_{\max}^R \vartheta}{H} \exp i \left(\frac{\lambda_i^I \vartheta}{H} + \frac{k_{\max} \eta}{\theta_{,\xi} H} \right), \\ p''_2 &\approx A \widehat{p}_2^{\max} \exp \frac{\lambda_{\max}^R \vartheta}{H} \exp i \left(\frac{\lambda_i^I \vartheta}{H} + \frac{k_{\max} \eta}{\theta_{,\xi} H} \right), \\ \zeta'_{i1} &\approx A \widehat{\zeta}_{i1}^{\max} \exp \frac{\lambda_{\max}^R \vartheta}{H} \exp i \left(\frac{\lambda_i^I \vartheta}{H} + \frac{k_{\max} \eta}{\theta_{,\xi} H} \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $A = \sqrt{-\frac{2\pi}{t \lambda_{,kk}(k_{\max})}}$; надстрочные индексы R и I обозначают вещественную и мнимую части комплексной экспоненты; \widehat{u}_1^{\max} , \widehat{w}_1^{\max} , \widehat{p}_2^{\max} и $\widehat{\zeta}_{i1}^{\max}$ — это соответственно значения \widehat{u}_1 , \widehat{w}_1 , \widehat{p}_2 и $\widehat{\zeta}_{i1}$ при $k = k_{\max}$ и $\lambda = \lambda_{\max}$.

Для нахождения θ рассмотрим уравнения следующего приближения для u' , w' , p' :

$$\begin{aligned} \mu_i \left(\frac{1}{\xi} u'_{1,\eta} \theta_{,\xi} + u'_{1,\eta} \theta_{,\xi\xi} + 2 u'_{1,\xi\eta} \theta_{,\xi} + u'_{2,zz} + u'_{2,\eta\eta} \theta_{,\xi}^2 \right) + \\ + p'_{2,\xi} + p'_{3,\eta} \theta_{,\xi} = 0, \\ \mu_i \left(\frac{1}{\xi} w'_{1,\eta} \theta_{,\xi} + w'_{1,\eta} \theta_{,\xi\xi} + 2 w'_{1,\xi\eta} \theta_{,\xi} + w'_{2,zz} + w'_{2,\eta\eta} \theta_{,\xi}^2 \right) + \\ + p'_{3,z} = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Легко видеть, что частные производные $u'_{1,\xi\eta}$, а также $p'_{2,\xi}$, $w'_{1,\xi\eta}$ в (3.10) содержат члены, имеющие в качестве множителя $\left(\frac{k_{\max}}{\theta_{,\xi} H} \right)_{,\xi}$. Этот множитель должен быть приравнен нулю, так как в противном случае это приводит к частным решениям, которые нарушают условия регулярности (2.4) [16]: $\left(\frac{k_{\max}}{\theta_{,\xi} H} \right)_{,\xi} = 0$. Интегрируя это уравнение по ξ , получим

$$\theta = \frac{1}{G} \int_0^{\epsilon r} \frac{k_{\max}(\xi)}{H(\xi)} d\xi, \quad (3.11)$$

где G — константа.

Наконец, подставляя (3.11) вместо θ в (3.9), получим, что волновое число максимально растущего решения, например для z'_{11} , равно

$$u'_1 \approx A \widehat{u}_1^{\max} \exp \frac{\lambda_{\max}^R(\xi) \vartheta}{H(\xi)} \exp i \left(\frac{\lambda_i^I(\xi) \vartheta}{H(\xi)} + \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon r} \frac{k_{\max}(\xi)}{H(\xi)} d\xi \right). \quad (3.12)$$

§ 4. Модельные расчеты распределения концентрических хребтов кольцевых структур на Луне

В этом параграфе мы применяем полученное решение (3.9)–(3.11) к моделированию распределения хребтов некоторых крупномасштабных кольцевых структур на Луне.

В работах [11] и [10] сделана попытка моделирования деформации ледников на основе анализа устойчивости двухслойного течения на наклонной плоскости с однородной плотностью и

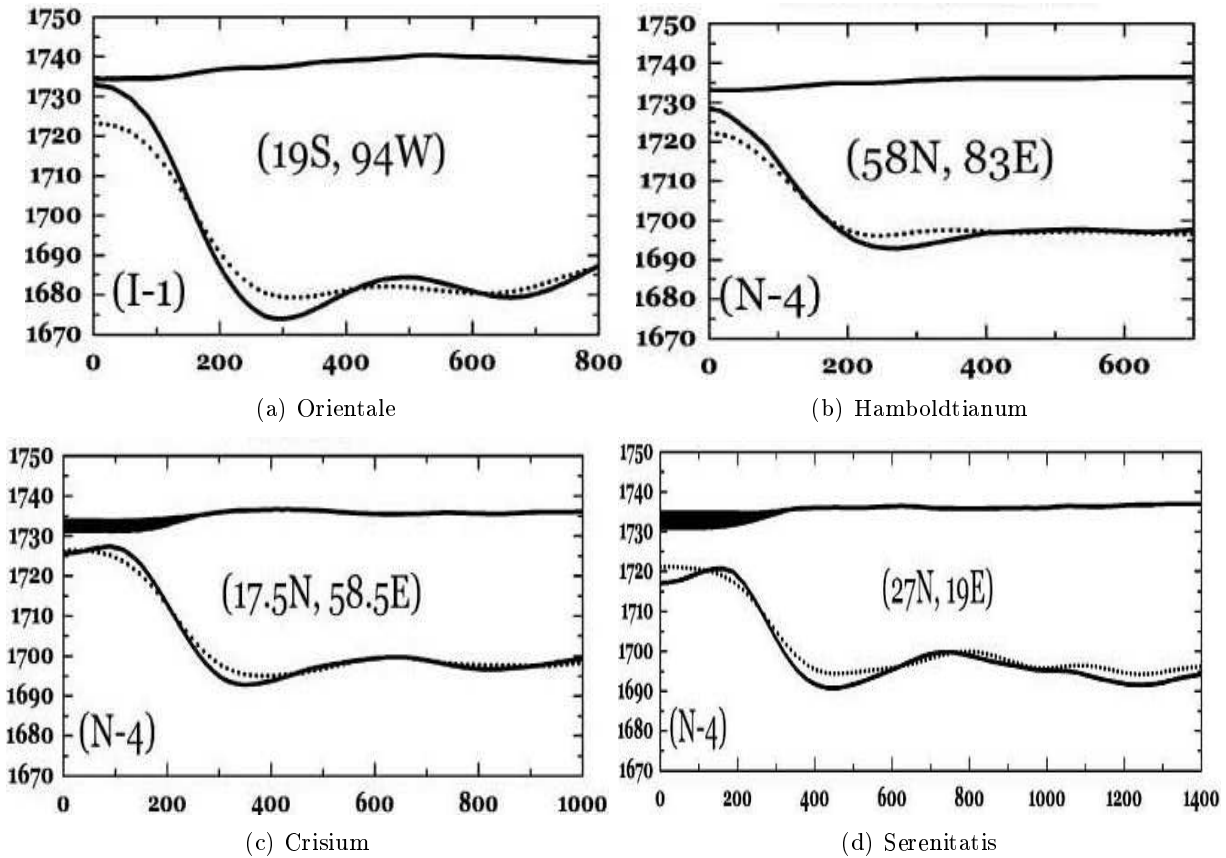


Рис. 3. Усредненные по азимутальной координате профили мощностей коры некоторых кольцевых структур на Луне, взятые из [7]. На вертикальной координате показаны расстояния от центра Луны в км, на горизонтальной — расстояния от центра симметрии кольцевой структуры в км

постоянной толщиной слоев. Согласно экспериментальным наблюдениям на поверхности ледников существуют поперечные хребты с почти периодическим распределением. Исходя из этого, предполагалось, что образование этих хребтов связано с безынерционной неустойчивостью. Однако было также замечено, что на их рост и пространственное распределение влияют как изменения наклона основания ледника, так и толщины слоев, которые нужно принять в расчет при моделировании формирования этих хребтов.

Мы использовали данные по топографии поверхности из [13] и рельефа границы раздела «кора–мантия», полученные с помощью гравитационной интерпретации методом многогранников, взятые из работы [7]. Как показано на рисунке 3, толщина верхнего слоя (то есть коры) значительно изменяется от 3 до 70 км, поэтому модель с однородной толщиной слоев, упомянутая выше, не применима. Согласно модели сейсмических скоростей (см. [15]) мантия Луны состоит из трех зон с постоянной сейсмической скоростью с резкими скачками на границах на глубине 270 и 500 км. Поэтому мы задаем нижнюю границу расчетной области на глубине 270–300 км. Значения параметров модели из [1, 13] представлены в таблицах 1–2.

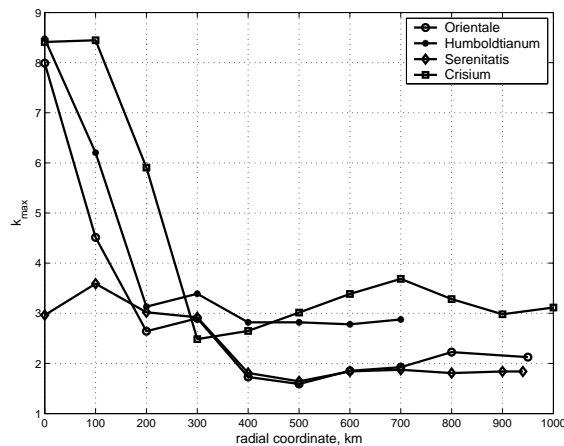
Графики k_{\max} , λ_{\max}^R и λ_{\max}^I , как функции от ξ для кольцевых структур на Луне показаны на рисунках 4–5.

Легко видеть, что этим величины имеют следующие особенности.

- (1) Так как функция k_{\max} в среднем убывающая для большинства кольцевых структур, наиболее быстро растущая волна имеет возрастающее от центра распределение максимумов, а не периодическое.
- (2) Для любой структуры (кроме Serenitatis) величина λ_{\max}^R имеет максимум в районе так

Таблица 1. Параметры модели

Наименование	Обозначение	Значение
Толщина коры	H_c	~ 50 км
Толщина мантии	H_p	$\sim 250\text{--}280$ км
Отношение «глубина/диаметр»	κ	$\sim 0.01\text{--}0.1$
Ускорение силы тяжести	g	1.62 м/с ²
Плотность коры	ρ_1	2800 кг/м ³
Плотность мантии	ρ_2	3300 кг/м ³
Вязкость коры	μ_1	10^{26} Па · с
Вязкость мантии	μ_2	10^{23} Па · с

Рис. 4. Графики k_{\max} для кольцевых структур на Луне

называемого борта кольцевой структуры. Поэтому можно предположить, что неустойчивость начинает проявляться в окрестности этого борта, а затем распространяется по обе стороны от него.

- (3) Так как λ_{\max}^I является величиной порядка 10–30 (кроме Serenitatis), волна возмущения будет осциллировать по крайней мере несколько раз в процессе эволюции.

Так как значения λ_{\max}^R являются малыми, порядка 0.02–0.18 (см. рис. 5, а), мы должны оценить масштаб времени, необходимый для роста неустойчивости из начального малого возмущения. Эта неустойчивость будет расти экспоненциально с множителем $\vartheta \sim 1/\lambda_{\max}^R$. Подставляя это значение λ_{\max}^R , мы получаем, что t изменяется от 5 до 100 (или в размерных величинах 45–900 млн лет). Это значительно меньше, чем средний возраст кольцевых структур. Поэтому неустойчивость должна проявиться или на поверхности, или на границе раздела слоев, в области, где расположены все кольцевые хребты. Таким образом, в дальнейшем мы изучаем в основном, k_{\max} , а не на λ_{\max}^R .

Предположим, что исследуемая неустойчивость является причиной наблюдаемого распределения хребтов. Тогда кольцевые хребты будут возникать в местах, где значения z'_{11} максимальные.

Если r_n и r_{n+1} — это последовательные максимумы неустойчивости, они удовлетворяют следующему уравнению:

$$\vartheta \frac{\lambda_i^I(\xi)}{H(\xi)} \Big|_{\epsilon r_n}^{\epsilon r_{n+1}} + \frac{1}{\epsilon} \int_{\epsilon r_n}^{\epsilon r_{n+1}} \frac{k_{\max}(\xi)}{H(\xi)} d\xi \approx \frac{1}{\epsilon} \int_{\epsilon r_n}^{\epsilon r_{n+1}} \frac{k_{\max}(\xi)}{H(\xi)} d\xi = 2\pi. \quad (4.1)$$

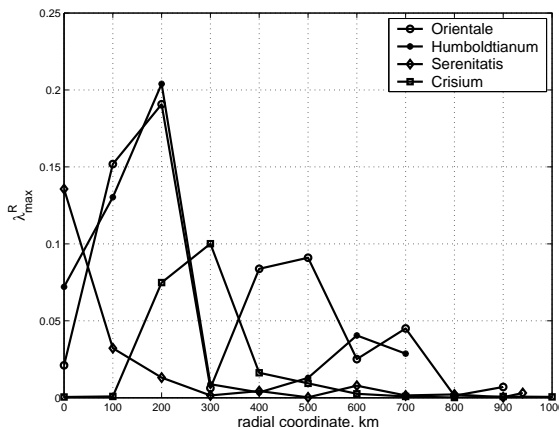


Рис. 5. Графики λ_{\max}^R (а) и λ_{\max}^I (б) для кольцевых структур на Луне

Таблица 2. Отношения радиусов хребтов многокольцевых структур на Луне, взятые из работы [17]

Кольцевые структуры		Отношения радиусов				
		I	II	III	IV	V
Orientale	наблюдаемые	1.5	1.29	1.5	1.4	1.46
	модельные	1.69	1.48	1.50	1.39	1.24
Humboldtianum	наблюдаемые	1.69	1.48	1.50	1.39	1.24
	модельные	1.58	1.55	1.41	1.33	1.21
Serenitatis	наблюдаемые	1.5	1.48	1.41	1.45	–
	модельные	1.5	1.48	1.39	1.26	–
Crisium	наблюдаемые	1.5	1.37	1.5	1.48	–
	модельные	1.31	1.44	1.55	1.20	–

Или, производя замену переменной интегрирования $\xi = \epsilon r$, получим

$$\int_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{k_{\max}(\epsilon r)}{H(\epsilon r)} dr = 2\pi. \tag{4.2}$$

Рассчитанные радиусы хребтов и их отношения приведены в таблицах 2–3. Нетрудно проверить, что результаты моделирования близко расположены к наблюдаемым данным. Относительная ошибка между модельными расчетами и наблюдаемыми данными составляет примерно 20%.

§ 5. Заключение

Исследуется формирование многокольцевой структуры, создаваемой так называемой безынерционной неустойчивостью в медленном двухслойном течении вязкой жидкости с переменной толщиной слоев. Представляемая модель является обобщением ранее разработанной модели развития неустойчивости в двухслойном течении на наклонной плоскости с постоянной толщиной слоев. Для получения уравнений, описывающих развитие неустойчивости с конечной длиной волны, мы применили метод многих масштабов. Используя метод Лапласа, мы анализируем ее главную компоненту при малых возмущениях. Этот анализ показал, что неустойчивость будет проявляться в виде осесимметричных волн с переменным распределением экстремумов. Получено уравнение, описывающее это распределение.

Согласно аналитическому исследованию толщина верхнего и нижнего слоев играет главную роль в возрастающем от центра симметрии распределении максимумов неустойчивости.

Таблица 3. Радиусы некоторых многокольцевых структур на Луне, взятые из [17]

Кольцевые структуры		Радиусы хребтов (км)					
		I	II	III	IV	V	VI
Orientale	наблюдаемые	160	240	310	465	650	950
	модельные	140	237	351	527	732	907
Humboldtianum	наблюдаемые	125	170	230	325	525	675
	модельные	109	138	217	337	477	632
Serenitatis	наблюдаемые	205	310	460	650	940	–
	модельные	243	368	546	759	958	–
Crisium	наблюдаемые	180	270	370	540	800	–
	модельные	177	231	332	513	616	–

Остальные параметры модели изменяют только ее амплитуду. Неустойчивость начинает проявляться на некотором расстоянии от центра симметрии.

Как показало моделирование течения с параметрами коры и мантии некоторых лунных кольцевых структур, это распределение получается возрастающим по направлению от центра симметрии независимо от толщины коры. Используя волновое число наиболее быстро возрастающей компоненты решения, мы предсказываем места образования кольцевых хребтов и сравниваем их с наблюдаемыми структурами на Луне.

Соответствие между рассчитанным распределением максимумов волны и наблюдаемыми распределениями кольцевых хребтов дает основание сделать предположение, что эти хребты могут возникать из-за неустойчивости в многослойном течении.

Хотя природа наблюдаемого распределения кольцевых хребтов может быть связана с другими механизмами, мы надеемся, что это исследование может быть полезным для дальнейшего изучения многокольцевых структур как на Луне, так и на других планетах земной группы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arkani-Hamed J. Viscosity of the Moon // *The Moon*. 1973. Vol. 6. P. 112–124.
2. Bender C.M., Orszag S.A. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw-Hill Inc. USA, 1999. 593 p.
3. Chadderton L.T., Krajenbrink F.G., Katz R., Poveda A. Standing waves on the Moon // *Nature*. 1969. Vol. 223. P. 259–263.
4. Chen D.-H., Yue Z.-Y., Bin Z. A tentative mathematical description of the oscillating peak model of multi-ring basin formation // *Earth, Moon, and Planets*. 1990. Vol. 49. P. 241–252.
5. Chen K.P. Wave formation in gravity-driven low Reynolds number flow of two liquid films down an incline plane // *Phys. Fluids A*. 1993. Vol. 5. P. 3038–3048.
6. Craster R.V., Matar O.K. Dynamics and stability of thin liquid films // *Reviews of Modern Physics*. 2009. Vol. 81. № 3. P. 1131–1198.
7. Hikida H., Wiczorek M.A. Crustal thickness of the Moon: new constraints from gravity inversions using polyhedral shape models // *Icarus*. 2007. Vol. 192. P. 150–166.
8. Hu J., Millet S., Botton V., Ben Hadid H., Henry D. Inertialess temporal and spatio-temporal stability analysis of the two-layer film flow with density stratification // *Phys. Fluids*. 2006. Vol. 18. 104101.
9. Jiang W.Y., Helenbrook B., Lin S.P. Inertialess instability of a two-layer liquid film flow // *Phys. Fluids*. 2004. Vol. 16. № 3. 054105.
10. Kaab A., Weber M. Development of transverse ridges on rock glaciers: field measurements and laboratory experiments // *Permafrost and Periglacial Processes*. 2004. Vol. 15. № 4. P. 379–391.
11. Loewenherz D.S., Lawrence C.J. The effect of viscosity stratification on the stability of a free surface flow at low Reynolds number // *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. 1989. Vol. 1. Issue 10. P. 1686–1693.
12. Merkt D., Pototsky A., Bestehorn M. Long-wave theory of bounded two-layer films with a free liquid–liquid interface: short- and long-time evolution // *Phys. Fluids*. 2005. Vol. 17. 064104.
13. Mohit P.S., Phillips R.J. Viscoelastic evolution of lunar multiring basins // *J. Geophys. Res.* 2006. Vol. 111. E12001.

14. Murray J.B. Oscillating peak model of basin and crater formation // *Moon Planets*. 1980. Vol. 22. P. 472–476.
15. Nakamura Y. Seismic velocity structure of the lunar mantle // *J. Geophys. Res.* 1983. Vol. 88. P. 677–686.
16. Nayfeh A.H. *Perturbation methods*. New York: John Wiley, Inc., 1973. 425 p.
17. Pike R.J., Spudis P.D. Basin–ring spacing on the Moon, Mercury, and Mars // *Earth, Moon, and Planets* 1987. Vol. 39. P. 129–194.
18. Pozrikidis C. Instability of two-layer creeping flow in a channel with parallel-sided walls // *J. Fluid Mech.* 1997. Vol. 351. P. 139–165.
19. Severtson Y.C., Aidun C.K. Stability of two-layer stratified flow in inclined channels: applications to air entrainment in coating systems // *J. Fluid Mech.* 1996. Vol. 312. P. 173–200.
20. Shi J.-C., Ma Y.-H., Chen D.-H., Bao G. Analysis of origin of multi-ring basins by theory of deep water waves // *Chin. Phys. Lett.* 2008. Vol. 25. № 2. P. 787–789.
21. Tilley B.S., Davis S.H., Bankoff S.G. Linear stability theory of two-layer fluid flow in an inclined channel // *Phys. Fluids*. 1994. Vol. 6. № 12. P. 3906–3922.
22. Turcotte D.L., Schubert G. *Geodynamics: applications of continuum physics to geological problems*. New York: John Wiley, Inc., 1982. 450 p.
23. Wieczorek M.A., Phillips R.J. Lunar multiring basins and the cratering process // *Icarus*. 1999. Vol. 139. P. 246–259.
24. Wünnemann K., Ivanov B.A. Numerical modelling of the impact crater depth–diameter dependence in an acoustically fluidized target // *Planetary and Space Science*. Vol. 51. P. 831–845.

Поступила в редакцию 10.09.2014

Пак Владимир Васильевич, к. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, лаборатория геофизической гидродинамики, Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН им. В. И. Ильичева, 690041, Россия, г. Владивосток, ул. Балтийская, 43.
E-mail: pakvv@poi.dvo.ru

V. V. Pak

An asymptotic study of multi-ring pattern formation in axisymmetric two-layer creeping flow with variable layer thicknesses, and some geophysical applications

Keywords: multi-layer creeping flow, Stokes equations, method of multiple scales, inertialess instability, ring basins.

MSC: 76D50

The axisymmetric model based on the Stokes equations is proposed to investigate the multi-ring pattern formation in two-layer creeping flow with variable thickness of layers. Each layer has uniform density and viscosity. The upper layer is lighter than the lower layer. The flow is generated by both surface and interface geometry. The effect of surface tension is supposed to be negligible. We apply the method of multiple scales to obtain the governing equations describing instability in the form of wave in the flow. Using the Fourier-Laplace method, we analyze the small-amplitude leading behavior of the instability. The asymptotic study reveals that this kind of instability manifests itself as axisymmetric wave which length is comparable with layer thickness; moreover, layer thicknesses play a major role in spatial distribution of wave extrema. The other model parameters alter mostly the wave amplitude. The equation relating extrema distribution to layer thicknesses is derived. We apply the obtained results to study a ring spacing rule observed for most multi-ring basins on the Moon. Using parameters of some lunar multi-ring basins we calculate the consecutive crest radii of the unstable wave and compare the results of simulation with the measured ring radii.

REFERENCES

1. Arkani-Hamed J. Viscosity of the Moon, *The Moon*, 1973, vol. 6, pp. 112–124.
2. Bender C.M., Orszag S.A. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*, McGraw-Hill Inc., USA, 593 p.

3. Chadderton L.T., Krajenbrink F.G., Katz R., Poveda A. Standing waves on the Moon, *Nature*, 1969, vol. 223, pp. 259–263.
4. Chen D.-H., Yue Z.-Y., Bin Z. A tentative mathematical description of the oscillating peak model of multi-ring basin formation, *Earth, Moon, and Planets*, 1990, vol. 49, pp. 241–252.
5. Chen K.P., Wave formation in gravity-driven low Reynolds number flow of two liquid films down an incline plane, *Phys. Fluids A*, 1993, vol. 5, pp. 3038–3048.
6. Craster R.V., Matar O.K. Dynamics and stability of thin liquid films, *Reviews of Modern Physics*, 2009, vol. 81, no. 3, pp. 1131–1198.
7. Hikida H., Wiczorek M.A. Crustal thickness of the Moon: new constraints from gravity inversions using polyhedral shape models, *Icarus*, 2007, vol. 192, pp. 150–166.
8. Hu J., Millet S., Botton V., Ben Hadid H., Henry D. Inertialess temporal and spatio-temporal stability analysis of the two-layer film flow with density stratification, *Phys. Fluids*, 2006, vol. 18, 104101.
9. Jiang W.Y., Helenbrook B., Lin S.P. Inertialess instability of a two-layer liquid film flow, *Phys. Fluids*, 2004, vol. 16, no. 3, 054105.
10. Kaab A., Weber M. Development of transverse ridges on rock glaciers: field measurements and laboratory experiments, *Permafrost and Periglacial Processes*, 2004, vol. 15, no. 4, pp. 379–391.
11. Loewenherz D.S., Lawrence C.J. The effect of viscosity stratification on the stability of a free surface flow at low Reynolds number, *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1989, vol. 1, issue 10, pp. 1686–1693.
12. Merkt D., Pototsky A., Bestehorn M. Long-wave theory of bounded two-layer films with a free liquid–liquid interface: short- and long-time evolution, *Phys. Fluids*, 2005, vol. 17, 064104.
13. Mohit P.S., Phillips R.J. Viscoelastic evolution of lunar multiring basins, *J. Geophys. Res.*, 2006, vol. 111, E12001.
14. Murray J.B. Oscillating peak model of basin and crater formation, *Moon Planets*, 1980, vol. 22, pp. 472–476.
15. Nakamura Y. Seismic velocity structure of the lunar mantle, *J. Geophys. Res.*, 1983, vol. 88, pp. 677–686.
16. Nayfeh A.H. *Perturbation methods*, New York: John Wiley, Inc., 1973, 425 p.
17. Pike R.J., Spudis P.D. Basin–ring spacing on the Moon, Mercury, and Mars, *Earth, Moon, and Planets*, 1987, vol. 39, pp. 129–194.
18. Pozrikidis C. Instability of two-layer creeping flow in a channel with parallel-sided walls, *J. Fluid Mech.*, 1997, vol. 351, pp. 139–165.
19. Severtson Y.C., Aidun C.K. Stability of two-layer stratified flow in inclined channels: applications to air entrainment in coating systems, *J. Fluid Mech.*, 1996, vol. 312, pp. 173–200.
20. Shi J.-C., Ma Y.-H., Chen D.-H., Bao G. Analysis of origin of multi-ring basins by theory of deep water waves, *Chin. Phys. Lett.*, 2008, vol. 25, no. 2, pp. 787–789.
21. Tilley B.S., Davis S.H., Bankoff S.G. Linear stability theory of two-layer fluid flow in an inclined channel, *Phys. Fluids.*, 1994, vol. 6, no. 12, pp. 3906–3922.
22. Turcotte D.L., Schubert G. *Geodynamics: applications of continuum physics to geological problems*, New York: John Wiley, Inc., 1982, 450 p.
23. Wiczorek M.A., Phillips R.J. Lunar multiring basins and the cratering process, *Icarus*, 1999, vol. 139, pp. 246–259.
24. Wünnemann K., Ivanov B.A. Numerical modelling of the impact crater depth–diameter dependence in an acoustically fluidized target, *Planetary and Space Science*, 2003, vol. 51, pp. 831–845.

Received 10.09.2014

Pak Vladimir Vasil'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Laboratory of Geophysical Hydrodynamics, V.I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Baltiiskaya, 43, Vladivostok, 690041, Russia.
E-mail: pakvv@poi.dvo.ru