УДК 515.122.536

© *А. А. Грызлов, Р. А. Головастов*

О ПЛОТНОСТИ И ЧИСЛЕ СУСЛИНА ПОДМНОЖЕСТВ ОДНОГО ПРОСТРАНСТВА СТОУНА [1]

В работе рассматривается пространство Стоуна булевой алгебры подмножеств одного счетного частично упорядоченного множества. Главной особенностью этого множества является наличие бесконечного числа непосредственных последователей у каждого его элемента. Отсюда следует, что каждый фиксированный ультрафильтр данного пространства Стоуна является неизолированной точкой, а подмножество свободных ультрафильтров всюду плотно. В работе дана классификация точек пространства, доказано, что есть свободные ультрафильтры, которые не являются пределами последовательностей фиксированных ультрафильтров, а также свободные ультрафильтры, определяемые цепями частично упорядоченного множества. Рассмотрены кардинальные инварианты подпространства свободных ультрафильтров. Доказано, что это подпространство имеет счетное число Суслина, но не сепарабельно.

Ключевые слова: булева алгебра, пространство Стоуна булевой алгебры, ультрафильтр.

§ 1. Введение

В работе рассматривается пространство Стоуна булевой алгебры подмножеств одного счетного частично упорядоченного множества. Первое пространство такого типа построил М. Белл [1]. Пространства Стоуна других булевых алгебр подобного типа рассматривались в [2, 3, 5–9]. Важным свойством пространства М. Белла является то, что подпространство его свободных ультрафильтров удовлетворяет условию Суслина, но не сепарабельно. Это свойство было широко использовано Я. ван Миллом [10] и А. А. Грызловым [4] при построении различных типов точек пространства $\beta\omega$.

В данной работе рассматривается пространство Стоуна булевой алгебры частично упорядоченного множества, отличительной чертой которого является существование у каждого элемента множества бесконечного числа непосредственных последователей. Эта особенность существенно отличает свойства рассматриваемого пространства Стоуна от пространства М. Белла. Поэтому тот же существенный вопрос о числе Суслина и сепарабельности подпространства свободных ультрафильтров потребовал для своего решения других подходов. В работе доказано, что подпространство свободных ультрафильтров данного пространства удовлетворяет условию Суслина, но не сепарабельно.

§ 2. Предварительные сведения

Определение 1. Пространством Стоуна $S\mathfrak{B}$ булевой алгебры $\mathfrak{B}$ называется множество ультрафильтров в $\mathfrak{B}$ с топологией, задаваемой базой, состоящей их открыто-замкнутых множеств $[A]$ следующего вида:

$$[A] = \{\xi \in S\mathfrak{B} \colon A \in \xi\} \text{ для } A \in \mathfrak{B}.$$

Обозначим $\mathfrak{N} = \{f|_n \colon f \in \omega^\omega, n \in \omega\}$. Элементы множества $\mathfrak{N}$ будем обозначать $t,\ s,\ r$. Для $s \in \mathfrak{N}$ обозначим $C_s = \{t \in \mathfrak{N} \colon t|_{\mathrm{dom}\ s} = s\}$. На множестве $\mathfrak{N}$ определяется частичный порядок по следующему правилу: $s \leqslant t$, если t есть продолжение s, то есть $t \in C_s$.

Определим множество

$$T = \big\{\, \pi \in \mathfrak{N}^\omega \colon \ \mathrm{dom}\, \pi(n) = n+1 \text{ для всех } n \in \omega \,\big\}.$$

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках проекта 2003 базовой части госзадания.

Для каждого $\pi \in T$ обозначим

$$C_\pi = \cup\{\, C_{\pi(n)} \colon n \in \omega \,\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{B}$ булеву алгебру, порожденную семейством

$$\mathfrak{B}' = \{\, C_\pi \colon \pi \in T \,\} \bigcup \{\, \mathfrak{N} \setminus C_\pi \colon \pi \in T \,\}.$$

Определим пространство $S\mathfrak{B}$ как пространство Стоуна булевой алгебры $\mathfrak{B}$.

Для произвольного $s \in \mathfrak{N}$ фиксированный в s ультрафильтр будем обозначать $\hat{s}$. Множество всех фиксированных ультрафильтров обозначим $\hat{\mathfrak{N}}$. Множество свободных ультрафильтров, содержащих $A \in \mathfrak{B}$, обозначим $A^* = [A] \setminus \hat{A}$. Множество всех свободных ультрафильтров будем обозначать $S\mathfrak{B}^*$.

Определение 2. Базисом ультрафильтра ξ называется подсемейство $\xi' \subseteq \xi$ такое, что для любого $A \in \xi$ найдется $C \in \xi'$ такое, что $C \subseteq A$.

Отметим, что для всякого базиса ξ' произвольного ультрафильтра $\xi \subseteq \mathfrak{B}$ справедливо, что семейство $B_\xi = \{[A] \colon A \in \xi'\}$ является базой в точке ξ как точке пространства Стоуна $S\mathfrak{B}$.

Многие результаты, доказанные нами для пространства Белла в работах [5, 6], без труда переносятся на пространство $S\mathfrak{B}$.

Предложение 1. *Для каждого $s \in \mathfrak{N}$ справедливо включение $C_s \in \mathfrak{B}$.*

Предложение 2. *Семейство*

$$\Big\{ \big[\big(\bigcap_{\pi \in T'} C_\pi\big) \cap \big(\bigcap_{\pi \in T''} \mathfrak{N} \setminus C_\pi\big)\big] \colon T' \subset T,\ T'' \subset T,\ |T'| < \omega,\ |T''| < \omega \Big\}$$

есть база пространства $S\mathfrak{B}$.

Построим другую базу данного пространства. Для произвольного $\pi \in T$ и $M \subseteq \omega$ определим $C_{\pi|M} = \bigcup\limits_{n \in M} C_{\pi(n)}$.

Предложение 3. *Для каждого $\pi \in T$ и $M \subseteq \omega$ найдутся $\pi_1, \pi_2 \in T$ такие, что*

$$C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}.$$

Предложение 4. *Для семейства $\{\, C_{\pi_j|M_j} \colon j \leqslant n \,\}$ $(n \in \omega)$ имеет место следующее свойство:*

$$\bigcap_{j \leqslant n} C_{\pi_j|M_j} = \bigcup_{j \leqslant n} C_{\pi_j|M'_j} \quad \text{для некоторых } M'_j \subseteq M_j \ (j \leqslant n).$$

Следствие 1. *Пусть $x \in S\mathfrak{B}^*$ и $x \in \big[\bigcap\limits_{j \leqslant n} C_{\pi_j|M_j}\big]$. Тогда найдутся π_{j_0} и $M'_{j_0} \subseteq M_{j_0}$ такие, что $x \in [C_{\pi_{j_0}|M'_{j_0}}] \subseteq \big[\bigcap\limits_{j \leqslant n} C_{\pi_j|M_j}\big]$.*

Определим

$$\Gamma = \Big\{\, C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi \colon \pi \in T,\ T' \subset T,\ |T'| < \omega,\ M \subseteq \omega \,\Big\},$$

$$\Theta = \{\mathfrak{N} \setminus (\bigcup_{\pi \in T'} C_\pi) \colon \pi \in T,\ T' \subset T,\ |T'| < \omega\}, \qquad \widetilde{\Gamma} = \Gamma \cup \Theta.$$

В силу предложения 3 и следствия 1 получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Семейство*

$$\widetilde{\mathfrak{B}} = \{\, [U] \colon U \in \widetilde{\Gamma}\}$$

является базой пространства $S\mathfrak{B}$.

§ 3. Основные результаты

Лемма 1. *Множество свободных ультрафильтров* $S\mathfrak{B}^*$ *всюду плотно в* $S\mathfrak{B}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное $U \in \widetilde{\Gamma}$. Легко построить бесконечную цепь $\{s_n \colon n \in \omega\} \subseteq U$. Для этого достаточно заметить, что для произвольного $s \in U$ количество его продолжений на следующий шаг бесконечно, а по определению $\widetilde{\Gamma}$ только конечное их число может не содержаться в U.

Для каждого $k \in \omega$ определим $A_k = \{s_n \colon n \geqslant k\}$. Тогда для всякого A_k $(k \in \omega)$ выполнены следующие свойства:

(1) $[A_k] \cap \hat{\mathfrak{N}} = A_k$;

(2) $[A_k] \subseteq U$.

Получаем центрированную систему замкнутых множеств $\{[A_k] \colon k \in \omega\}$ и, в силу бикомпактности $S\mathfrak{B}$, $\bigcap\limits_{k \in \omega} [A_k] \neq \varnothing$ и при этом $\bigcap\limits_{k \in \omega} [A_k] \subseteq S\mathfrak{B}^*$. □

Лемма 2. Θ *является базисом ультрафильтра* ξ_0.

Доказательство. Семейство $\Theta \subset \widetilde{\Gamma}$ центрировано. Пусть $\xi_0 \in S\mathfrak{B}$ — ультрафильтр, мажорирующий Θ. Никакое множество из $\widetilde{\Gamma}$ вида

$$C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_{t_j} (T' \subset T, |T'| < \omega)$$

не принадлежит ультрафильтру ξ_0, поскольку $\mathfrak{N} \setminus C_{\pi|M} \in \Theta$. Следовательно, Θ — базис ультрафильтра ξ_0. □

Лемма 3. *Пусть* $s \in \mathfrak{N}$. *Семейство множеств*

$$\sigma_s = \{C_s \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi \colon s \in \alpha,\ T' \subseteq T,\ |T'| < \omega,\ s \notin \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi\}$$

является базисом фиксированного по s *ультрафильтра* $\hat{s}$.

Доказательство. Во-первых, отметим, что всякое множество семейства σ_s содержит s и является элементом булевой алгебры $\mathfrak{B}$, следовательно, принадлежит ультрафильтру $\hat{s}$. Если множество $C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi \in \hat{s}$ для некоторых $\pi \in T$, $T' \subset T$, $|T'| < \omega$, $M \subseteq \omega$, то $C_{\pi|M} \in \hat{s}$, а это значит, что $C_{\pi(n)} \ni s$ для некоторого $n \in M$. Таким образом $C_{\pi(n)} \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi \in \sigma_s$ и $C_{\pi(n)} \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi \subseteq C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi$. □

Лемма 4. *Пусть* $\alpha = \{s_n \colon n \in \omega\}$ *— бесконечная цепь в* $\mathfrak{N}$. *Тогда семейство непустых множеств*

$$\sigma_\alpha = \{C_s \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi \colon T' \subseteq T,\ |T'| < \omega,\ \alpha \cap (\bigcup_{\pi \in T'} C_\pi) = \varnothing\}$$

является базисом свободного ультрафильтра ξ_α.

Доказательство. Из определения семейства σ_α следует, что семейство σ_α центрировано. Дополним его до ультрафильтра, обозначим его ξ_α. Покажем, что σ_α является базисом этого ультрафильтра.

Пусть $C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi \in \xi_\alpha$ для некоторых $\pi \in T$, $T' \subseteq T$, $|T'| < \omega$ и $M \subseteq \omega$. Тогда найдутся $s_n \in \alpha$ и $m \in M$ такие, что $C_{\pi(m)} \ni s_n$. Действительно, в противном случае $\alpha \cap C_{\pi|M} = \varnothing$ и найдется $\pi' \in T$ такое, что $\pi'|M = \pi|M$ и $\alpha \cap C_{\pi'} = \varnothing$.

Тогда для $s_n \in \alpha$ имеем $U = C_{s_n} \setminus \big((\bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi) \cup C_{\pi'}\big) \in \sigma_\alpha$ и, следовательно, $U \in \xi_\alpha$. С другой стороны, поскольку $C_{\pi'} \supseteq C_{\pi|M}$, имеем $U \cap (C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi) = \varnothing$, что противоречит центрированности ξ_α как ультрафильтра.

Поскольку α — бесконечная цепь, то ξ_α является свободным ультрафильтром. При этом для всякой бесконечной цепи $\alpha' \subseteq \alpha$ имеем $\xi_{\alpha'} = \xi_\alpha$. $\square$

Множество свободных ультрафильтров ξ_α, построенных по бесконечным цепям $\alpha \subseteq \mathfrak{N}$, будем обозначать P_1, а сами ультрафильтры ξ_α будем называть ультрафильтрами первого рода.

Лемма 5. *Если $\xi \in S\mathfrak{B}^*$ — свободный ультрафильтр и $\xi \notin P_1 \cup \{\xi_0\}$, то найдется множество $C_{\pi|M}$ такое, что $\pi \in T$, $M \subseteq \omega$, $|M| = \omega$ и $\{\pi(n)\colon n \in M\}$ есть строгая антицепь и*

$$\xi \ni C_{\pi|M} \text{ и } C_{\pi(n)} \notin \xi \text{ для всякого } n \in M.$$

Доказательство. Предположим, что для всякого $C_{\pi|M}$ такого, что $C_{\pi|M} \in \xi$, найдется $n \in M$ такое, что $C_{\pi(n)} \in \xi$.

Рассмотрим семейство $\lambda = \{s \in \mathfrak{N}\colon C_s \in \xi\}$. Тогда λ — цепь. В силу нашего предположения у ультрафильтра ξ есть базис $\sigma = \{C_s \setminus \bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi\colon s \in \lambda,\ \lambda \cap (\bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi) = \varnothing,\ T' \subseteq T,\ |T'| < \omega\}$. Тогда ξ есть или фиксированный ультрафильтр, или свободный ультрафильтр 1 рода, что противоречит условию леммы. $\square$

Свободные ультрафильтры из множества $P_2 = S\mathfrak{B}^* \setminus (P_1 \cup \{\xi_0\})$ будем называть свободными ультрафильтрами второго рода.

Из лемм 2, 3, 4, 5 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. $S\mathfrak{B} = \{\xi_0\} \cup \hat{\mathfrak{N}} \cup P_1 \cup P_2$.

Лемма 6. *Пусть $\xi \in P_1 \cup P_2$ — свободный ультрафильтр. Тогда существует $C_{\pi|M} \in \mathfrak{B}$ такое, что выполнены следующие свойства:*

(1) $|M| = \omega$;

(2) $\xi \ni C_{\pi|M}$;

(3) если $\{M_k\colon k \leqslant k_0\}$ — конечное разбиение M, то найдется k', $k' \leqslant k_0$, такое, что $|M_{k'}| = \omega$ и $\xi \ni C_{\pi|M_{k'}}$.

Доказательство. Если $\xi \in P_1$ — свободный ультрафильтр 1 рода, порожденный полной цепью $\alpha = \{s_n\colon n \in \omega\}$, то определим $\pi \in T$ по правилу $\pi(n) = s_n$. Положим $M = \omega$. Тогда C_π — искомое множество.

Если $\xi \in P_2$ — свободный ультрафильтр 2 рода, то по лемме 5 существует $C_{\pi|M} \in \mathfrak{B}$ такое, что $|M| = \omega$, $\{\pi(n)\colon n \in M\}$ есть строгая антицепь и $\xi \in [C_{\pi|M}] \setminus \cup\big\{[C_{\pi(n)}]\colon n \in M\big\}$. Тогда $C_{\pi|M}$ — искомое множество. $\square$

Теорема 3. $c(S\mathfrak{B}^*) = \omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную дизъюнктную систему открытых множеств $\nu = \{U_\alpha \colon \alpha \in A\}$ в $S\mathfrak{B}^*$. По теореме 1 найдется система множеств $\nu' = \{V_\alpha \colon \alpha \in A\}$ такая, что $V_\alpha \in \widetilde{\Gamma}$ и $[V_\alpha] \cap S\mathfrak{B}^* \subseteq U_\alpha$ для всех $\alpha \in A$.

Покажем, что ν' дизъюнктно. Предположим противное. Тогда найдутся $\alpha,\ \beta \in A$ такие, что $V_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing$. Заметим, что $V_\alpha \cap V_\beta \in \mathfrak{B}$, а значит, $[V_\alpha \cap V_\beta]$ — открыто-замкнутое множество, и по лемме 1 справедливо $[V_\alpha \cap V_\beta] \cap S\mathfrak{B}^* \neq \varnothing$. Получаем

$$\varnothing \neq [V_\alpha \cap V_\beta] \cap S\mathfrak{B}^* \subseteq [V_\alpha] \cap [V_\beta] \cap S\mathfrak{B}^* \subseteq U_\alpha \cap U_\beta,$$

что противоречит дизъюнктности ν.

Предположим, что $|A| > \omega$. Тогда из дизъюнктности ν следует существование на счетном $\mathfrak{N}$ несчетной системы дизъюнктных множеств, чего быть не может. $\square$

Теорема 4. *Подпространство свободных ультрафильтров $S\mathfrak{B}^*$ не сепарабельно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A = \{\xi_n \colon n \in \omega\}$ — счетное подмножество $S\mathfrak{B}^* \setminus \{\xi_0\}$. Мы покажем, что существует строгая антицепь $\{s_n \colon n \in \omega\}$ такая, что $A \subseteq \big[\cup\{C_{s_n} \colon n \in \omega\}\big]$.

Рассмотрим произвольные $n \in \omega$ и $\xi_n \in A$. Обозначим $C_{\pi_n|M_n}$ множество булевой алгебры $\mathfrak{B}$, удовлетворяющее условиям леммы 6.

Существует число $m_n \in \{0, \ldots, 10^{n+1} - 1\}$ такое, что для класса вычетов $\overline{m_n}$ по $\operatorname{mod} 10^{n+1}$, определяемого числом m_n, выполняется $C_{\pi_n|\overline{m_n} \cap M} \in \xi$. Класс вычетов $\overline{m_n}$ состоит из точек вида $p_n^r = 10^{n+1} \cdot r + m_n$, где $r \in \omega$, $n \in \omega$. Обозначим $\overline{m_n}' = \{p_n^r \in \overline{m_n} \colon r \geqslant 1\}$.

Для любых чисел p_n^r, $p_n^{r-1} \in \overline{m_n}'$ $(r \geqslant 1)$ мы определим число k_n^r и $t_n^r \in \mathfrak{N}$ такие, что выполнены следующие условия:

(1) $p_n^{r-1} \leqslant k_n^r < p_n^r$;

(2) $\operatorname{dom}\ t_n^r = k_n^r + 1$;

(3) $\pi_n(p_n^r) \geqslant t_n^r$;

(4) $k_n^r \neq k_{n'}^{r'}$ если не выполнено $n = n'$ и $r = r'$.

Мы будем обозначать $\widetilde{M_n} = \{k_n^r \colon r \geqslant 1\}$. Построение множеств $\{\widetilde{M_n} \colon n \in \omega\}$ будем осуществлять по индукции.

Для $n = 0$ положим $\widetilde{M_0} = \{\overline{m_0}'\}$.

Пусть построены множества $\widetilde{M_i}$ для $i < n$. Построим множество $\widetilde{M_n}$. Рассмотрим произвольные $r \geqslant 1$ и $p_n^r \in \overline{m_n}'$, то есть $p_n^r = 10^{n+1} \cdot r + m_n$. Рассмотрим также $p_n^{r-1} = 10^{n+1} \cdot (r-1) + m_n$.

Обозначим через

$$I = \big[10^{n+1} \cdot (r-1) + m_n,\ 10^{n+1} \cdot r + m_n\big]$$

отрезок натуральных чисел. Нетрудно видеть, что $|I \bigcap (\cup\{\widetilde{M_i} \colon i < n\})| < 10^{n+1}$. Тогда найдется число $k_n^r \in I \setminus \bigcup\{\widetilde{M_i} \colon i < n\}$. Обозначим $\widetilde{M_n} = \{k_n^r \colon r \geqslant 1\}$.

Для чисел k_n^r выберем и зафиксируем элемент $t_n^r \in \mathfrak{N}$ такой, что

$$t_n^r \leqslant \pi_n(p_n^r) \text{ и } \operatorname{dom}\ t_n^r = k_n^r + 1.$$

Тогда для множеств $\{\widetilde{M_i} \colon i \leqslant n\}$ и $\{t_i^r \colon i \leqslant n,\ r \geqslant 1\}$ выполнены условия (1)–(4). Таким образом, построены множество $\widetilde{M} = \bigcup\limits_{n \in \omega} \widetilde{M_n}$ и множество $\{t(k_n^r) = t_n^r \colon k_n^r \in \widetilde{M}\}$.

В силу условия (4) множество $\bigcup\{C_{t(k_n^r)} \colon k_n^r \in \widetilde{M}\}$ есть элемент булевой алгебры $\mathfrak{B}$. В силу условия (3) мы имеем

$$\xi_n \ni \bigcup\{C_{t(k_n^r)} \colon k_n^r \in \widetilde{M}\} \text{ для всех } n \in \omega,$$

и, следовательно, $\{\xi_n \colon n \in \omega\}$ лежит в открыто-замкнутом множестве $\big[\cup\{C_{t(k_n^r)} \colon k_n^r \in \widetilde{M}\}\big]$. При этом $S\mathfrak{B} \setminus \big[\cup\{C_{t(k_n^r)} \colon k_n^r \in \widetilde{M}\}\big] \neq \varnothing$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. 1980. Vol. 5. P. 11–25.
2. Головастов Р.А. Об одном бикомпактном расширении счетного дискретного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. № 1. С. 14–19.
3. Головастов Р.А. О пространстве Стоуна одной булевой алгебры // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. № 3. С. 19–24.
4. Грызлов А.А. О бесконечных расширениях дискретных пространств // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2. № 3. С. 803–848.
5. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. On Bell's compactification of N // Topology Proceedings. 2010. Vol. 35. P. 177–185.
6. Грызлов А.А., Бастрыков Е.С., Головастов Р.А. О точках одного бикомпактного расширения N // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. 2010. № 3. С. 10–17.
7. Грызлов А.А., Бастрыков Е.С. Некоторые центрированные системы множеств и определяемые ими точки // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4. С. 76–82.
8. Грызлов А.А., Головастов Р.А. О пространствах Стоуна некоторых булевых алгебр // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. № 1. С. 11–16.
9. Gryzlov A.A. On convergent sequence and copies of βN in the Stone space of one Boolean algebra // Topology Proceedings. 2013. Vol. 42. P. 165–171.
10. van Mill J. Weak p-points in Chech–Stone compactification // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 173. № 2. P. 657–678.

Поступила в редакцию 10.10.2014

Грызлов Анатолий Александрович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: gryzlov@udsu.ru
Головастов Роман Александрович, старший преподаватель, кафедра алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: rpa4@bk.ru

A. A. Gryzlov, R. A. Golovastov
On the density and Suslin number of subsets of one Stone space

Keywords: Boolean algebra, Stone space of Boolean algebra, ultrafilter.

MSC: 54D35

The paper concerns the Stone space of the Boolean algebra of subsets of one countable partially ordered set. The main feature of this set is the existence of countably many successors of each of its elements. From this property it follows that every fixed ultrafilter of this Stone space is a nonisolated point; the subset of free ultrafilters is dense everywhere. The classification of space points is given; the fact that there are free ultrafilters, which are not limits of sequences of fixed ultrafilters, as well as free ultrafilters determined by chains of partially ordered set, is proved. The cardinal invariants of the subspace of free ultrafilters are considered. It is shown that this subspace has the countable Suslin number, but is not separable.

REFERENCES

1. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight, *Topology Proceedings*, 1980, vol. 5, pp. 11–25.
2. Golovastov R.A. About one compactifications of countable discrete space, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 14–19 (in Russian).

3. Golovastov R.A. About Stone space of one Boolean algebra, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 19–24 (in Russian).

4. Gryzlov A.A. On compactifications of discrete spaces, *Fundam. Prikl. Mat.*, 1996, vol. 2, no. 3, pp. 803–848 (in Russian).

5. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. On Bell's compactification of N, *Topology Proceedings*, 2010, vol. 35, pp. 177–185.

6. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. About points of compactification of N, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 10–17 (in Russian).

7. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S. Some centered systems of sets and points defined by them, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 76–82 (in Russian).

8. Gryzlov A.A., Golovastov R.A. The Stone spaces of Boolean algebras and the Cantor set, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 1, pp. 11–16 (in Russian).

9. Gryzlov A.A. On convergent sequence and copies of βN in the Stone space of one Boolean algebra, *Topology Proceedings*, 2013, vol. 42, pp. 165–171.

10. van Mill J. Weak p-points in Chech–Stone compactification, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1980, vol. 173, no. 2, pp. 657–678.

Received 10.10.2014

Gryzlov Anatolii Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Algebra and Topology, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: gryzlov@udsu.ru

Golovastov Roman Aleksandrovich, Senior Lecturer, Department of Algebra and Topology, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: rpa4@bk.ru