УДК 517.977.8, 519.837.4

© *А. И. Благодатских*

МЯГКОЕ УБЕГАНИЕ ЖЕСТКО СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Естественным обобщением дифференциальных игр двух лиц являются конфликтно управляемые процессы с участием группы управляемых объектов (хотя бы с одной из противоборствующих сторон). При этом наибольшую трудность для исследований представляют задачи конфликтного взаимодействия между двумя группами управляемых объектов. Специфика этих задач требует создания новых методов их исследования. В данной работе рассматривается нелинейная задача группового преследования группы жестко скоординированных (то есть использующих одинаковое управление) убегающих при условии, что маневренность убегающих выше. Цель убегающих — обеспечить мягкое убегание всей группы. Под мягким убеганием понимается несовпадение геометрических координат, ускорений и так далее для убегающего и всех преследователей. Для любых начальных позиций участников построено позиционное управление, обеспечивающее мягкое убегание от группы преследователей всех убегающих.

Ключевые слова: мягкое убегание, групповое преследование, нелинейные дифференциальные игры, конфликтно управляемые процессы.

Введение

Естественным обобщением дифференциальных игр двух лиц [1–3] являются задачи преследования–убегания с участием группы управляемых объектов (хотя бы с одной из противоборствующих сторон), при этом наибольшую трудность для исследований представляют задачи конфликтного взаимодействия между двумя группами управляемых объектов [4–7]. Специфика этих задач (например, невыпуклость и несвязность объединения множеств достижимости преследователей или целевых множеств убегающих) требует создания новых методов их исследования.

По всей видимости, первой работой, посвященной задаче конфликтного взаимодействия между двумя группами, была работа [8]. Для случая равных динамических и инерционных возможностей всех участников были получены достаточные условия уклонения от встречи и получены оценки сверху и снизу минимального числа убегающих, уклоняющихся от заданного числа преследователей из любых начальных позиций.

В предлагаемой работе рассматривается задача преследования группы убегающих группой преследователей, при этом маневренность убегающих выше, а динамика преследователей нелинейна. Предполагается, что все убегающие используют одинаковое (жестко скоординированное) управление, которое формируется в каждый момент времени с учетом текущих позиций участников. Построено кусочно-постоянное управление, обеспечивающее мягкое убегание всех убегающих (то есть несовпадение геометрических координат, скоростей, ускорений и т. д.) от группы преследователей. Данная работа продолжает исследования [9, 10].

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ на интервале $[t_0, \infty)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n{+}m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с законами движения

$$\begin{array}{llll} P_i: & x_i^{(n_i)} = f_i\left(x_i, \dot{x}_i, \ldots, x_i^{(n_i-1)}, u_i, t\right), & u_i \in U_i, & x_i^{(\alpha_i)}(t_0) = X_i^{\alpha_i},\ \alpha_i \in N_i, \\ E_j: & y_j^{(m_j)} = v, & \|v\| \leqslant \gamma, & y_j^{(\beta_j)}(t_0) = Y_j^{\beta_j},\ \beta_j \in M_j, \end{array} \tag{1.1}$$
$$\text{причем } n_i > m_j \geqslant 1 \text{ и } X_i^{\beta_j} \neq Y_j^{\beta_j} \text{ для всех } i, j, \beta_j \in M_j.$$

Здесь и всюду далее (если не оговорено специально) $x_i \in \mathbb{R}^k$, $y_j \in \mathbb{R}^k$, $v \in \mathbb{R}^k$, $U_i \subset \mathbb{R}^{k_i}$, $k_i \geqslant 1$, $\gamma > 0$, $f_i : \underbrace{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n_i \text{ раз}} \times U_i \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $N_i = \{0, 1, \ldots, n_i - 1\}$, $M_j = \{0, 1, \ldots, m_j - 1\}$, $\mathfrak{D}(o, \rho)$ — шар в пространстве $\mathbb{R}^k$ радиуса ρ с центром в точке o.

Отметим, что линейный случай игры Γ при условии, что $f_i\left(x_i, \dot{x}_i, \ldots, x_i^{(n_i-1)}, u_i, t\right) = u_i$ и U_i — компакты в $\mathbb{R}^k$, рассматривался в [9, 10].

Определение 1. Управления $u_i(t)$ преследователей P_i и $v(t)$ убегающих E_j из класса измеримых по Лебегу функций, удовлетворяющие указанным в (1.1) ограничениям, называются *допустимыми*.

Предположение 1. Каждая функция f_i удовлетворяет условиям существования, единственности и продолжимости решения на любой отрезок при всех допустимых управлениях $u_i(t)$ преследователей P_i.

Предположение 2. Существует постоянная $G \geqslant 0$ такая, что каждая функция f_i удовлетворяет неравенству

$$\Big|f_i(a_\alpha, \alpha \in N_i, b, t)\Big| \leqslant G \text{ для всех } (a_\alpha, \alpha \in N_i, b, t) \in \underbrace{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n_i \text{ раз}} \times U_i \times [t_0, \infty).$$

В этой работе считаем, что предположения 1 и 2 выполнены.

Определение 2. *В игре* Γ *возможно мягкое убегание*, если для любых допустимых управлений $u_i(t)$ преследователей P_i найдется такое допустимое управление убегающих E_j

$$v(t) = v\left(t,\ x_i^{(\alpha_i)}(t),\ \alpha_i \in N_i,\ y_j^{(\beta_j)}(t),\ \beta_j \in M_j\right),$$

что $x_i^{(\beta_j)}(t) \neq y_j^{(\beta_j)}(t),\ \beta_j \in M_j$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который в каждый момент времени $t \in [t_0, \infty)$ по величинам $\left\{x_i^{(\alpha_i)}(t),\ \alpha_i \in N_i,\ y_j^{(\beta_j)}(t),\ \beta_j \in M_j\right\}$ для всех убегающих E_j выбирает одно и то же управление $v(t)$.

§ 2. Мягкое убегание в задаче с одним убегающим (случай $m = 1$)

В этом параграфе построим допустимое управление $v(t)$, обеспечивающее мягкое убегание из любых начальных позиций в задаче с одним убегающим E_1.

Без ограничения общности считаем, что в предположении 2 постоянная $G = 1$ (указанное требование при $G > 1$ достигается заменой переменных $x_i^*(t) = x_i(t)G^{-1}$, $y_j^*(t) = y_j(t)G^{-1}$).

Фиксируем произвольный единичный вектор $e \in \mathbb{R}^k$.

Из возможности мягкого убегания для $k = 2$, то есть на плоскости, следует возможность мягкого убегания и при $k > 2$. Действительно, если $k > 2$, тогда выберем плоскость Π, включающую в себя вектор $Y_1^0 + e$, такую, что $\Pi(X_i^\beta) \neq \Pi(Y_1^\beta)$, $\beta \in M_1$, где под $\Pi(z)$ понимается проекция точки $z \in \mathbb{R}^k$ на плоскость Π. Такая плоскость найдется в силу конечности числа преследователей n. Затем в плоскости Π выбираем единичный вектор $e_\perp$, перпендикулярный e против часовой стрелки. По $e, e_\perp$ как по орт-векторам получаем декартову систему координат, в которой и решаем задачу. Если задача мягкого убегания от проекций разрешима, то тем самым разрешима и исходная задача.

Далее в этом параграфе считаем, что

$$k = 2,\ c = 1, 2 \text{ и } z_c \text{ — } c\text{-ая координата вектора } z \in \mathbb{R}^2.$$

Пусть

$$l_c(t) = \Big|L_c(t)\Big|, \text{ где } L_c(t) = \Big\{\alpha \in I : x_{c\alpha}^{(m_1-1)}(t) < y_{c1}^{(m_1-1)}(t)\Big\},$$

$$q_c(t) = \Big|Q_c(t)\Big|, \text{ где } Q_c(t) = \Big\{\alpha \in I : x_{c\alpha}^{(m_1-1)}(t) = y_{c1}^{(m_1-1)}(t)\Big\}.$$

Зафиксируем положительные константы $\delta_1, \delta_2, \rho_1, \rho_2$ так, чтобы

$$\delta_1 - \frac{\rho_1}{4} > 0, \quad \delta_2 - \frac{\rho_2}{4} > 0 \text{ и } \sqrt{\Big(\delta_1 + 2\rho_1 n + \frac{\rho_1}{4}\Big)^2 + \Big(\delta_2 + 2\rho_2 n + \frac{\rho_2}{4}\Big)^2} \leqslant \gamma, \tag{2.1}$$

например:

$$\delta_c = \frac{3\rho_c}{4} > 0, \quad \rho_c = \frac{\gamma}{\sqrt{2}(2n+1)} > 0.$$

Лемма 1 (см. [9, лемма 1]). *Для любых $\rho > 0$, $\sigma, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q \in \mathbb{R}^1$, $q \geqslant 1$*

$$\max_{\omega\in\Omega} \min\big\{|\omega - \xi_1|, \ldots, |\omega - \xi_q|\big\} \geqslant \rho, \quad \textit{где } \Omega = \{\sigma + 2\rho b, b = 0, 1, \ldots, q\}.$$

Для каждого момента $t \in [t_0, \infty)$ определим множество

$$\Omega_c(t) = \big\{\delta_c + 2\rho_c l_c(t) + 2\rho_c b, b = 0, 1, \ldots, q_c(t)\big\}$$

и величину $\omega_c(t) \in \Omega_c(t)$ следующим образом: если $q_c(t) = 0$, тогда $\omega_c(t) = \delta_c + 2\rho_c l_c(t)$; если $q_c(t) \geqslant 1$, тогда $\omega_c(t)$ определяется из условия

$$\min_{\alpha\in Q_c(t)} \Big\{\Big|\omega_c(t) - x_{c\alpha}^{(m_1)}(t)\Big|\Big\} = \max_{\omega\in\Omega_c(t)} \min_{\alpha\in Q_c(t)} \Big\{\Big|\omega - x_{c\alpha}^{(m_1)}(t)\Big|\Big\} \geqslant \rho_c. \tag{2.2}$$

Неравенство в (2.2) следует из леммы 1. Для определенности: если существует несколько значений $\omega_c(t)$, то возьмем максимальное из них. Таким образом, для всех $t \in [t_0, \infty)$ величина $\omega_c(t)$ определена однозначно и

$$\omega_c(t) \in \Omega_c^* = \big\{\delta_c + 2\rho_c b,\ b = 0, 1, \ldots, n\big\}. \tag{2.3}$$

Лемма 2. *Пусть выполнены предположения 1 и 2. Тогда для всех $t \in [t_0, \infty)$, $T > 0$ и $r \in M_1$ справедливы следующие утверждения:*

1) *область достижимости $x_i^{(r)}$ в момент $t + T$ включена в множество*

$$\mathfrak{D}\left(\sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_i^{(r+k)}(t)T^k}{k!}, \frac{T^{n_i-r}}{(n_i-r)!}\right);$$

2) *область достижимости $x_{ci}^{(r)}$ в момент $t + T$ включена в отрезок*

$$\left[\sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} - \frac{T^{n_i-r}}{(n_i-r)!}, \sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + \frac{T^{n_i-r}}{(n_i-r)!}\right];$$

3) *если $v_c(\tau) = v_c(t)$ для всех $\tau \in [t, t+T]$, то*

$$y_{c1}^{(r)}(t+T) = \sum_{k=0}^{m_1-r-1} \frac{y_{c1}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + v_c(t)\frac{T^{m_1-r}}{(m_1-r)!}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из системы (1.1) и предположения 2 получаем, что

$$\left|x_i^{(n_i)}(s)\right| = \left|f_i(x_i^{(\alpha_i)}(s), \alpha_i \in N_i, u_i(s), s)\right| \leqslant G = 1 \text{ для почти всех } s \in [t, t+T].$$

Интегрированием этого неравенства на интервале $[t, t+T]$ доказываются утверждения 1 и 2. Утверждение 3 леммы проверяется непосредственным интегрированием на интервале $[t, t+T]$ уравнения движения убегающего (1.1) при указанном условии на его управление.

Лемма доказана. □

Для каждого $t \in [t_0, \infty)$ определим функции $T_{ci}^r(t) \geqslant 0$, $r \in M_1$, как время, в течение которого не могут совпасть c-ые координаты $x_i^{(r)}(t)$ и $y_1^{(r)}(t)$, то есть

$$x_{ci}^{(r)}(s) \neq y_{c1}^{(r)}(s) \text{ для всех } s \in [t, t+T_{ci}^r(t)),$$

при условии что E_1 использует управление $v_c(\tau) = v_c(t)$ для всех $\tau \in [t, \infty)$.

Возможны три случая:

1) $y_{c1}^{(r)}(t) < x_{ci}^{(r)}(t)$; из (1.1) и леммы 2 получим, что $T_{ci}^r(t)$ есть наименьшее положительное (относительно T) решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{m_1-r-1} \frac{y_{c1}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + v_c(t)\frac{T^{m_1-r}}{(m_1-r)!} = \sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} - \frac{T^{n_i-r}}{(n_i-r)!}\ ;$$

2) $y_{c1}^{(r)}(t) = x_{ci}^{(r)}(t)$; положим $T_{ci}^r(t) = 0$;

3) $y_{c1}^{(r)}(t) > x_{ci}^{(r)}(t)$; тогда $T_{ci}^r(t)$ есть наименьшее положительное решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{m_1-r-1} \frac{y_{c1}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + v_c(t)\frac{T^{m_1-r}}{(m_1-r)!} = \sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + \frac{T^{n_i-r}}{(n_i-r)!}.$$

Таким образом, для всех $t \in [t_0, \infty)$ и $r \in M_1$ значение $T_{ci}^r(t)$ определяется как минимальный неотрицательный (относительно T) корень многочлена

$$\begin{gathered} 0 = -\operatorname{sign}\left(y_{c1}^{(r)}(t) - x_{ci}^{(r)}(t)\right)\frac{T^{n_i-r}}{(n_i-r)!} - \sum_{k=m_1-r+1}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + \\ + \left(v_c(t) - x_{ci}^{(m_1)}(t)\right)\frac{T^{m_1-r}}{(m_1-r)!} + \sum_{k=1}^{m_1-r-1} \frac{\left(y_{c1}^{(r+k)}(t) - x_{ci}^{(r+k)}(t)\right)T^k}{k!} + \left(y_{c1}^{(r)}(t) - x_{ci}^{(r)}(t)\right), \end{gathered} \tag{2.4}$$

который существует, так как данное уравнение представимо в виде

$$T^{n_i-r} + a_1 T^{n_i-r-1} + \dots + a_{n_i-r-1}T = a_{n_i-r}, \text{ где } a_{n_i-r} \geqslant 0.$$

Для всех $t \in [t_0, \infty)$ и $r \in M_1$ определим функции

$$J_{ci}^r(t) = \min\Big\{T_{d\alpha}^p(t),\ (d, \alpha, p) \in \{1, 2\} \times I \times M_1 \text{ и } (d, \alpha, p) \neq (c, i, r)\Big\}.$$

Иначе говоря, $J_{ci}^r(t) \geqslant 0$ при каждом $t \in [t_0, \infty)$ есть минимальное из всех определенных выше значений $T_{d\alpha}^p(t)$, $(d, \alpha, p) \in \{1, 2\} \times I \times M_1$, за исключением только одного $T_{ci}^r(t)$, то есть минимум выбирается из $2nm_1 - 1$ чисел.

Для каждого $r \in M_1$ определим функции

$$K_{ci}^r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } y_{c1}^{(r)}(t) < x_{ci}^{(r)}(t) \text{ и для } T = T_{ci}^r(t) \text{ выполнено неравенство} \\ & \sum\limits_{k=0}^{m_1-r-1} \frac{y_{c1}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + \left(v_c(t) + \frac{\rho_c}{8}\right)\frac{T^{m_1-r}}{(m_1-r)!} \geqslant \sum\limits_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + \frac{T^{n_i-r}}{(n_i-r)!}; \\ -1, & \text{если } y_{c1}^{(r)}(t) > x_{ci}^{(r)}(t) \text{ и для } T = T_{ci}^r(t) \text{ выполнено неравенство} \\ & \sum\limits_{k=0}^{m_1-r-1} \frac{y_{c1}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + \left(v_c(t) - \frac{\rho_c}{8}\right)\frac{T^{m_1-r}}{(m_1-r)!} \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} - \frac{T^{n_i-r}}{(n_i-r)!}; \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Лемма 3. *Пусть выполнены предположения* 1, 2 *и убегающий* E_1 *использует произвольное постоянное управление. Тогда для любого допустимого управления* $u_i(t)$ *преследователя* P_i *и* $r \in M_1$ *справедливы следующие утверждения:*

1) *если для* $t > t_0$ *и некоторого* $\sigma > 0$

$$y_{c1}^{(r)}(\tau) < x_{ci}^{(r)}(\tau) \ \Big\{y_{c1}^{(r)}(\tau) > x_{ci}^{(r)}(\tau)\Big\} \text{ для всех } \tau \in [t-\sigma, t), \quad y_{c1}^{(r)}(t) = x_{ci}^{(r)}(t),$$
$$y_d^{(r)}(\tau) \neq x_{di}^{(r)}(\tau) \text{ для всех } \tau \in [t-\sigma, t], \text{ где } d \in \{1,2\}\backslash\{c\},$$

то найдется $\varepsilon \in (0, \sigma]$ *такое, что*

$$K_{ci}^r(\tau) = 1 \ \Big\{K_{ci}^r(\tau) = -1\Big\} \text{ и } T_{di}^r(\tau) > T_{ci}^r(\tau) \text{ для всех } \tau \in [t-\varepsilon, t);$$

2) *если для* $t > t_0$ *и некоторого* $\sigma > 0$

$$y_{11}^{(r)}(\tau) \neq x_{1i}^{(r)}(\tau), \ y_{21}^{(r)}(\tau) \neq x_{2i}^{(r)}(\tau) \text{ для всех } \tau \in [t-\sigma, t), \quad y_1^{(r)}(t) = x_i^{(r)}(t),$$

то найдется $\varepsilon \in (0, \sigma]$ *такое, что*

$$K_{1i}^r(\tau) \neq 0 \text{ и } T_{2i}^r(\tau) \geqslant T_{1i}^r(\tau) > 0 \text{ для всех } \tau \in [t-\varepsilon, t) \quad \text{или}$$

$$K_{2i}^r(\tau) \neq 0 \text{ и } T_{1i}^r(\tau) \geqslant T_{2i}^r(\tau) > 0 \text{ для всех } \tau \in [t-\varepsilon, t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.4) и условий леммы следует непрерывность функций $T_{1i}^r(\tau)$, $T_{2i}^r(\tau)$ для всех $\tau \in [t_0, \infty)$.

1. Пусть

$$y_{c1}^{(r)}(\tau) < x_{ci}^{(r)}(\tau), \ \tau \in [t-\sigma, t), \quad y_d^{(r)}(\tau) \neq x_{di}^{(r)}(\tau), \ \tau \in [t-\sigma, t],$$
$$y_{c1}^{(r)}(t) = x_{ci}^{(r)}(t), \quad y_d^{(r)}(t) \neq x_{di}^{(r)}(t).$$

В этом случае

$$T_{ci}^r(t) = 0, \quad T_{di}^r(t) > 0.$$

Учитывая непрерывность, получаем, что существует $\varepsilon \in (0, \sigma]$ такое, что

$$T_{di}^r(\tau) > T_{ci}^r(\tau), \quad \frac{\rho_c}{8} \geqslant 2\frac{(m_1-r)!}{(n_i-r)!}(T_{ci}^r(\tau))^{n_i-m_1}, \quad \tau \in [t-\varepsilon, t).$$

Из (2.5) следует, что $K_{ci}^r(\tau) = 1$, $\tau \in [t-\varepsilon, t)$, если

$$\sum_{k=0}^{m_1-r-1} \frac{y_{c1}^{(r+k)}(\tau)(T_{ci}^r(\tau))^k}{k!} + \Big(v_c(\tau) + \frac{\rho_c}{8}\Big)\frac{(T_{ci}^r(\tau))^{m_1-r}}{(m_1-r)!} \geqslant \sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(\tau)(T_{ci}^r(\tau))^k}{k!} + \frac{(T_{ci}^r(\tau))^{n_i-r}}{(n_i-r)!},$$

что эквивалентно неравенству

$$\left[\left(\sum_{k=0}^{m_1-r-1} \frac{y_{c1}^{(r+k)}(\tau)(T_{ci}^r(\tau))^k}{k!} + v_c(\tau)\frac{(T_{ci}^r(\tau))^{m_1-r}}{(m_1-r)!}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(\tau)(T_{ci}^r(\tau))^k}{k!} - \frac{(T_{ci}^r(\tau))^{n_i-r}}{(n_i-r)!}\right)\right] +$$
$$+\left[\left(\frac{\rho_c}{8} - 2\frac{(m_1-r)!}{(n_i-r)!}(T_{ci}^r(\tau))^{n_i-m_1}\right)\frac{(T_{ci}^r(\tau))^{m_1-r}}{(m_1-r)!}\right] \geqslant 0,$$

которое выполнено, так как первое слагаемое равно 0 по определению функции $T_{ci}^r(\tau)$, а второе неотрицательно по выбору ε.

Второй случай рассматривается аналогично. Утверждение 1 доказано.

2. Имеем

$$T_{1i}^r(\tau) > 0, \ T_{2i}^r(\tau) > 0, \ \tau \in [t-\sigma, t), \quad T_{1i}^r(t) = T_{2i}^r(t) = 0.$$

Учитывая непрерывность, получаем, что существует $\varepsilon \in (0,\sigma]$ такое, что для всех $\tau \in [t-\varepsilon, t)$

$$\left(\frac{\rho_c}{16}\frac{(n_i-r)!}{(m_1-r)!}\right)^{\frac{1}{n_i-m_1}} \geqslant T^r_{2i}(\tau) \geqslant T^r_{1i}(\tau) > 0 \text{ или } \left(\frac{\rho_c}{16}\frac{(n_i-r)!}{(m_1-r)!}\right)^{\frac{1}{n_i-m_1}} \geqslant T^r_{1i}(\tau) \geqslant T^r_{2i}(\tau) > 0.$$

Аналогично утверждению 1 для таких ε доказывается, что

$$K^r_{1i}(\tau) \neq 0 \text{ или } K^r_{2i}(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [t-\varepsilon, t).$$

Утверждение 2 и лемма доказаны полностью. □

Для всех $t \in [t_0, \infty)$ и $r \in M_1$ определим функции

$$B^r_{1i}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } K^r_{1i}(t) \neq 0,\ J^r_{1i}(t) \geqslant T^r_{1i}(t), \\ & B^p_{1\alpha}(t) = B^p_{2\alpha}(t) = 0 \\ & \text{для всех } \alpha \in I \text{ и } p = r+1, r+2, \ldots, m_1-1, \\ & B^r_{11}(t) = B^r_{12}(t) = \cdots = B^r_{1i-1}(t) = 0, \\ 0 & \text{— в остальных случаях,} \end{cases} \tag{2.6}$$

$$B^r_{2i}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } K^r_{2i}(t) \neq 0,\ J^r_{2i}(t) \geqslant T^r_{2i}(t), \\ & B^p_{1\alpha}(t) = B^p_{2\alpha}(t) = B^r_{1\alpha}(t) = 0 \\ & \text{для всех } \alpha \in I \text{ и } p = r+1, r+2, \ldots, m_1-1, \\ & B^r_{21}(t) = B^r_{22}(t) = \cdots = B^r_{2i-1}(t) = 0, \\ 0 & \text{— в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Из (2.6), (2.7) следует, что в каждый момент $t \in [t_0, \infty)$ из $2nm_1$ функций B^r_{ci} не более чем одна обращается в 1. Вычисление функций B^r_{ci} можно проводить в следующем порядке:

$$\begin{array}{llllllll} B^{m_1-1}_{11}, & B^{m_1-1}_{12}, & \ldots, & B^{m_1-1}_{1n}, & B^{m_1-1}_{21}, & B^{m_1-1}_{22}, & \ldots, & B^{m_1-1}_{2n}, \\ B^{m_1-2}_{11}, & B^{m_1-2}_{12}, & \ldots, & B^{m_1-2}_{1n}, & B^{m_1-2}_{21}, & B^{m_1-2}_{22}, & \ldots, & B^{m_1-2}_{2n}, \quad \ldots, \\ B^{0}_{11}, & B^{0}_{12}, & \ldots, & B^{0}_{1n}, & B^{0}_{21}, & B^{0}_{22}, & \ldots, & B^{0}_{2n}. \end{array}$$

Так дойдем до функции, равной 1 или до B^0_{2n}. Если использовать эту схему, то из (2.6), (2.7) следует, что для каждой функций B^r_{ci} достаточно проверять условия $K^r_{ci}(t) \neq 0,\ J^r_{ci}(t) \geqslant T^r_{ci}(t)$ (если они выполняются, то $B^r_{ci}(t) = 1$, иначе $B^r_{ci}(t) = 0$).

Определяем управление $v(t)$ убегающего E_1 следующим образом:

$$v_c(t) = \begin{cases} \omega_c(\tau^c_{2b}), & t \in [\tau^c_{2b}, \tau^c_{2b+1}), \text{ где} \\ & \tau^c_{2b+1} \geqslant \tau^c_{2b} \text{ — момент, когда впервые найдутся} \\ & \alpha \in I,\ r \in M_1:\ B^r_{c\alpha}(\tau^c_{2b+1}) = 1 \text{ и } v_d(\tau^c_{2b+1}) \in \Omega^*_d; \\ \omega_c(\tau^c_{2b+1}) + K^r_{c\alpha}(\tau^c_{2b+1})\dfrac{\rho_c}{4}, & t \in [\tau^c_{2b+1}, \tau^c_{2b+2}), \text{ где} \\ & \tau^c_{2b+2} > \tau^c_{2b+1} \text{ — момент, когда впервые} \\ & \text{найдется } \beta \in I:\ y^{(r)}_{c1}(\tau^c_{2b+2}) = x^{(r)}_{c\beta}(\tau^c_{2b+2}). \end{cases} \tag{2.8}$$

Здесь $\tau^c_0 = t_0$, $d \in \{1,2\}\backslash\{c\}$, $b = 0,1,2,\ldots$; для определенности: если найдется несколько значений $\alpha \in I$, удовлетворяющих указанному свойству, то возьмем минимальное из них.

Для доказательства нижеследующих утверждений определим числовую последовательность t^c_b следующим образом: $t^c_0 = t_0$; если $\tau^c_{2a+1} > t^c_{b-1}$ — момент, когда впервые в (2.8) $r = m_1 - 1$, тогда $t^c_b = \tau^c_{2a+2}$ $(b = 1, 2, \ldots)$.

Далее считаем, что управление $v(t)$ и последовательности $\{\tau^c_b\}^{b_c}_{b=0}$ определены согласно (2.8), при этом либо $b_c < \infty$, либо $b_c = \infty$, а последовательности $\{t^c_b\}^{b^*_c}_{b=0} \subset \{\tau^c_b\}^{b_c}_{b=0}$ определены как описано выше, при этом либо $b^*_c < \infty$, либо $b^*_c = \infty$.

Обозначим через $\div$ операцию деления нацело.

Лемма 4. *Пусть выполнены предположения 1, 2. Тогда для любых допустимых управлений $u_i(t)$ преследователей P_i выполнены следующие утверждения:*

1) *если* $b_1 \geqslant 2$ *и* $b_2 \geqslant 2$, *то*

$$\{\tau^1_{2b}\}_{b=1}^{b_1 \div 2} \bigcap \{\tau^2_{2b}\}_{b=1}^{b_2 \div 2} = \varnothing;$$

2) *если* $b_c \geqslant 2$, *то*

$$y^{(r)}_{c1}(t) \neq x^{(r)}_{ci}(t) \text{ для всех } r \in M_1 \text{ и } t \in \bigcup_{b=0}^{b_c \div 2 - 1} (\tau^c_{2b}, \tau^c_{2b+2});$$

3) $v_c(\tau) \in \Big[\delta_c - \dfrac{\rho_c}{4}, \delta_c + 2\rho_c n + \dfrac{\rho_c}{4}\Big]$ *для всех* $\tau \in \{\tau^c_b\}_{b=0}^{b_c}$;

4) *если* $b_c = \infty$, *то и* $b^*_c = \infty$;

5) $v_c(t^c_b) - \dfrac{\rho_c}{4} \leqslant v_c(t) \leqslant v_c(t^c_b) + \dfrac{\rho_c}{4}$ *для всех* $t \in [t^c_b, t^c_{b+1})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Из формулы (2.8) следует, что $\tau^1_{2p+1} \neq \tau^2_{2q+1}$ для всех $p, q \geqslant 0$, при которых $\tau^1_{2p+1}, \tau^2_{2q+1}$ определены, поскольку выше было отмечено, что при каждом $t \geqslant t_0$ из $2nm_1$ функций B^r_{ci} не более чем одна обращается в 1.

Пусть наступил момент τ^1_{2p+1}, тогда из (2.8), (2.6), (2.5), (2.3) получим, что

$$v_1(t) = v_1(\tau^1_{2p+1}) + K^r_{1\alpha}(\tau^1_{2p+1})\frac{\rho_1}{4} \notin \Omega^1_*, \quad t \in (\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}).$$

Отсюда и из сказанного выше следует, что

$$\tau^2_{2q+1} \notin [\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}), \quad v_2(t) = v_2(\tau^1_{2p+1}), \quad t \in (\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}).$$

Объединяем

$$\begin{cases} v_1(t) = v_1(\tau^1_{2p+1}) + K^r_{1\alpha}(\tau^1_{2p+1})\dfrac{\rho_1}{4}, \\ v_2(t) = v_2(\tau^1_{2p+1}), \end{cases} \quad t \in (\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}),$$

и получаем систему

$$\begin{cases} \tau^1_{2p+2} \in (\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+1} + T^r_{1\alpha}(\tau^1_{2p+1})), \\ J^r_{1\alpha}(\tau^1_{2p+1}) \geqslant T^r_{1\alpha}(\tau^1_{2p+1}), \end{cases}$$

из которой следует, что

$$y^{(r)}_{21}(t) \neq x^{(r)}_{2i}(t) \text{ для всех } r \in M_1, \ t \in [\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}] \text{ и } \tau^2_{2q} \notin [\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}].$$

Пусть наступил момент времени τ^2_{2q+1}; аналогично получим, что

$$y^{(r)}_{11}(t) \neq x^{(r)}_{1i}(t) \text{ для всех } r \in M_1, \ t \in [\tau^2_{2q+1}, \tau^2_{2q+2}] \text{ и } \tau^1_{2p} \notin [\tau^2_{2q+1}, \tau^2_{2q+2}].$$

Утверждение 1 доказано.

2. Докажем, что для всех $r \in M_1$ и произвольного $p \in \{0, 1, \ldots, b_1 \div 2 - 1\}$

$$y^{(r)}_{11}(t) \neq x^{(r)}_{1i}(t) \text{ для всех } t \in (\tau^1_{2p}, \tau^1_{2p+2}).$$

Из леммы 3 следует, что

$$y^{(r)}_{11}(t) \neq x^{(r)}_{1i}(t), \ t \in (\tau^1_{2p}, \min\{\tau^1_{2p+1}, \tau^2_{2q+1}\}).$$

Если $\min\{\tau^1_{2p+1}, \tau^2_{2q+1}\} = \tau^1_{2p+1}$, тогда утверждение доказано.

Пусть $\min\{\tau^1_{2p+1}, \tau^2_{2q+1}\} = \tau^2_{2q+1}$. В доказательстве утверждения 1 данной леммы показано, что в этом случае

$$y^{(r)}_{11}(t) \neq x^{(r)}_{1i}(t), \quad t \in [\tau^2_{2q+1}, \tau^2_{2(q+1)}].$$

Теперь, снова применяя лемму 3, получаем, что

$$y_{11}^{(r)}(t) \neq x_{1i}^{(r)}(t), \quad t \in (\tau_{2(q+1)}^2, \min\{\tau_{2p+1}^1, \tau_{2(q+1)+1}^2\}).$$

Продолжая далее, получим, что для некоторого l значение $\min\{\tau_{2p+1}^1, \tau_{2(q+l)+1}^2\} = \tau_{2p+1}^1$.

Аналогично доказывается, что

$$y_{21}^{(r)}(t) \neq x_{2i}^{(r)}(t) \text{ для всех } t \in (\tau_{2q}^2, \tau_{2q+2}^2).$$

Утверждение 2 доказано.

3. Из (2.3) и (2.8) получим, что $v_c(\tau_{2b}^c) \in \Omega_c^* \subset [\delta_c, \delta_c + 2\rho_c n]$ и

$$v_c(\tau_{2b+1}^c) = v_c(\tau_{2b}^c) \pm \rho_c/4 \in [\delta_c - \rho_c/4, \delta_c + 2\rho_c n + \rho_c/4].$$

4. Если $m_1 = 1$, то $\{t_b^c\}_{b=0}^{b_c^*} = \{\tau_{2b}^c\}_{b=0}^{\infty}$, откуда $b_c^* = \infty$.

Пусть $m_1 = 2$. Предположим, что утверждение не выполнено, то есть $b_c = \infty$ и $b_c^* < \infty$. Следовательно, найдется номер p такой, что при любом $b \geqslant p$ для всех i выполнено равенство $B_{ci}^1(\tau_{2b+1}^c) = 0$ и для некоторого $\alpha \in I$ имеет место равенство $B_{c\alpha}^0(\tau_{2b+1}^c) = 0$. Из утверждения 2 этой леммы следует, без потери общности, что найдется $a \in \{0, 1, \ldots, n\}$ такое, что для всех $t \geqslant \tau_{2(p+1)}^c$ выполнены неравенства

$$\dot{x}_{c1}(t),\ \dot{x}_{c2}(t), \ldots, \dot{x}_{ca}(t) < \dot{y}_{c1}(t) < \dot{x}_{ca+1}(t), \dot{x}_{ca+2}(t), \ldots, \dot{x}_{cn}(t).$$

Из последнего следует существование номера q такого, что для всех $t \geqslant \tau_{2(p+q)}^c$ имеют место неравенства

$$x_{c1}(t),\ x_{c2}(t), \ldots, x_{ck}(t) < y_{c1}(t) < x_{ca+1}(t), x_{ca+2}(t), \ldots, x_{cn}(t).$$

Объединяя два неравенства для $t \geqslant \tau_{2(p+q)}^c$, получим, что $b_c < \infty$. Получили противоречие. Случай $m_1 \geqslant 3$ рассматривается аналогично. Утверждение 4 доказано.

5. Пусть $t_b^c = \tau_{2p}^c \leqslant \tau_{2p+1}^c < \tau_{2(p+1)}^c \leqslant \tau_{2(p+1)+1}^c < \cdots < \tau_{2(p+q)}^c = t_{b+1}^c$, тогда, применяя утверждение 2 этой леммы и (2.8), получим, что

$$v_c(t_b^c) = v_c(\tau_{2p}^c), \quad v_c(\tau_{2p+1}^c) = v_c(t_b^c) \pm \rho_c/4, \quad v_c(\tau_{2(p+1)}^c) = v_c(t_b^c), \quad \ldots,$$

$$v_c(\tau_{2(p+q-1)}^c) = v_c(t_b^c), \quad v_c(\tau_{2(p+q-1)+1}^c) = v_c(t_b^c) \pm \rho_c/4.$$

Из последнего следует справедливость утверждения 5. Лемма доказана. □

Докажем, что формула (2.8) определяет $v(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$. Для этого достаточно показать, что имеет место следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть выполнены предположения* 1, 2. *Тогда для любого набора допустимых управлений $u_i(t)$ преследователей P_i либо значение b_c конечно, либо* $\lim\limits_{b\to\infty} \tau_b^c = \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай $c = 1$. Для каждого набора допустимых управлений $u_i(t)$ возможен один из следующих двух случаев.

I. Алгоритм (2.8) применяется конечное число раз, поэтому значение b_1 конечно.

II. Алгоритм (2.8) применяется бесконечное число раз. Требуется доказать, что полученная по этой формуле последовательность $\{\tau_b^1\}_{b=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{b\to\infty} \tau_b^1 = \infty$. Предположим противное, то есть существует набор допустимых управлений $u_i^*(t)$ такой, что

$$\lim_{b\to\infty} \tau_b^1 = \tau^* < \infty.$$

II.1. Рассмотрим числа $x_{1i}^{(m_1-1)}(\tau^*)$. Пусть они принимают $r \in I$ различных значений

$$\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_r.$$

Не теряя общности, считаем, что

$$x_{1s}^{(m_1-1)}(\tau^*) = \xi_a,\ s \in S_a,\ \text{где } S_a = \{s_{a-1}+1, s_{a-1}+2, \ldots, s_a\},\ a = 1,2,\ldots,r\ (s_0 = 0, s_r = n).$$

Для каждого $\varepsilon \in [0,\tau^*]$ определим множества

$$H_a(\varepsilon) = \bigcup_{s\in S_a} \Big\{ z \in \mathbb{R}^1 : z = x_{1s}^{(m_1-1)}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*] \Big\},\ a = 1,2,\ldots,r.$$

Пусть $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^1$, обозначим

$$\operatorname{dist}(G_1,G_2) = \inf_{g_1\in G_1,\ g_2\in G_2} |g_1 - g_2|,$$

$$h(\varepsilon) = \min\Big\{ \operatorname{dist}\big(H_a(\varepsilon), H_{a+1}(\varepsilon)\big),\ a = 1,2,\ldots,r-1 \Big\},$$

$$H(\varepsilon) = h(\varepsilon) - 2(\delta_1 + 2\rho_1 n + \rho_1/4)\varepsilon,\ \varepsilon \in [0,\tau^*].$$

В силу непрерывности функции H и условия $h(0) > 0$ получаем, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $H(\varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1]$. Отсюда

$$\frac{h(\varepsilon)}{\delta_1 + 2\rho_1 n + \rho_1/4} > 2\varepsilon \text{ для всех } \varepsilon \in [0,\varepsilon_1]. \tag{2.9}$$

II.2. Если $|S_a| = 1$, тогда полагаем $\varepsilon_2^a = \infty$.

Пусть $|S_a| \geqslant 2$ и $\alpha,\beta \in S_a$. Рассмотрим значения $x_{1\alpha}^{(m_1-1)}, x_{1\beta}^{(m_1-1)}, x_{1\alpha}^{(m_1)}, x_{1\beta}^{(m_1)}$. Отметим, что

$$x_{1\alpha}^{(m_1-1)}(\tau^*) = x_{1\beta}^{(m_1-1)}(\tau^*) = \xi_a. \tag{2.10}$$

Разберем всевозможные случаи их взаимного расположения:

1) $x_{1\alpha}^{(m_1)}(\tau^*) > x_{1\beta}^{(m_1)}(\tau^*)$; в силу непрерывности этих функций существует $\varepsilon > 0$ такое, что $x_{1\alpha}^{(m_1)}(t) > x_{1\beta}^{(m_1)}(t)$, $t \in [\tau^*-\varepsilon,\tau^*]$; кроме того, из (2.10) следует $x_{1\alpha}^{(m_1-1)}(t) < x_{1\beta}^{(m_1-1)}(t)$, $t \in [\tau^*-\varepsilon,\tau^*)$;

2) $x_{1\alpha}^{(m_1)}(\tau^*) < x_{1\beta}^{(m_1)}(\tau^*)$; аналогично случаю 1 существует $\varepsilon > 0$ такое, что $x_{1\alpha}^{(m_1)}(t) < x_{1\beta}^{(m_1)}(t)$, $x_{1\alpha}^{(m_1-1)}(t) > x_{1\beta}^{(m_1-1)}(t)$, $t \in [\tau^*-\varepsilon,\tau^*)$;

3) $x_{1\alpha}^{(m_1)}(\tau^*) = x_{1\beta}^{(m_1)}(\tau^*)$; этот случай имеет несколько вариантов; существует $\varepsilon > 0$, что:

3.1) $x_{1\alpha}^{(m_1)}(t) = x_{1\beta}^{(m_1)}(t)$, $t \in [\tau^*-\varepsilon,\tau^*]$, тогда и $x_{1\alpha}^{(m_1-1)}(t) = x_{1\beta}^{(m_1-1)}(t)$, $t \in [\tau^*-\varepsilon,\tau^*]$;

3.2) $x_{1\alpha}^{(m_1)}(t) > x_{1\beta}^{(m_1)}(t)$, $t \in [\tau^*-\varepsilon,\tau^*)$, тогда, подобно случаю 1, $x_{1\alpha}^{(m_1-1)}(t) < x_{1\beta}^{(m_1-1)}(t)$, $t \in [\tau^*-\varepsilon,\tau^*)$;

3.3) $x_{1\alpha}^{(m_1)}(t) < x_{1\beta}^{(m_1)}(t)$, $t \in [\tau^*-\varepsilon,\tau^*)$, тогда, подобно случаю 2, $x_{1\alpha}^{(m_1-1)}(t) > x_{1\beta}^{(m_1-1)}(t)$, $t \in [\tau^*-\varepsilon,\tau^*)$.

Теперь, перебирая все значения $x_{1s}^{(m_1-1)}$, $x_{1s}^{(m_1)}$, $s \in S_a$ попарно, как $x_{1\alpha}^{(m_1-1)}$, $x_{1\beta}^{(m_1-1)}$, $x_{1\alpha}^{(m_1)}$, $x_{1\beta}^{(m_1)}$, получим, что существует $\varepsilon_2^a > 0$ такое, что расположение $x_{1s}^{(m_1-1)}, x_{1s}^{(m_1)}$, $s \in S_a$ друг относительно друга не изменяется на $[\tau^*-\varepsilon_2^a,\tau^*)$. Последнее, без потери общности, означает, что

$$\begin{array}{c} x_{1s_{a-1}+1}^{(m_1-1)}(t) \leqq x_{1s_{a-1}+2}^{(m_1-1)}(t) \leqq \cdots \leqq x_{1s_a}^{(m_1-1)}(t), \\ x_{1s_{a-1}+1}^{(m_1)}(t) \geqq x_{1s_{a-1}+2}^{(m_1)}(t) \geqq \cdots \geqq x_{1s_a}^{(m_1)}(t), \end{array} \quad t \in [\tau^*-\varepsilon_2^a,\tau^*). \tag{2.11}$$

В (2.11) знаки «$\leqq$» и «$\geqq$» означают, что на всем промежутке $[\tau^*-\varepsilon_2^a,\tau^*)$, в первой строке формулы, знак либо «$<$», либо «$=$», а во второй строке знак «$>$» соответствует знаку «$<$» первой строки, знак «$=$» соответствует знаку «$=$».

Выбираем $\varepsilon_2 = \min\big\{\varepsilon_2^1, \varepsilon_2^2, \ldots, \varepsilon_2^r\big\} > 0$.

II.3. Из непрерывности $x_{1i}^{(m_1)}(t)$ следует существование $\varepsilon_3^i > 0$ такого, что

$$\left|x_{1i}^{(m_1)}(\tau^* - \varepsilon') - x_{1i}^{(m_1)}(\tau^* - \varepsilon'')\right| < \rho_1/4 \quad \text{для всех } \ \varepsilon', \varepsilon'' \in [0, \varepsilon_3^i). \tag{2.12}$$

Возьмем $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_3^1, \varepsilon_3^2, \ldots, \varepsilon_3^n\} > 0$.

II.4. Определим

$$\varepsilon^* = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} > 0. \tag{2.13}$$

Из предположения, что $\lim\limits_{b\to\infty} \tau_b^1 = \tau^*$, следует, что до момента $\tau^* - \varepsilon^* < \tau^*$ управление $v_1(t)$ определено и существует номер p такой, что $t_p^1, t_{p+1}^1, t_{p+2}^1, \dots \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*)$, где согласно лемме 4 имеет место включение $\{t_b^1\}_{b=0}^\infty \subset \{\tau_b^1\}_{b=0}^\infty$.

Рассмотрим игру Γ начиная с момента $\tau^* - \varepsilon^*$ и докажем, что найдется номер q такой, что $t_{(p+q)}^1 > \tau^*$. Тем самым получим противоречие с предположением о конечном значении $\lim\limits_{b\to\infty} \tau_b^1$. Таким образом, лемма будет доказана полностью.

Итак, момент $t_p^1 \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*)$. Необходимо включение $y_{11}^{(m_1-1)}(t_p^1) \in H_a(\varepsilon^*)$ при некотором значении $a \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Напомним, что

$$x_{1s}^{(m_1-1)}(t) \in H_a(\varepsilon^*), \quad t \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*], \quad s \in S_a.$$

Существует хотя бы одно $\alpha \in S_a$ такое, что $y_{11}^{(m_1-1)}(t_p^1) = x_{1\alpha}^{(m_1-1)}(t_p^1)$.

Из (2.2) следует, что возможны два случая.

1. $v_1(t_p^1) \geqslant x_{1\alpha}^{(m_1)}(t_p^1) + \rho_1$ (α — это один или несколько последовательных индексов из S_a). Из леммы 4 следует, что

$$v_1(t_p^1) - \rho_1/4 \leqslant v_1(t) \leqslant v_1(t_p^1) + \rho_1/4, \ t \in [t_p^1, t_{p+1}^1).$$

Отсюда, учитывая (2.12), (2.13), получаем

$$v_1(t) > x_{1\alpha}^{(m_1)}(t) + \rho_1/2 \text{ для всех } t \in [t_p^1, t_{p+1}^1). \tag{2.14}$$

В силу (2.11) в момент t_{p+1}^1 должно выполниться одно из двух условий:

а) $y_{11}^{(m_1-1)}(t_{p+1}^1) = x_{1\alpha}^{(m_1-1)}(t_{p+1}^1)$; этот случай невозможен в силу (2.14);

б) $y_{11}^{(m_1-1)}(t_{p+1}^1) = x_{1\beta}^{(m_1-1)}(t_{p+1}^1)$, $\beta > \alpha$ (β — один или несколько последовательных индексов из S_a). Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \left|x_{1\beta}^{(m_1)}(t_{p+1}^1) - x_{1\beta}^{(m_1)}(t)\right| < \rho_1/4, \\ v_1(t) - \rho_1/2 > x_{1\alpha}^{(m_1)}(t) > x_{1\beta}^{(m_1)}(t), \end{cases} \quad t \in [t_p, t_{p+1}), \tag{2.15}$$

в которой справедливость первого неравенства следует из (2.12) и (2.13), а второй цепочки неравенств — из (2.14) и (2.11). Из (2.15) получим, что

$$v_1(t) > x_{1\beta}^{(m_1)}(t_{p+1}^1) + \rho_1/4, \quad t \in [t_p, t_{p+1}).$$

Поэтому $v_1(t_{p+1}^1)$ по (2.8) будет определено так, что

$$v_1(t_{p+1}^1) \geqslant x_{1\beta}^{(m_1)}(t_{p+1}^1) + \rho_1.$$

Продолжая далее, получим, что существует момент t_{p+l}^1 такой, что

$$y_{11}^{(m_1-1)}(t_{p+l}^1) = x_{1s_a}^{(m_1-1)}(t_{p+l}^1), \quad v_1(t_{p+l}^1) \geqslant x_{1s_a}^{(m_1)}(t_{p+l}^1) + \rho_1. \tag{2.16}$$

Из (2.16) получаем, что

$$x_{1s}^{(m_1-1)}(t) < y_{11}^{(m_1-1)}(t), \quad t \in (t_{p+l}^1, \tau^*], \quad s \in S_a.$$

Значит, чтобы $t^1_{p+l+1} \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*)$, необходимо выполнение равенства

$$y_{11}^{(m_1-1)}(t^1_{p+l+1}) = x_{1\eta}^{(m_1-1)}(t^1_{p+l+1}), \quad \eta \in I \backslash S_a,$$

а это означает, что $y_{11}^{(m_1-1)}$ из множества $H_a(\varepsilon^*)$ должен попасть в множество $H_{a+1}(\varepsilon^*)$. Из (2.9) следует, что на это потребуется времени, даже при максимальном v_1, которое по лемме 4 равно $\delta_1 + 2\rho_1 n + \rho_1/4$, больше чем $2\varepsilon^*$, откуда $t^1_{p+l+1} - t^1_{p+l} > 2\varepsilon^*$. Итак, существует номер $q = l+1 : t^1_{p+q} > \tau^*$.

2. $v_1(t^1_p) \leqslant x_{1\alpha}^{(m_1)}(t^1_p) - \rho_1$ (α — это один или несколько последовательных индексов из S_a). Аналогично доказывается существование номера $q : t^1_{p+q} > \tau^*$.

Случай $c = 2$ рассматривается аналогично.

Лемма доказана. □

Из лемм 4 и 5 следует, что определенные по формуле (2.8) функции v_c таковы, что

$$v_c(t) \in \left[\delta_c - \frac{\rho_c}{4}, \delta_c + 2\rho_c n + \frac{\rho_c}{4}\right] \text{ для всех } t \in [t_0, \infty). \tag{2.17}$$

Таким образом, полностью определена стратегия убегающего E_1: в каждый момент времени $t \in [t_0, \infty)$ убегающий E_1 по алгоритму (2.8) определяет компоненты $v_1(t)$ и $v_2(t)$, тем самым полностью задает свое управление $v(t)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* 1, 2. *Тогда в игре* Γ *при* $m = 1$ *возможно мягкое убегание из любых начальных позиций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что стратегия убегающего, определяемая (2.8), является стратегией мягкого убегания.

1. Управление $v(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, принадлежит классу кусочно-постоянных функций и меняет значение в моменты $\tau \in \{\tau^1_b\}_{b=0}^{b_1} \bigcup \{\tau^2_b\}_{b=0}^{b_2}$. В силу (2.17), (2.1) выполнено

$$\|v(t)\| \leqslant \sqrt{(\delta_1 + 2\rho_1 n + \rho_1/4)^2 + (\delta_2 + 2\rho_2 n + \rho_2/4)^2} \leqslant \gamma.$$

2. Выполнение условия $x_i^{(r)}(t) \neq y_1^{(r)}(t)$ для всех $r \in M_1$ и $t \geqslant t_0$ следует из лемм 4 и 5.

Эти два утверждения полностью доказывают теорему. □

§ 3. Мягкое убегание всей жестко скоординированной группы (случай $m \geqslant 2$)

На основе стратегии мягкого убегания одного убегающего из любых начальных позиций построим стратегию $v(t)$ мягкого убегания для группы жестко скоординированных убегающих E_j из любых начальных позиций.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* 1, 2. *Тогда в игре* Γ *возможно мягкое убегание из любых начальных позиций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения

$$\begin{gathered} l = \max\{m_1, m_2, \ldots, m_m\}, \quad l_j = l - m_j, \\ w_j(t) = Y_j^0 + Y_j^1(t-t_0) + Y_j^2\frac{(t-t_0)^2}{2} + \cdots + Y_j^{m_j-1}\frac{(t-t_0)^{m_j-1}}{(m_j-1)!}. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Отметим, что для всех $\beta_j \in M_j$

$$\begin{aligned} &w_j^{(\beta_j)}(t) = Y_j^{\beta_j} + Y_j^{\beta_j+1}(t-t_0) + Y_j^{\beta_j+2}\frac{(t-t_0)^2}{2} + \cdots + Y_j^{m_j-1}\frac{(t-t_0)^{m_j-\beta_j-1}}{(m_j-\beta_j-1)!}, \\ &w_j^{(\beta_j)}(t_0) = Y_j^{\beta_j}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

а производные порядка $m_j, m_j+1, m_j+2, \ldots$ тождественно равны 0.

В $\mathbb{R}^k$ на интервале $[t_0, \infty)$ определим вспомогательную дифференциальную игру Γ^* $nm+1$ лиц: nm преследователей P_{ij} и убегающего E с законами движения и начальными условиями

$$\begin{gathered}
P_{ij}\colon \qquad \xi_{ij}^{(l_j+n_i)} = f_i\left(\xi_{ij}^{(l_j+\alpha_i)} + w_j^{(\alpha_i)}, \alpha_i \in N_i, u_i, t\right), \quad u_i \in U_i,\\
\xi_{ij}(t_0) = \Xi_{ij}^0 \neq 0, \quad \dot{\xi}_{ij}(t_0) = \Xi_{ij}^1 \neq 0, \quad \ldots, \quad \xi_{ij}^{(l_j-1)}(t_0) = \Xi_{ij}^{l_j-1} \neq 0,\\
\xi_{ij}^{(l_j)}(t_0) = X_i^0 - Y_j^0, \quad \xi_{ij}^{(l_j+1)}(t_0) = X_i^1 - Y_j^1, \quad \ldots, \quad \xi_{ij}^{(l_j+m_j-1)}(t_0) = X_i^{m_j-1} - Y_j^{m_j-1},\\
\xi_{ij}^{(l_j+m_j)}(t_0) = X_i^{m_j}, \quad \xi_{ij}^{(l_j+m_j+1)}(t_0) = X_i^{m_j+1}, \quad \ldots, \quad \xi_{ij}^{(l_j+n_i-1)}(t_0) = X_i^{n_i-1},\\
E\colon \qquad \eta^{(l)} = \vartheta, \quad \|\vartheta\| \leqslant \gamma,\\
\eta(t_0) = \dot{\eta}(t_0) = \cdots = \eta^{(l-1)}(t_0) = 0.
\end{gathered} \tag{3.3}$$

В игре Γ^* в каждый момент $t \in [t_0, \infty)$ предпишем преследователям P_{ij} использовать одно и то же управление, выбранное преследователем P_i в игре Γ, то есть допустимое управление $u_i(t)$ преследователя P_i в игре Γ, описываемой системой (1.1), и допустимое управление $u_i(t)$ преследователей P_{ij} в игре Γ^*, описываемой системой (3.3), полностью совпадают.

Покажем, что имеют место равенства

$$x_i^{(\beta_j)}(t) = \xi_{ij}^{(l_j+\beta_j)}(t) + w_j^{(\beta_j)}(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty) \text{ и } \beta_j \in M_j, \tag{3.4}$$

где $x_i(t)$ — траектория преследователя P_i, реализовавшаяся в игре Γ под воздействием допустимого управления $u_i(t)$.

Действительно, рассмотрим функцию

$$x_i(t) = \xi_{ij}^{(l_j)}(t) + w_j(t)$$

(независимость от j доказана ниже, поэтому в левой части равенства этот индекс не указываем). Тогда, следуя (3.1), (3.2) и (3.3), получим, что

$$\begin{gathered}
x_i^{(\beta_j)}(t) = \xi_{ij}^{(l_j+\beta_j)}(t) + w_j^{(\beta_j)}(t), \quad \beta_j \in M_j,\\
\text{откуда} \quad x_i^{(\beta_j)}(t_0) = X_i^{\beta_j} - Y_j^{\beta_j} + Y_j^{\beta_j} = X_i^{\beta_j}, \quad \beta_j \in M_j;\\
\text{далее,} \quad x_i^{(m_j)}(t) = \xi_{ij}^{(l_j+m_j)}(t), \quad x_i^{(m_j+1)}(t) = \xi_{ij}^{(l_j+m_j+1)}(t), \quad \ldots, \quad x_i^{(n_i-1)}(t) = \xi_{ij}^{(l_j+n_i-1)}(t),\\
\text{значит,} \quad x_i^{(m_j)}(t_0) = X_i^{m_j}, \quad x_i^{(m_j+1)}(t) = X_i^{m_j+1}, \quad \ldots, \quad x_i^{(n_i-1)}(t) = X_i^{n_i-1};\\
\text{наконец,} \quad x_i^{(n_i)} = \xi_{ij}^{(l_j+n_i)} = f_i\left(\xi_{ij}^{(l_j+\alpha_i)} + w_j^{(\alpha_i)}, \alpha_i \in N_i, u_i, t\right) = f_i\left(x_i^{(\alpha_i)}, \alpha_i \in N_i, u_i, t\right).
\end{gathered} \tag{3.5}$$

Проведенные вычисления (3.5) доказывают, что пара $(x_i(t), u_i(t))$ действительно описывает решение системы (1.1) для преследователя P_i в игре Γ и имеют место равенства (3.4).

Далее, для каждого допустимого управления $\vartheta(t)$ убегающего E в игре Γ^* непосредственным интегрированием системы (3.3) получим

$$\eta^{(l_j+\beta_j)}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{m_j-\beta_j-1}}{(m_j-\beta_j-1)!}\vartheta(s)\,ds \quad \text{для всех } t \in [t_0, \infty) \text{ и } \beta_j \in M_j. \tag{3.6}$$

Пусть $\vartheta(t)$ — допустимое управление, обеспечивающее мягкое убегание в игре Γ^*, выбранное убегающим E, откуда

$$\xi_{ij}^{(l_j+\beta_j)}(t) \neq \eta^{(l_j+\beta_j)}(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty) \text{ и } \beta_j \in M_j. \tag{3.7}$$

Определяем допустимое управление $v(t)$ убегающих E_j в игре Γ следующим образом:

$$v(t) = \vartheta(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

Тогда, интегрируя систему (1.1) с учетом последнего равенства и (3.6), получим

$$y_j^{(\beta_j)}(t) = \eta^{(l_j+\beta_j)}(t) + w_j^{(\beta_j)}(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty) \text{ и } \beta_j \in M_j. \tag{3.8}$$

Объединяя (3.4), (3.7), (3.8), получим, что в игре Γ

$$x_i^{(\beta_j)}(t) \neq y_j^{(\beta_j)}(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty) \text{ и } \beta_j \in M_j,$$

что и означает мягкое убегание всей группы жестко скоординированных убегающих.

Из построения управления $v(t)$ и теоремы 1 следует справедливость данной теоремы.

Теорема доказана. □

Замечание 1. Пусть в системе (1.1) ограничение на управление $v(t)$ убегающих E_j имеет вид $v \in V$, где V — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$ с непустой внутренностью. Тогда в игре Γ возможно мягкое убегание из любых начальных позиций при выполненных предположениях 1, 2.

Покажем, как при этом нужно изменить управление $v(t)$ для случая $m = 1$: если окажется, что $0 \in \operatorname{Int} V \neq \varnothing$, то найдется такое число $\gamma > 0$, что $\mathfrak{D}(0, \gamma) \subset V$ и, не увеличивая возможности убегающих, достаточно решить задачу с ограничением из (1.1); если $0 \notin \operatorname{Int} V \neq \varnothing$, то найдутся такие $z \in \mathbb{R}^k$ и $\gamma > 0$, что $\mathfrak{D}(z, \gamma) \subset V$. Пусть вектор $e = z/\|z\|$ (ранее выбирался произвольно) и положительные константы $\delta_1, \delta_2, \rho_1, \rho_2$ выбираются из условия (вместо (2.1))

$$\delta_1 - \frac{\rho_1}{4} > 0, \quad \delta_2 - \frac{\rho_2}{4} > 0 \quad \text{и}$$

$$\left[\delta_1 - \frac{\rho_1}{4}, \delta_1 + 2\rho_1 n + \frac{\rho_1}{4}\right] \times \left[\delta_2 - \frac{\rho_2}{4}, \delta_2 + 2\rho_2 n + \frac{\rho_2}{4}\right] \subset \mathfrak{D}(z, \gamma).$$

Это включение обеспечит выполнение условия $v(t) \in V$ для всех $t \in [t_0, \infty)$ (см. (2.17)), в остальном решение задачи о мягком убегании совпадает с ранее приведенным.

§ 4. Примеры конфликтно управляемых процессов

Пример 1. В $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) на интервале $[t_0, \infty)$ рассматривается игра Γ_1 102 лиц: 100 преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$ и 2 убегающих E_1, E_2 с законами движения

$$\begin{array}{llllll}
P_i\colon & x_i^{(8)} = u_i, & \|u_i\| \leqslant 10, & x_i(t_0) = X_i^0, & \dot{x}_i(t_0) = X_i^1, \; \ldots, & x_i^{(7)}(t_0) = X_i^7, \; i = 1, 2, \ldots, 50, \\
P_i\colon & x_i^{(6)} = u_i, & \|u_i\| \leqslant 10, & x_i(t_0) = X_i^0, & \dot{x}_i(t_0) = X_i^1, \; \ldots, & x_i^{(5)}(t_0) = X_i^5, \; i = 51, 52, \ldots, 100, \\
E_1\colon & y_1^{(5)} = v, & \|v\| \leqslant 1, & y_1(t_0) = Y_1^0, & \dot{y}_1(t_0) = Y_1^1, \; \ldots, & y_1^{(4)}(t_0) = Y_1^4, \\
E_2\colon & \ddot{y}_2 = v, & \|v\| \leqslant 1, & y_2(t_0) = Y_2^0, & \dot{y}_2(t_0) = Y_2^1, &
\end{array}$$

причем $Y_j^0 \neq X_i^0, \; Y_j^1 \neq X_i^1, \; j = 1, 2, \; Y_1^2 \neq X_i^2, \; Y_1^3 \neq X_i^3, \; Y_1^4 \neq X_i^4, \; i \in I = \{1, \ldots, 100\}$.

Предположения 1, 2 выполнены ($f_i = u_i, \; i \in I$). Из теоремы 2 следует, что имеет место

Утверждение 1. *В игре Γ_1 возможно мягкое убегание из любых начальных позиций (то есть $y_1(t) \neq x_i(t)$, $\dot{y}_1(t) \neq \dot{x}_i(t)$, $\ddot{y}_1(t) \neq \ddot{x}_i(t)$, $y_1^{(3)}(t) \neq x_i^{(3)}(t)$, $y_1^{(4)}(t) \neq x_i^{(4)}(t)$ и $y_2(t) \neq x_i(t)$, $\dot{y}_2(t) \neq \dot{x}_i(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, $i \in I$).*

Через $\widehat{\sin}(a)$ для всех $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^k$ обозначим функцию

$$\widehat{\sin}(a) = (\sin(a_1), \sin(a_2), \ldots, \sin(a_k))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^k.$$

Пример 2. В $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ на интервале $[t_0, \infty)$ рассматривается игра Γ_2 100 лиц: 50 преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_{50}$ и 50 убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_{50}$ с законами движения

$$\begin{gathered} P_i\colon \quad x_i^{(3)} = 10\left(\widehat{\sin}(x_i) + \widehat{\sin}(\dot{x}_i) + \widehat{\sin}(\ddot{x}_i)\right)\cos(u_i), \quad u_i \in \mathbb{R}^1, \\ x_i(t_0) = X_i^0, \quad \dot{x}_i(t_0) = X_i^1, \quad \ddot{x}_i(t_0) = X_i^2, \\ E_j\colon \quad \ddot{y}_j = v, \quad \|v\| \leqslant 1, \quad y_j(t_0) = Y_j^0, \quad \dot{y}_j(t_0) = Y_j^1, \\ \text{причем } Y_j^0 \neq X_i^0,\ Y_j^1 \neq X_i^1, \quad i,\ j = 1, 2, \ldots, 50. \end{gathered}$$

Функции $f_i(x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i, u_i, t) = 10\left(\widehat{\sin}(x_i) + \widehat{\sin}(\dot{x}_i) + \widehat{\sin}(\ddot{x}_i)\right)\cos(u_i)$ являются непрерывно-дифференцируемыми по совокупности аргументов, а их производные по всем переменным ограничены. Следовательно, данные функции удовлетворяют условиям существования, единственности и продолжимости решения на любой отрезок при всех допустимых управлениях преследователей и предположение 1 выполнено. Предположение 2 выполнено ($G = 30\sqrt{k}$).

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2 и имеет место

Утверждение 2. *В игре Γ_2 возможно мягкое убегание из любых начальных позиций (то есть $y_j(t) \neq x_i(t)$, $\dot{y}_j(t) \neq \dot{x}_i(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, $i, j = 1, 2, \ldots, 50$).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1977. 222 с.
4. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
5. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992. 380 с.
6. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. Ташкент: Фан, 2000. 176 с.
7. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Удмуртский университет, 2009. 266 с.
8. Петров Н.Н., Петров Н. Никандр. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366–1374.
9. Благодатских А.И. Уклонение жестко скоординированных убегающих от группы инерционных объектов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004. № 6. С. 143–149.
10. Благодатских А.И. О мягком убегании группы скоординированных убегающих // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69. Вып. 6. С. 993–1002.

Поступила в редакцию 01.10.2014

Благодатских Александр Иванович, к. ф.-м. н., доцент, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: aiblag@mail.ru

A. I. Blagodatskikh

Weak evasion of a group of rigidly coordinated evaders in the nonlinear problem of group pursuit

Keywords: weak evasion, group pursuit, nonlinear differential games, conflict controlled processes.

MSC: 49N70, 49N75

МАТЕМАТИКА 2014. Вып. 4

A natural generalization of differential two-person games is conflict controlled processes with a group of controlled objects (from at least one of the conflicting sides). The problems of conflict interaction between two groups of controlled objects are the most difficult-to-research. The specificity of these problems requires new methods to study them. This paper deals with the nonlinear problem of pursuing a group of rigidly coordinated evaders (i.e. using the same control) by a group of pursuers under the condition that the maneuverability of evaders is higher. The goal of evaders is to ensure weak evasion for the whole group. By weak evasion we mean non-coincidence of geometrical coordinates, speeds, accelerations and so forth for the evader and all pursuers. The position control is constructed for all possible initial positions of the participants; this control guarantees a weak evasion for all evaders.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games: a mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization*, New York: John Wiley and Sons, 1965, 384 p. Translated under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow: Mir, 1967, 479 p.

2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Positsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.

3. Petrosyan L.A. *Differentsial'nye igry presledovaniya* (Differential games of pursuit), Leningrad: Leningrad State University, 1977, 222 p.

4. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control over multiple dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990, 197 p.

5. Chikrii A.A. *Konfliktno upravlyaemye protsessy* (Conflict-controlled processes), Kiev: Naukova Dumka, 1992, 380 p.

6. Satimov N.Yu., Rikhsiev B.B. *Metody resheniya zadachi ukloneniya ot vstrechi v matematicheskoi teorii upravleniya* (Methods of solving the evasion problem in mathematical control theory), Tashkent: Fan, 2000, 176 p.

7. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009, 266 p.

8. Petrov N.N., Petrov N. Nikandr. On a differential game of "cossacks-robbers", *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 8, pp. 1366–1374 (in Russian).

9. Blagodatskikh A.I. Evasion of rigidly coordinated escaping objects from a group of inertial objects, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2004, vol. 43, no. 6, pp. 966–972.

10. Blagodatskikh A.I. Weak evasion of a group of coordinated evaders, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2005, vol. 69, no. 6, pp. 891–899.

Received 01.10.2014

Blagodatskikh Aleksandr Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: aiblag@mail.ru