МАТЕМАТИКА 2013. Вып. 4

УДК 519.6

© *А. Г. Ченцов*

К ВОПРОСУ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ КОМПАКТОВ СТОУНА [1]

Рассматриваются вопросы, связанные с представлением ультрафильтров измеримых пространств и конечно-аддитивных (0,1)-мер в интересах последующего применения в конструкциях расширений абстрактных задач о достижимости и экстремальных задач. Исследуются свойства, связанные с применением (обобщенных) декартовых произведений и их подпространств, а также свойство, имеющее смысл отождествимости ультрафильтров и конечно-аддитивных (0,1)-мер и реализуемое в виде гомеоморфизма естественных топологий.

Ключевые слова: расширение, конечно-аддитивная мера, ультрафильтр.

§ 1. Обсуждение задачи

Предметом исследования в статье являются ультрафильтры (у/ф) широко понимаемых измеримых пространств и конечно-аддитивные (к.-а.) (0,1)-меры. Упомянутые объекты находят применение в качестве обобщенных элементов в конструкциях расширений абстрактных задач о достижимости (направление, связанное с постановками задач теории управления, в которых допускается релаксация ограничений; см. [1]) и в расширениях, используемых в общей топологии (см., например, [2]). В первом случае важно бывает получить конструктивные представления обобщенных элементов, допустимых в смысле соблюдения некоторых ограничений асимптотического характера (см., например, [3]). Для исследования таких задач в [4] была использована схема на основе компактификации Стоуна–Чеха. Основное затруднение возникало при этом в связи с отсутствием конструктивного описания свободных у/ф семейства всех подмножеств (п/м) пространства обычных решений. Преодолеть указанное затруднение иногда удается на пути использования у/ф измеримых пространств (ИП), то есть посредством обращения к компактам Стоуна: в целом ряде случаев оказывается возможным получить исчерпывающее описание пространства у/ф соответствующей алгебры множеств (см. [5, 6]). Эти результаты дополняются положениями относительно структуры целевых операторов, допускающих реализацию схемы расширения, подобную «стоун-чеховскому» варианту [4], но осуществляемую в классе у/ф ИП (см., в частности, [6]); имеется в виду использование отображений с ярусными компонентами.

Представляется полезным, хотя бы на гипотетическом уровне, связать данную схему с проблемой описания компактов Стоуна в случае функциональных пространств. Это может представлять интерес для построения абстрактных расширений задач управления. В самом деле, управления-программы составляют в типичных случаях п/м бесконечного, вообще говоря, декартова произведения конечномерных компактов (имеется в виду вариант, соответствующий задачам управления с геометрическими ограничениями). В частности (ограничимся сейчас обсуждением этого случая), можно рассматривать произведение отрезков, то есть замкнутых промежутков. Характерные типы условий на выбор программных управлений доставляют требования, касающиеся измеримости, кусочной непрерывности или кусочного постоянства функций — элементов упомянутого произведения. Для получающихся п/м декартова произведения надлежит ввести соответствующую измеримую структуру в виде алгебры множеств (более общие варианты сейчас не обсуждаем) и построить компакт у/ф данной алгебры. В настоящей работе рассматривается вариант такого построения. При этом не предполагается, что

[1]Работа выполнена в рамках программ Президиума РАН (проекты 12–П–1–1019, 12–П–1–1012) и при финансовой поддержке РФФИ (проект 12–01–00537).

множество, определяющее «единицу» возникающего подпространства исходного ИП, является измеримым: пространство Стоуна и его представление конструируются в общем случае неизмеримого подпространства.

Упомянутые конструкции, реализуемые в классе у/ф, естественным образом связываются с расширениями в классе к.-а. (0,1)-мер. Погружение у/ф соответствующего ИП в пространство к.-а. мер ограниченной вариации осуществляется посредством сопоставления каждому у/ф его индикатора, определяемого на соответствующей алгебре или полуалгебре множеств. В настоящей работе последовательно исследуются свойства такого погружения, связанные с оснащением естественными топологиями. Эти конструкции рассматриваются в сочетании с процедурами конструирования у/ф посредством декартовых произведений. Таким образом, реализуется гомеоморфное вложение тихоновского произведения компактов Стоуна в пространство к.-а. мер ограниченной вариации в оснащении *-слабой топологией. Этот факт связывает подходы к построению расширений в классах у/ф и к.-а. (0,1)-мер.

Следует отметить, что меры и мерозначные функции широко используются при построении расширений задач управления, включая игровые задачи (см. [1, 7–10]). Обобщенные управления-меры позволяют решить в целом ряде практически интересных случаев проблему существования экстремального элемента и, более общим образом, позволяют построить корректное расширение исходной (возможно, неустойчивой) задачи управления. Они активно использовались в задачах теории дифференциальных игр Н. Н. Красовским и его учениками; в частности, это касается построения программных конструкций для нелинейных дифференциальных игр (см. [8]).

В аналогичном качестве для задач импульсного управления линейными системами с разрывностью в коэффициентах при управляющих воздействиях использовались к.-а. меры (см., например, [11]). Их применение позволило формализовать в данном классе задач эффекты, имеющие смысл произведения разрывной функции на обобщенную. В частности, это достигается в некоторых случаях посредством применения к.-а. (0,1)-мер, играющих роль обобщенных управлений. По этой причине возможность отождествления у/ф и к.-а. (0,1)-мер представляется полезной с точки зрения логической стыковки конструкций на основе пространств стоуновского представления и построений с использованием обобщенных управлений-мер.

§ 2. Обозначения и определения общего характера

В дальнейшем используем стандартную теоретико-множественную символику, включая кванторы, пропозициональные связки, специальные символы: def (по определению), $\triangleq$ (равно по определению). Принимаем аксиому выбора. Если m и n — объекты, то через $\{m; n\}$ обозначаем множество, содержащее m, n и не содержащее никаких других элементов ($\{m; n\}$ — неупорядоченная пара объектов m, n). Тогда для всякого объекта h в виде $\{h\} \triangleq \{h; h\}$ имеем одноэлементное множество, содержащее h. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. В дальнейшем важную роль будут играть семейства подмножеств (п/м) того или иного множества; в этой связи условимся о соглашениях: если X — множество, то через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м X, $\mathrm{Fin}(X)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$. Разумеется, для каждого множества Y в виде $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y))$ имеем семейство всех непустых подсемейств $\mathcal{P}(Y)$. Через B^A обозначаем множество всех отображений (функций) из множества A в множество B; если при этом $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\}$ есть образ множества C при действии f. Если $\mathcal{H}$ — непустое семейство и M — множество, то $\mathcal{H}|_M \triangleq \{H \cap M : H \in \mathcal{H}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(M))$ есть след $\mathcal{H}$ на M. Используем индексную форму записи отображений (см. [1]).

Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$ (натуральный ряд) и $\overline{p, q} \triangleq \{i \in \mathbb{N} \mid (p \leqslant i) \;\&\; (i \leqslant q)\}$ $\forall p \in \mathbb{N}\; \forall q \in \mathbb{N}$. Для каждого непустого множества H через $\mathcal{R}_+[H]$ обозначаем множество всех вещественнозначных (принимающих значения в $\mathbb{R}$) неотрицательных функций, определенных на H. Если X — непустое множество и $Y \in \mathcal{P}(X)$, то $\mathcal{I}_Y[X] \in \mathcal{R}_+[X]$

определяем условиями $\Big(\mathcal{I}_Y[X](u) \triangleq 0\ \forall\, u \in X \setminus Y\Big)$ & $\Big(\mathcal{I}_Y[X](v) \triangleq 1\ \forall\, v \in Y\Big)$; тем самым введен индикатор Y, рассматриваемый как функция на X.

Специальные семейства. В пределах настоящего пункта фиксируем непустое множество E. Тогда

$$\pi[E] \triangleq \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \mid (\varnothing \in \mathcal{E})\ \&\ (E \in \mathcal{E})\ \&\ (\ A \cap B \in \mathcal{E}\ \ \forall\, A \in \mathcal{E}\ \forall\, B \in \mathcal{E})\} \tag{2.1}$$

есть множество всех π-систем [12] на E с «нулем» и «единицей» ($\varnothing$ играет роль «нуля», а E — роль «единицы»). Посредством

$$(\mathrm{top})[E] \triangleq \left\{\tau \in \pi[E] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau\ \ \forall\, \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\right\},\ \ (\mathrm{alg})[E] \triangleq \{\mathcal{A} \in \pi[E] \mid E \setminus A \in \mathcal{A}\ \ \forall\, A \in \mathcal{A}\}$$

определены множества всех топологий и всех алгебр на множестве E. Если $\mathcal{L} \in \pi[E],\ A \in \mathcal{P}(E)$ и $n \in \mathbb{N}$, то через $\Delta_n(A, \mathcal{L})$ обозначаем множество всех кортежей

$$(L_i)_{i \in \overline{1,n}} :\ \overline{1,n} \longrightarrow \mathcal{L},$$

для каждого из которых: 1) A есть объединение всех множеств $L_i,\ i \in \overline{1,n}$; 2) $L_p \cap L_q = \varnothing\ \ \forall\, p \in \overline{1,n}\ \forall\, q \in \overline{1,n} \setminus \{p\}$. Тогда

$$\Pi[E] \triangleq \{\ \mathcal{J} \in \pi[E] \mid \forall\, L \in \mathcal{J}\ \exists\, n \in \mathbb{N} :\ \Delta_n(E \setminus L, \mathcal{J}) \neq \varnothing\}$$

есть множество всех полуалгебр на множестве E. Тогда

$$\mathbf{a}_E^0(\mathcal{J}) \triangleq \{A \in \mathcal{P}(E) \mid \exists\, n \in \mathbb{N} :\ \Delta_n(A, \mathcal{J}) \neq \varnothing\} \in (\mathrm{alg})[E]\ \forall\, \mathcal{J} \in \Pi[E]. \tag{2.2}$$

В (2.2) указано правило построения алгебры п/м E, порожденной [13, гл. I] полуалгеброй множеств. При этом

$$(\mathrm{alg})[E] \subset \Pi[E] \subset \pi[E] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)).$$

Фильтры. В пределах настоящего пункта фиксируем непустое множество E и π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Тогда

$$\begin{gathered}\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\ \mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\ \&\ (\ A \cap B \in \mathcal{F}\ \ \forall\, A \in \mathcal{F}\ \forall\, B \in \mathcal{F})\ \&\\ \&\ (\forall\, F \in \mathcal{F}\ \forall\, L \in \mathcal{L}\ (F \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{F}))\}\end{gathered} \tag{2.3}$$

есть множество всех фильтров «пространства» $(E, \mathcal{L})$, а

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\ \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \tag{2.4}$$

есть множество всех у/ф $(E, \mathcal{L})$. Отметим, что $(E - \mathrm{ult})[x] \triangleq \{S \in \mathcal{P}(E) \mid x \in S\}$ есть тривиальный у/ф, соответствующий точке x, и $((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x] \triangleq (E - \mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ (если $\mathcal{L} \in \Pi[E]$, то $((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[y] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \ \forall\, y \in E$). При этом $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \varnothing$ (см. [14, с. 122]). Полагаем, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U}\}\ \ \forall\, L \in \mathcal{L}. \tag{2.5}$$

В терминах множеств (2.5) определяется следующая база топологии:

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{L}}(L) :\ L \in \mathcal{L}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))); \tag{2.6}$$

эта определяемая единственным образом топология $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ превращает $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в хаусдорфово топологическое пространство (ТП)

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]). \tag{2.7}$$

Замечание 2.1. Если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, то (2.7) — компакт (компактное хаусдорфово ТП), называемое пространством Стоуна, или компактом Стоуна. Если $\mathcal{L} \in \Pi[E]$, то ТП (2.7) также является компактом, который является гомеоморфным компакту Стоуна, соответствующему алгебре, порожденной $\mathcal{L}$. Рассмотрим данный вопрос подробнее.

Итак, пусть до конца настоящего замечания $\mathcal{L} \in \Pi[E]$. С учетом (2.2) по схеме, приводящей к (2.7), определен непустой компакт Стоуна

$$\left(\mathbb{F}_0^*\left(\mathbf{a}_E^0(\mathcal{L})\right), \mathbf{T}^*_{\mathbf{a}_E^0(\mathcal{L})}[E]\right). \tag{2.8}$$

Напомним, что [5, предложение 5.1] $\psi_{\mathcal{L}}[\mathcal{U}] \stackrel{\triangle}{=} \left\{A \in \mathbf{a}_E^0(\mathcal{L}) \mid \exists\, U \in \mathcal{U}:\ U \subset A\right\} \in \mathbb{F}_0^*\left(\mathbf{a}_E^0(\mathcal{L})\right)\ \forall\, \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Более того, отображение $\Psi[\mathcal{L}]$ вида

$$\mathcal{U} \longmapsto \psi_{\mathcal{L}}[\mathcal{U}]:\ \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{F}_0^*\left(\mathbf{a}_E^0(\mathcal{L})\right) \tag{2.9}$$

есть гомеоморфизм хаусдорфова ТП (2.7) на компакт (2.8). Поэтому (2.7) является в рассматриваемом сейчас случае компактом, гомеоморфным пространству Стоуна (2.8). В дальнейшем упомянутое свойство, связанное с гомеоморфизмом $\Psi[\mathcal{L}]$ (2.9), используется без дополнительных пояснений. □

§ 3. Конечно-аддитивные меры

Полагаем в настоящем разделе, что $(E, \mathcal{L})$ есть ИП с полуалгеброй множеств: E — непустое множество, $\mathcal{L} \in \Pi[E]$. Введем в рассмотрение вещественнозначные к.-а. меры на $\mathcal{L}$, полагая, что

$$(\mathrm{add})[\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \left\{\mu \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}} \mid \mu(L) = \sum_{i=1}^{n} \mu(L_i)\ \ \forall\, L \in \mathcal{L}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, (L_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \Delta_n(L, \mathcal{L})\right\}$$

и $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mu \in (\mathrm{add})[\mathcal{L}] \mid 0 \leqslant \mu(L)\ \ \forall\, L \in \mathcal{L}\}$. Элементы последнего множества суть неотрицательные к.-а. меры на $\mathcal{L}$; среди них выделяем к.-а. вероятности: $\mathbb{P}(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \mid \mu(E) = 1\}$. Наконец,

$$\mathbb{T}(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mu \in \mathbb{P}(\mathcal{L}) \mid \forall\, L \in \mathcal{L}\ \ (\mu(L) = 0) \vee (\mu(L) = 1)\}$$

есть (непустое) множество всех нормированных к.-а. (0,1)-мер на $\mathcal{L}$. Кроме того, введем множество

$$\mathbb{A}(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \left\{\mu \in (\mathrm{add})[\mathcal{L}] \mid \exists\, c \in [0, \infty[:\ \sum_{i=1}^{n} |\,\mu(L_i)| \leqslant c\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, (L_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \Delta_n(E, \mathcal{L})\right\} \tag{3.1}$$

всех к.-а. мер ограниченной вариации, определенных на $\mathcal{L}$ (отметим, что $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ есть множество всех к.-а. мер $\mu - \nu$, $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, $\nu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$; данное представление легко следует из разложения Жордана). Разумеется, $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ — линейное пространство (здесь и ниже линейные операции, умножение и порядок в пространствах вещественнозначных функций определяем поточечно).

В дальнейшем используются стандартные конструкции общей топологии. Отметим только, что при определении окрестностей мы следуем [15, гл. I] и, таким образом, допускаем использование в этом качестве не только открытых множеств.

Заметим, что $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \subset \mathbb{A}(\mathcal{L})$; при этом $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ — конус неотрицательных элементов из $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. Как обычно [16, предложение 3.6.1], оснащаем $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ сильной нормой-вариацией

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{v})} = \left(\|\mu\|_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{v})}\right)_{\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{A}(\mathcal{L})],$$

определяемой следующим условием: если $\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то

$$\|\nu\|_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{v})} \triangleq \sup\left(\left\{c \in [0,\infty[\ \mid \exists\, n \in \mathbb{N}\ \exists\,(L_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \Delta_n(E,\mathcal{L}):\ c = \sum_{i=1}^{n} |\,\nu(L_i)|\right\}\right) \tag{3.2}$$

(определение (3.2) корректно: см. [16, с. 83, 84]). При этом $\left(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \|\cdot\|_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{v})}\right)$ — банахово пространство; отметим, что $\|\mu\|_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{v})} = \mu(E)\ \ \forall\,\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$.

Полагаем в настоящем разделе $\chi_L \triangleq \mathcal{I}_L[E]\ \ \forall\, L \in \mathcal{L}$. Через $B_0(E,\mathcal{L})$ обозначаем линейную оболочку множества $\{\chi_L : L \in \mathcal{L}\}$ в $\mathbb{R}^E$ (см. [16, следствие 2.7.1]). Тогда $B_0(E,\mathcal{L}) \subset \mathbb{B}(E)$, где $\mathbb{B}(E)$ — множество всех ограниченных вещественнозначных функций на E. Оснащая (линейное пространство) $\mathbb{B}(E)$ традиционной sup-нормой $\|\cdot\|_E$ [17, с. 261], получаем банахово пространство $(\mathbb{B}(E), \|\cdot\|_E)$ и полагаем, что $B(E,\mathcal{L})$ — замыкание $B_0(E,\mathcal{L})$ в топологии этой sup-нормы [16, (2.7.24)]. Тогда $B(E,\mathcal{L})$ с нормой подпространства $(\mathbb{B}(E), \|\cdot\|_E)$ само есть банахово пространство (имеем аналог $B(S,\Sigma)$ [17, гл. IV]). При этом $\left(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \|\cdot\|_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{v})}\right)$ изометрически изоморфно пространству $B^*(E,\mathcal{L})$, топологически сопряженному к $B(E,\mathcal{L})$, при традиционном нормировании $B^*(E,\mathcal{L})$ (см. в этой связи [16, § 3.6]; для случая ИП с алгеброй множеств данное положение приведено в [17, гл. IV]). Упомянутый изометрический изоморфизм определяется в виде оператора [16, (3.6.7)]

$$\mu \longmapsto \left(\int_E f\,d\mu\right)_{f\in B(E,\mathcal{L})} :\ \mathbb{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow B^*(E,\mathcal{L}),$$

где используется простейшая конструкция интегрирования (по к.-а. мере ограниченной вариации), принятая в [16, § 3.3], [18, гл. 3]. С учетом вышеупомянутой отождествимости $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $B^*(E,\mathcal{L})$ оснащаем $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ «обычной» *-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{L}) \in (\mathrm{top})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]$ (см. [18, § 3.4]), базу которой составляют всевозможные множества

$$N_{\mathcal{L}}^*(\mu,K,\varepsilon) \triangleq \left\{\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid \left|\int_E f\,d\mu - \int_E f\,d\nu\right| < \varepsilon\ \ \forall\, f \in K\right\},$$
$$\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}),\ K \in \mathrm{Fin}(B(E,\mathcal{L})),\ \varepsilon \in]0,\infty[. \tag{3.3}$$

Если в (3.3) зафиксировать $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то множества $N_{\mathcal{L}}^*(\mu,K,\varepsilon),\ K \in \mathrm{Fin}(B(E,\mathcal{L})),\ \varepsilon \in]0,\infty[$, составляют локальную базу ТП

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L})) \tag{3.4}$$

в точке μ. Само ТП (3.4) является локально выпуклым σ-компактом, а $(B(E,\mathcal{L}), \mathbb{A}(\mathcal{L}))$ есть обычная (в теории топологических векторных пространств) двойственность банаховых пространств. Напомним, что необходимые и достаточные условия компактности в ТП (3.4) определяются известной теоремой Алаоглу [17, гл. V]: п/м $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ компактно в ТП (3.4) тогда и только тогда, когда оно сильно ограничено и замкнуто в данном ТП. Отметим, кстати, что каждое из множеств $\mathbb{P}(\mathcal{L}),\ \mathbb{T}(\mathcal{L})$ компактно в ТП (3.4), то есть *-слабо компактно.

Введем еще две топологии $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, рассматривая последнее как п/м $\mathbb{R}^{\mathcal{L}}$. Введем в рассмотрение обычную $|\cdot|$-топологию $\tau_{\mathbb{R}} \in (\mathrm{top})[\mathbb{R}]$ и дискретную топологию $\tau_\partial \triangleq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \in (\mathrm{top})[\mathbb{R}]$; тогда $\tau_{\mathbb{R}} \subset \tau_\partial$. Определяем $\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})$ и $\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_\partial)$ как топологии тихоновской степени ТП $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ и $(\mathbb{R}, \tau_\partial)$ соответственно, полагая при этом, что $\mathcal{L}$ есть индексное множество. Базу топологии $\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})$ составляют всевозможные множества

$$\left\{\nu \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}} \mid\ |\mu(L) - \nu(L)| < \varepsilon\ \forall\, L \in \mathcal{K}\right\},\ \mu \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}},\ \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L}),\ \varepsilon \in]0,\infty[.$$

В свою очередь, базу топологии $\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_\partial)$ составляют всевозможные множества

$$\left\{\nu \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}} \mid \mu(L) = \nu(L)\ \forall\, L \in \mathcal{K}\right\},\ \mu \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}},\ \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L}).$$

Далее, получаем с очевидностью, что

$$\Big(\tau_{\otimes}(\mathcal{L}) \overset{\triangle}{=} \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})|_{\mathbb{A}(\mathcal{L})} \in (\mathrm{top})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]\Big) \ \& \ \Big(\tau_0(\mathcal{L}) \overset{\triangle}{=} \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})|_{\mathbb{A}(\mathcal{L})} \in (\mathrm{top})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]\Big),$$

причем $\tau_{\otimes}(\mathcal{L}) \subset \tau_*(\mathcal{L})$ и $\tau_{\otimes}(\mathcal{L}) \subset \tau_0(\mathcal{L})$. Топологии $\tau_*(\mathcal{L})$ и $\tau_0(\mathcal{L})$, вообще говоря, несравнимы (см. [18, с. 94]). Однако для топологий

$$\Big(\tau_*^+(\mathcal{L}) \overset{\triangle}{=} \tau_*(\mathcal{L})|_{(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]} \in (\mathrm{top})[(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]]\Big) \ \& \Big(\tau_{\otimes}^+(\mathcal{L}) \overset{\triangle}{=} \tau_{\otimes}(\mathcal{L})|_{(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]} \in (\mathrm{top})[(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]]\Big) \ \&$$
$$\& \ \Big(\tau_0^+(\mathcal{L}) \overset{\triangle}{=} \tau_0(\mathcal{L})|_{(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]} \in (\mathrm{top})[(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]]\Big)$$

уже получаем следующие соотношения сравнимости:

$$\tau_*^+(\mathcal{L}) = \tau_{\otimes}^+(\mathcal{L}) \subset \tau_0^+(\mathcal{L}). \tag{3.5}$$

В силу транзитивности операции перехода к подпространству имеем из (3.5), что $\forall K \in \mathcal{P}((\mathrm{add})_+[\mathcal{L}])$

$$\tau_*(\mathcal{L})|_K = \tau_{\otimes}(\mathcal{L})|_K \subset \tau_0(\mathcal{L})|_K. \tag{3.6}$$

Ограничимся здесь свойствами (3.6), отсылая читателя за более общими сведениями к [20]. В связи с (3.6) отметим, что при $H \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$ базу топологии $\tau_0(\mathcal{L})|_H \in (\mathrm{top})[H]$ составляют всевозможные множества

$$\{\nu \in H \mid \mu(L) = \nu(L) \ \ \forall L \in \mathcal{K}\}, \ \mu \in H, \ \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L}). \tag{3.7}$$

Если в (3.7) зафиксировать $\mu \in H$, то множества $\{\nu \in H \mid \mu(L) = \nu(L) \ \ \forall L \in \mathcal{K}\}$, $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$, составляют локальную базу топологии $\tau_0(\mathcal{L})|_H \in (\mathrm{top})[H]$ в точке μ. Для нас важен случай $H = \mathbb{T}(\mathcal{L})$. При этом (см. [21, (7.6.18), (7.6.24), (7.6.25)])

$$\tau_*(\mathcal{L})|_{\mathbb{T}(\mathcal{L})} = \tau_0(\mathcal{L})|_{\mathbb{T}(\mathcal{L})}. \tag{3.8}$$

Согласно (3.8), имеем, что топология $\tau_*(\mathcal{L})|_{\mathbb{T}(\mathcal{L})} \in (\mathrm{top})[\mathbb{T}(\mathcal{L})]$ порождена базой из множеств (3.7) при $H = \mathbb{T}(\mathcal{L})$.

§ 4. Ультрафильтры и (0,1)-меры

В настоящем разделе полагаем, что $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[E]$, где E — непустое множество. В этом случае [16, (4.11.6)] $\mathbb{A}(\mathcal{A})$ есть множество всех ограниченных к.-а. мер из $(\mathrm{add})[\mathcal{A}]$. Легко видеть, что

$$\mu^{-1}(\{1\}) \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \ \ \forall \mu \in \mathbb{T}(\mathcal{A}) \tag{4.1}$$

(см. [22, предложение 10.4.1]). В связи с (4.1) напомним построения [22, гл. 10], используя функции $\mathcal{I}_{\mathcal{U}}[\mathcal{A}]$ раздела 2 при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$. Тогда [22, предложение 10.4.2]

$$\mathcal{I}_{\mathcal{U}}[\mathcal{A}] \in \mathbb{T}(\mathcal{A}) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}). \tag{4.2}$$

Более того, как показано в [22, предложение 10.4.4], отображение

$$\mathcal{U} \longmapsto \mathcal{I}_{\mathcal{U}}[\mathcal{A}] : \ \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{T}(\mathcal{A}) \tag{4.3}$$

есть биекция $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ на $\mathbb{T}(\mathcal{A})$, а отображение

$$\mu \longmapsto \mu^{-1}(\{1\}) : \ \mathbb{T}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \tag{4.4}$$

есть биекция $\mathbb{T}(\mathcal{A})$ на $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$, обратная к (4.3) (см. [22, (10.5.61)]).

Замечание 4.1. Проверим последнее утверждение, обозначая сейчас для краткости оператор (4.3) через $\tilde{\alpha}$, а оператор (4.4) — через $\tilde{\beta}$. Тогда $\tilde{\alpha}$ — биекция и при этом $\tilde{\alpha}(\mathcal{U}) = \mathcal{I}_{\mathcal{U}}[\mathcal{A}]\ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$. Через $\tilde{\gamma}$ обозначаем биекцию $\mathbb{T}(\mathcal{A})$ на $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$, обратную к $\tilde{\alpha}$. Тогда $\tilde{\alpha}^{-1}(\{\mu\}) = \{\tilde{\gamma}(\mu)\}\ \ \forall \mu \in \mathbb{T}(\mathcal{A})$. Пусть $\nu \in \mathbb{T}(\mathcal{A})$. Тогда $\mathfrak{U} \overset{\triangle}{=} \tilde{\gamma}(\nu) \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$, причем $\tilde{\alpha}^{-1}(\{\nu\}) = \{\mathfrak{U}\}$. Это означает, что $\tilde{\alpha}(\mathfrak{U}) = \mathcal{I}_{\mathfrak{U}}[\mathcal{A}] = \nu$. Поэтому $\nu:\ \mathcal{A} \longrightarrow \{0;1\}$, причем $\nu(U) = 1$ при $U \in \mathfrak{U}$ и $\nu(A) = 0$ при $A \in \mathcal{A} \setminus \mathfrak{U}$. В этом случае $\nu^{-1}(\{1\}) = \mathfrak{U}$. Однако по определению $\tilde{\beta}$ имеем равенство $\tilde{\beta}(\nu) = \nu^{-1}(\{1\})$. В итоге $\tilde{\beta}(\nu) = \mathfrak{U} = \tilde{\gamma}(\nu)$. Коль скоро выбор ν был произвольным, установлено, что $\tilde{\beta} = \tilde{\gamma}$. $\square$

Далее будем использовать (3.8), полагая, что

$$T_{\mathcal{A}}^{(\partial)}[\mu;\mathcal{K}] \overset{\triangle}{=} \{\nu \in \mathbb{T}(\mathcal{A}) \mid \mu(A) = \nu(A)\ \ \forall A \in \mathcal{K}\}\ \ \forall \mu \in \mathbb{T}(\mathcal{A})\ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A}). \tag{4.5}$$

Множества $T_{\mathcal{A}}^{(\partial)}[\mu;\mathcal{K}]$ (см. (4.5)) образуют, при переборе $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A})$, базу топологии

$$\tau_*(\mathcal{A})|_{\mathbb{T}(\mathcal{A})} \in (\mathrm{top})[\mathbb{T}(\mathcal{A})]. \tag{4.6}$$

Условимся обозначать данную базу через $\mathcal{T}_\partial[\mathcal{A}]$; итак, имеем

$$\mathcal{T}_\partial[\mathcal{A}] \overset{\triangle}{=} \Big\{H \in \mathcal{P}(\mathbb{T}(\mathcal{A})) \mid \exists\, \mu \in \mathbb{T}(\mathcal{A})\ \exists\, \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A}):\ H = T_{\mathcal{A}}^{(\partial)}[\mu;\mathcal{K}]\Big\}. \tag{4.7}$$

Из определений легко следует, что (см. (4.6)) справедливо равенство

$$\tau_*(\mathcal{A})|_{\mathbb{T}(\mathcal{A})} = \Big\{G \in \mathcal{P}(\mathbb{T}(\mathcal{A})) \mid \forall\, \mu \in G\ \exists\, \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A}):\ T_{\mathcal{A}}^{(\partial)}[\mu;\mathcal{K}] \subset G\Big\}$$

(топология, порожденная базой (4.7)). Из общих свойств пространства (3.4) вытекает, что

$$\big(\mathbb{T}(\mathcal{A}), \tau_*(\mathcal{A})|_{\mathbb{T}(\mathcal{A})}\big) \tag{4.8}$$

есть непустой компакт. Напомним в связи с (4.7), что при $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{A})$ семейство

$$\mathcal{T}^{(\partial)}[\mathcal{A};\mu] \overset{\triangle}{=} \Big\{T_{\mathcal{A}}^{(\partial)}[\mu;\mathcal{K}]:\ \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A})\Big\}$$

есть локальная база ТП (4.8) в точке μ. Можно, однако, задать локальную базу более экономно. Соответствующее упрощение реализуем в два приема. Сначала полагаем при $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{A})$, что $\mathcal{T}_+^{(\partial)}[\mathcal{A};\mu] \overset{\triangle}{=} \Big\{T_{\mathcal{A}}^{(\partial)}[\mu;\mathcal{K}]:\ \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}\left(\mu^{-1}(\{1\})\right)\Big\}$.

Предложение 4.1. *Если $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{A})$, то $\mathcal{T}_+^{(\partial)}[\mathcal{A};\mu]$ есть локальная база ТП (4.8) в точке μ.*

Доказательство весьма очевидно и использует известное свойство: при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ и $A \in \mathcal{A}$ $(A \in \mathcal{U}) \vee (E \setminus A \in \mathcal{U})$.

Следствие 4.1. *Если $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{A})$, то семейство*

$$\tilde{\mathcal{T}}_+^{(\partial)}[\mathcal{A};\mu] \overset{\triangle}{=} \Big\{T_{\mathcal{A}}^{(\partial)}[\mu;\{A\}]:\ A \in \mu^{-1}(\{1\})\Big\} \tag{4.9}$$

есть локальная база ТП (4.8) в точке μ.

Доказательство. Отметим, что

$$\tilde{\mathcal{T}}_+^{(\partial)}[\mathcal{A};\mu] \subset \mathcal{T}_+^{(\partial)}[\mathcal{A};\mu] \subset \mathcal{T}^{(\partial)}[\mathcal{A};\mu] \subset \mathcal{T}_\partial[\mathcal{A}] \subset \tau_*(\mathcal{A})|_{\mathbb{T}(\mathcal{A})},$$

откуда следует с учетом (4.5), что $\tilde{\mathcal{T}}_{+}^{(\partial)}[\mathcal{A};\mu]$ есть семейство окрестностей μ в ТП (4.8). Пусть $\mathcal{U} \triangleq \mu^{-1}(\{1\})$. Тогда $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ (см. (4.4)) и при этом $\mu = \mathcal{I}_{\mathcal{U}}[\mathcal{A}]$. Выберем произвольную окрестность [23, с. 62] Ω точки μ в ТП (4.8) (напомним, что мы используем, следуя [15, 23], в качестве окрестностей не только открытые множества). С учетом предложения 4.1 подберем такое семейство $\mathcal{V} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{U})$, что $T_{\mathcal{A}}^{(\partial)}[\mu;\mathcal{V}] \subset \Omega$. Из аксиом фильтра легко следует, что

$$\mathbb{V} \triangleq \bigcap_{V \in \mathcal{V}} V \in \mathcal{U}. \tag{4.10}$$

При этом, согласно (4.10),

$$\Gamma \triangleq \{\nu \in \mathbb{T}(\mathcal{A}) \mid \nu(\mathbb{V}) = 1\} \in \tilde{\mathcal{T}}_{+}^{(\partial)}[\mathcal{A};\mu]. \tag{4.11}$$

Пусть $\gamma \in \Gamma$. Тогда $\gamma \in \mathbb{T}(\mathcal{A})$ и при этом $\gamma(\mathbb{V}) = 1$. Тогда $\mathbb{V} \in \gamma^{-1}(\{1\})$; имеем при $V \in \mathcal{V}$, что (см. (4.10)) $\mathbb{V} \subset V$ и, по аксиомам фильтра, $V \in \gamma^{-1}(\{1\})$ (см. (4.4)). С учетом (4.5) имеем по выбору $\mathcal{V}$, что $\gamma \in T_{\mathcal{A}}^{(\partial)}[\mu;\mathcal{V}]$ (используем связь μ и $\mathcal{U}$). В частности, $\gamma \in \Omega$, чем и завершается проверка вложения $\Gamma \subset \Omega$. Итак (см. (4.11)), $\exists\, B \in \tilde{\mathcal{T}}_{+}^{(\partial)}[\mathcal{A};\mu] :\ B \subset \Omega$. Поскольку выбор Ω был произвольным, требуемое свойство полностью доказано. $\square$

Наряду с (4.8) имеем непустой компакт $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E])$ (см. замечание 2.1). В этой связи заметим, что из определения данного ТП (см. (2.6), (2.7)) вытекает следующее свойство: если $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$, то семейство

$$\{\Phi_{\mathcal{A}}(U) :\ U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}))) \tag{4.12}$$

есть локальная база топологии $\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]$ в точке $\mathcal{U}$.

Предложение 4.2. *Отображение* (4.3) *есть гомеоморфизм ТП* $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E])$ *на ТП*

$$(\mathbb{T}(\mathcal{A}), \tau_*(\mathcal{A})|_{\mathbb{T}(\mathcal{A})}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E])$ — компакт, а (4.8) — хаусдорфово ТП, то [19, 3.1.13] (учитываем биективность оператора (4.3)) достаточно установить непрерывность оператора (4.3), обозначаемого здесь через φ. Пусть $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$. Тогда

$$\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{I}_{\mathcal{U}}[\mathcal{A}] \in \mathbb{T}(\mathcal{A}). \tag{4.13}$$

Заметим также, что $\varphi(\mathcal{U})^{-1}(\{1\}) = \{A \in \mathcal{A} \mid \mathcal{I}_{\mathcal{U}}[\mathcal{A}](A) = 1\} = \mathcal{U}$. Пусть Ω — произвольная окрестность к.-а. (0,1)-меры $\varphi(\mathcal{U})$ в ТП (4.8). С учетом следствия 4.1 подберем множество $\Lambda \in \varphi(\mathcal{U})^{-1}(\{1\})$, для которого

$$T_{\mathcal{A}}^{(\partial)}[\varphi(\mathcal{U});\{\Lambda\}] \subset \Omega \tag{4.14}$$

(множество в левой части (4.14) само является окрестностью $\varphi(\mathcal{U})$ в ТП (4.8)). Тогда в силу (4.13) $\mathcal{I}_{\mathcal{U}}[\mathcal{A}](\Lambda) = 1$ и, следовательно, $\Lambda \in \mathcal{U}$. Рассмотрим множество $\Phi_{\mathcal{A}}(\Lambda) \in \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]$, являющееся окрестностью $\mathcal{U}$ (см. (4.12)). Рассмотрим также множество-образ

$$\varphi^1(\Phi_{\mathcal{A}}(\Lambda)) \in \mathcal{P}(\mathbb{T}(\mathcal{A})).$$

Пусть $\eta \in \varphi^1(\Phi_{\mathcal{A}}(\Lambda))$. Тогда $\eta \in \mathbb{T}(\mathcal{A})$ и при этом $\eta = \varphi(\mathcal{V})$, где $\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{A}}(\Lambda)$. Ясно, что $\eta = \mathcal{I}_{\mathcal{V}}[\mathcal{A}]$ и $\Lambda \in \mathcal{V}$ согласно (2.5). Тогда $\eta(\Lambda) = \mathcal{I}_{\mathcal{V}}[\mathcal{A}](\Lambda) = 1 = \varphi(\mathcal{U})(\Lambda)$, а потому (см. (4.5)) $\eta \in T_{\mathcal{A}}^{(\partial)}[\varphi(\mathcal{U});\{\Lambda\}]$ и, в частности (см. (4.14)), $\eta \in \Omega$. Поскольку выбор η был произвольным, установлено вложение $\varphi^1(\Phi_{\mathcal{A}}(\Lambda)) \subset \Omega$. Итак, существует окрестность B у/ф $\mathcal{U}$, для которой $\varphi^1(B) \subset \Omega$. Поскольку выбор Ω был произвольным, установлено, что φ обладает свойством непрерывности (в смысле топологий $\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]$ и $\tau_*(\mathcal{A})|_{\mathbb{T}(\mathcal{A})}$) в точке $\mathcal{U}$. Поскольку выбор $\mathcal{U}$ был произвольным, установлена непрерывность φ как отображения из $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E])$ в ТП (4.8), что достаточно (в рассматриваемом случае) для гомеоморфности φ.

Следствие 4.2. *Отображение* (4.3) *есть гомеоморфное вложение компакта* $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E])$ *в* $(\mathbb{A}(\mathcal{A}), \tau_*(\mathcal{A}))$.

В связи с последним утверждением полезно иметь в виду свойство, отмеченное в [24, с. 104] (имеется в виду упражнение 29 в [24, гл. 3]).

§ 5. Произведения ультрафильтров

В настоящем разделе рассматриваются у/ф произведения π-систем, после чего как частный случай обсуждается вариант, связанный с произведением компактов Стоуна и некоторых гомеоморфных им компактов. Будем использовать соглашение: для всякого множества N

$$\mathfrak{P}[N] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{N} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(N)) \mid N \in \mathcal{N}\}; \tag{5.1}$$

ясно, что $\pi[N] \subset \mathfrak{P}[N]$ и, как следствие, $\Pi[N] \subset \mathfrak{P}[N]$, $(\mathrm{alg})[N] \subset \mathfrak{P}[N]$ и $(\mathrm{top})[N] \subset \mathfrak{P}[N]$. Кроме того (см. (2.3)), отметим, что для всякого непустого множества H $\mathcal{F} \in \mathfrak{P}[H]\ \forall \mathcal{H} \in \pi[H]\ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{H})$; в частности, имеем следующее свойство:

$$\mathcal{U} \in \mathfrak{P}[H]\ \ \forall \mathcal{H} \in \pi[H]\ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{H}). \tag{5.2}$$

Условимся о некоторых обозначениях, связанных с декартовыми произведениями.

Бесконечные произведения. В пределах данного пункта фиксируем непустое множество I. Как обычно, для всякого непустого множества $\mathbb{H}$

$$\prod_{i \in I} M_i \stackrel{\triangle}{=} \left\{f \in \mathbb{H}^I \mid f(j) \in M_j\ \ \forall j \in I\right\} \in \mathcal{P}(\mathbb{H}^I)\ \ \forall (M_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(\mathbb{H})^I; \tag{5.3}$$

в частности, тем самым определены произведения «непустозначных» мультифункций, являющиеся (с учетом аксиомы выбора) непустыми п/м $\mathbb{H}^I$. Заметим также, что при $(M_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}'(\mathbb{H})^I$ и $j \in I$ $\mathfrak{P}[M_j] = \{\mathcal{N} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(M_j)) \mid M_j \in \mathcal{N}\}$, а потому имеем, в частности, что $\mathfrak{P}[M_j] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H}))$ и при этом $\{M_j\} \in \mathfrak{P}[M_j]$; как следствие, получаем, что $\mathfrak{P}[M_j] \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H})))$. Получили, что для всяких непустого множества S и мультифункции $(M_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}'(S)^I$

$$(\mathfrak{P}[M_i])_{i \in I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(S)))^I,$$

а тогда, согласно (5.3), определено множество-произведение

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{P}[M_i] = \left\{(\mathcal{M}_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S))^I \mid \mathcal{M}_j \in \mathfrak{P}[M_j]\ \ \forall j \in I\right\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(S))^I); \tag{5.4}$$

если $(\mathcal{N}_i)_{i \in I} \in \prod\limits_{i \in I} \mathfrak{P}[M_i]$, то, согласно (5.4), имеем, в частности, $(\mathcal{N}_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S))^I$ и, снова используя (5.3), получаем, что

$$\prod_{i \in I} \mathcal{N}_i = \left\{(N_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(S)^I \mid N_j \in \mathcal{N}_j\ \ \forall j \in I\right\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S)^I)$$

(если теперь $(\Sigma_i)_{i \in I} \in \prod\limits_{i \in I} \mathcal{N}_i$, то определено множество-произведение

$$\prod_{i \in I} \Sigma_i = \left\{f \in S^I \mid f(j) \in \Sigma_j\ \ \forall j \in I\right\},$$

являющееся вариантом (5.3)). Комбинируя вышеупомянутые конструкции, приходим к следующему естественному определению «тензорного» произведения: если $\mathbb{M}$ — непустое множество, $(M_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}'(\mathbb{M})^I$ и $(\mathcal{M}_i)_{i \in I} \in \prod\limits_{i \in I} \mathfrak{P}[M_i]$, то

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{M}_i \stackrel{\triangle}{=} \left\{\Lambda \in \mathcal{P}\left(\prod_{i \in I} M_i\right) \mid \exists\, (\Gamma_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i :\ \left(\Lambda = \prod_{i \in I} \Gamma_i\right)\ \& \right.$$
$$\left. \&\ (\exists\, K \in \mathrm{Fin}(I) :\ \Gamma_j = M_j\ \ \forall j \in I \setminus K)\right\}; \tag{5.5}$$

пару $\left(\prod\limits_{i\in I} M_i, \bigotimes\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i\right)$ рассматриваем в качестве произведения «пространств» $(M_i, \mathcal{M}_i)$, $i \in I$.

Произведения π-систем. В дальнейшем фиксируем, как и в [25, раздел 3], непустые множества X и Y, а также мультифункцию $(E_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(Y)^X$. Итак, при $x \in X$ в виде E_x имеем (всякий раз) непустое п/м Y. Всюду в настоящем разделе полагаем

$$E \triangleq \prod_{x\in X} E_x; \tag{5.6}$$

тогда $E \in \mathcal{P}'(Y^X)$. Легко видеть, что при $x \in X$ $\pi[E_x] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y))$; кроме того, $\pi[E_x] \subset \mathfrak{P}[E_x]$. Тогда $\prod\limits_{x\in X} \pi[E_x] = \big\{(\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y))^X \mid \mathcal{E}_s \in \pi[E_s] \ \ \forall\, s \in X\big\}$ соответствует (5.3). Фиксируем

$$(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \pi[E_x], \tag{5.7}$$

получая, в частности, отображение из X в $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y))$ со свойством $\mathcal{L}_s \in \pi[E_s]$ $\forall\, s \in X$. Разумеется,

$$\prod_{x\in X} \mathcal{L}_x = \big\{(L_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}(Y)^X \mid L_s \in \mathcal{L}_s \ \ \forall\, s \in X\big\}. \tag{5.8}$$

Используем (5.8) в схеме (5.5), поскольку $(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathfrak{P}[E_x]$ (см. (5.4)). Тогда с учетом (5.5), (5.6) легко устанавливается, что

$$\mathcal{L} \triangleq \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x \in \pi[E]; \tag{5.9}$$

всюду в настоящем разделе $\mathcal{L}$ понимается в смысле (5.9). Итак, $(E, \mathcal{L})$ есть произведение «пространств» $(E_x, \mathcal{L}_x)$, $x \in X$. Определены множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)$, $x \in X$. При этом

$$\prod_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) = \big\{(\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y))^X \mid \mathcal{U}_s \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_s) \ \ \forall\, s \in X\big\} \tag{5.10}$$

есть непустое множество. Согласно (5.2), имеем при $(\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)$ и $s \in X$, что $\mathcal{U}_s \in \mathfrak{P}[E_s]$. Теперь учтем (5.1), (5.2), (5.4):

$$\prod_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) \subset \prod_{x\in X} \mathfrak{P}[E_x]. \tag{5.11}$$

С учетом (5.11) получаем возможность использования конструкции на основе (5.5) в случае произведения у/ф. При этом [25, (3.7), (3.8)]

$$\begin{gathered}\bigotimes_{x\in X} \mathcal{U}_x = \Big\{U \in \mathcal{P}(E) \mid \exists\, (U_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{U}_x : \Big(U = \prod_{x\in X} U_x\Big) \ \& \ (\exists\, K \in \mathrm{Fin}(X) : \\ U_s = E_s \ \forall\, s \in X \setminus K)\Big\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \ \forall\, (\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x).\end{gathered} \tag{5.12}$$

Таким образом, посредством (5.12) определено отображение

$$(\mathcal{U}_x)_{x\in X} \longmapsto \bigotimes_{x\in X} \mathcal{U}_x : \prod_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \tag{5.13}$$

обозначаемое далее через $\mathbf{u}$ (итак, $\mathbf{u}$ — отображение, для которого

$$\mathbf{u}((\mathcal{U}_x)_{x\in X}) \triangleq \bigotimes_{x\in X} \mathcal{U}_x \ \ \forall\, (\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x);$$

в [25] установлены основные свойства $\mathbf{u}$ (5.13), которые мы в краткой форме напомним ниже).

При $x \in X \quad \tau_x \triangleq \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}_x}[E_x] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x)]$. Заметим, что $(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x))_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y)))^X$ и при $s \in X$ определено семейство $\mathfrak{P}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_s)]$, для которого $\mathfrak{P}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_s)] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_s)))$ и, в частности, $\mathfrak{P}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_s)] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y))))$. Согласно (5.4), имеем произведение $\prod\limits_{x\in X} \mathfrak{P}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x)]$, для которого

$$(\tau_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathfrak{P}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x)].$$

С учетом (5.5) определяем семейство $\bigotimes\limits_{x\in X} \tau_x \in \pi[\prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x)]$ (здесь — аналогия с (5.9)), являющееся, в частности, базой топологии непустого множества $\prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x)$; данная топология имеет вид

$$\Theta \triangleq \Big\{ G \in \mathcal{P}(\prod_{x\in X} \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x)) \mid \forall\, (\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in G \ \ \exists \mathbb{B} \in \bigotimes_{x\in X} \tau_x : \\ ((\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in \mathbb{B})\ \&\ (\mathbb{B} \subset G) \Big\} \in (\mathrm{top}) \Big[\prod_{x\in X} \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x) \Big]. \tag{5.14}$$

Тогда $\Big(\prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x), \Theta \Big)$ есть «обычное» тихоновское произведение ТП $(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x), \tau_x),\ x \in X$.

Предложение 5.1. *Отображение* $\mathbf{u}$ (5.13) *есть гомеоморфизм ТП* $\Big(\prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x), \Theta \Big)$ *на ТП* $(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])$.

Доказательство предложения приведено в [25, раздел 4].

Пусть до конца настоящего раздела $\mathcal{L}_x \in \Pi[E_x] \ \ \forall\, x \in X$ (иными словами, предполагаем, что

$$(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \Pi[E_x];$$

разумеется, здесь мы имеем частный случай конструкции, приводящей к предложению 5.1). Тогда с учетом (5.9) легко устанавливается, что

$$\mathcal{L} \in \Pi[E], \tag{5.15}$$

и, в обозначениях замечания 2.1, имеем гомеоморфизм $\Psi[\mathcal{L}]$ (2.9) для ТП (2.7), (2.8). Получили композицию

$$\Psi[\mathcal{L}] \circ \mathbf{u} : \prod_{x\in X} \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x) \longrightarrow \mathbb{F}^*_0(\mathbf{a}^0_E(\mathcal{L})), \tag{5.16}$$

которая очевидным образом является гомеоморфизмом ТП $\Big(\prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x), \Theta \Big)$ на компакт (2.8).

§ 6. Гомеоморфное вложение произведения компактов ультрафильтров в пространство ограниченных конечно-аддитивных мер

В настоящем разделе продолжаем рассмотрение произведения измеримых пространств с полуалгебрами множеств: принимаем соглашения (5.6), (5.9) при условиях, что $(E_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(Y)^X$ и $\mathcal{L}_s \in \Pi[E_s] \ \forall\, s \in X$. В этом случае с использованием гомеоморфизма $\mathbf{u}$ (5.13) (см. предложение 5.1) был построен гомеоморфизм $\Psi[\mathcal{L}] \circ \mathbf{u}$ (5.16) тихоновского произведения $\Big(\prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x), \Theta \Big)$ на компакт (2.8). Обозначим теперь через $\varphi[\mathcal{L}]$ отображение

$$\mathcal{U} \longmapsto \mathcal{I}_{\mathcal{U}} \left[\mathbf{a}^0_E(\mathcal{L}) \right] : \ \mathbb{F}^*_0 \left(\mathbf{a}^0_E(\mathcal{L}) \right) \longrightarrow \mathbb{T} \left(\mathbf{a}^0_E(\mathcal{L}) \right),$$

являющееся вариантом (4.3). С учетом предложения 4.2 получаем теперь, что справедлива (см. свойства гомеоморфизмов в [19]) следующая

Теорема 6.1. *Отображение* $\varphi[\mathcal{L}] \circ \Psi[\mathcal{L}] \circ \mathbf{u}$ *есть гомеоморфизм тихоновского произведения* $\Big(\prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x), \Theta \Big)$ *на компакт* $\Big(\mathbb{T}\left(\mathbf{a}^0_E(\mathcal{L}) \right), \tau_*\left(\mathbf{a}^0_E(\mathcal{L}) \right)|_{\mathbb{T}(\mathbf{a}^0_E(\mathcal{L}))} \Big)$.

Теперь уже вполне очевидным является

Следствие 6.1. *Отображение* $\varphi[\mathcal{L}] \circ \Psi[\mathcal{L}] \circ \mathbf{u}$ *есть гомеоморфное вложение ТП* $\left(\prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x), \Theta\right)$ *в* $\left(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*\left(\mathbf{a}_E^0(\mathcal{L})\right)\right)$.

§ 7. Добавление: ультрафильтры подпространств

Всюду в настоящем разделе полагаем, что E — произвольное непустое множество и $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$. Итак, $(E, \mathcal{L})$ есть ИП с алгеброй множеств. При $B \in \mathcal{P}'(E)$ имеем

$$\mathcal{L}|_B = \{L \cap B :\ L \in \mathcal{L}\} \in (\mathrm{alg})[B]; \tag{7.1}$$

пару $(B, \mathcal{L}|_B)$ рассматриваем как подпространство ИП $(E, \mathcal{L})$; разумеется,

$$\mathcal{F}|_B = \{B \cap F :\ F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))\ \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}).$$

Вполне очевидно следующее

Предложение 7.1. *Если* $B \in \mathcal{P}'(E)$ *и* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, *то*

$$(\ B \cap F \neq \varnothing\ \ \forall F \in \mathcal{F}) \Longleftrightarrow (\ \mathcal{F}|_B \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}|_B)).$$

Доказательство очевидно, оно следует из определений и свойств алгебры множеств. Из предложения вытекает, что

$$\{B \in \mathcal{P}'(E) \mid \mathcal{F}|_B \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}|_B)\} = \{B \in \mathcal{P}'(E) \mid B \cap F \neq \varnothing\ \ \forall F \in \mathcal{F}\}\ \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}).$$

Предложение 7.2. *Если* $B \in \mathcal{P}'(E)$ *и* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, *то*

$$(\ B \cap U \neq \varnothing\ \ \forall U \in \mathcal{U}) \Longleftrightarrow (\mathcal{U}|_B \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_B)).$$

Доказательство использует предложение 7.1 и следующее известное [13, с. 26] свойство: если $(M, \mathcal{M})$, $M \neq \varnothing$, есть ИП с алгеброй множеств, то

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{M}) = \{\ \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \mid \forall S \in \mathcal{M}\ \ (\ S \in \mathcal{U}) \vee (\ M \setminus S \in \mathcal{U})\}.$$

Из предложения 7.2 вытекает, что

$$\{B \in \mathcal{P}'(E) \mid \mathcal{U}|_B \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_B)\} = \{B \in \mathcal{P}'(E) \mid B \cap U \neq \varnothing\ \ \forall U \in \mathcal{U}\}\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

Предложение 7.3. *Если* $B \in \mathcal{P}'(E)$ *и* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}|_B)$, *то* $\{L \in \mathcal{L} \mid B \cap L \in \mathcal{F}\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$.

Доказательство легко следует из определений раздела 2 (см. (2.3)).

Предложение 7.4. *Если* $B \in \mathcal{P}'(E)$ *и* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_B)$, *то* $\{L \in \mathcal{L} \mid B \cap L \in \mathcal{U}\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$.

Доказательство использует свойство, отмеченное после предложения 7.2.

Всюду в дальнейшем фиксируем (непустое) множество $A \in \mathcal{P}'(E)$ и рассматриваем в дальнейшем подпространство $(A, \mathcal{L}|_A)$ исходного ИП $(E, \mathcal{L})$. В силу предложения 7.2 важную роль в дальнейшем будет играть множество

$$\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid U \cap A \neq \varnothing\, \forall U \in \mathcal{U}\}\,. \tag{7.2}$$

Если $x \in A$, то (см. раздел 2) $((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x] \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$. Поэтому $\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A] \neq \varnothing$. Из предложения 7.2 и (7.2) вытекает, что $\mathcal{U}|_A \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A)\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$.

Предложение 7.5. *Множество* $\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$ *замкнуто в ТП* (2.7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество $\Omega \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$. Пусть $\mathcal{U} \in \Omega$. Тогда $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и для некоторого $U \in \mathcal{U}$ имеем свойство

$$A \cap U = \varnothing. \tag{7.3}$$

Множество $\Phi_{\mathcal{L}}(U) = \{\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid U \in \mathfrak{U}\}$ является открытой окрестностью $\mathcal{U}$ в ТП (2.7). При этом для $\mathfrak{U} \in \Phi_{\mathcal{L}}(U)$ имеем $U \in \mathfrak{U}$ и, кроме того, выполнено (7.3), а потому, согласно (7.2), $\mathfrak{U} \notin \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$. Тогда $\Phi_{\mathcal{L}}(U) \subset \Omega$. Итак, установлено следующее свойство:

$$\forall \tilde{\mathcal{U}} \in \Omega \; \exists L \in \tilde{\mathcal{U}} : \; \Phi_{\mathcal{L}}(L) \subset \Omega.$$

Поэтому $\Omega \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$, что означает замкнутость $\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$. □

Условимся о следующем обозначении: $\mathbf{t}_A^* \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]|_{\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]}$, получая в виде

$$(\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A], \mathbf{t}_A^*) \tag{7.4}$$

замкнутое подпространство ТП (2.7). Поскольку (2.7) в рассматриваемом здесь случае является компактом, то и ТП (7.4) — непустой компакт.

Заметим, что согласно (7.2) при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$ определен у/ф $\{\, L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \in \mathcal{U}|_A\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ (см. предложения 7.2, 7.4).

Предложение 7.6. *Если* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$, *то* $\{\, L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \in \mathcal{U}|_A\} = \mathcal{U}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{V} \stackrel{\triangle}{=} \{\, L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \in \mathcal{U}|_A\}$. Как уже отмечалось, $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Если $U \in \mathcal{U}$, то, в частности, $U \in \mathcal{L}$ и при этом $A \cap U \in \mathcal{U}|_A$; итак, $U \in \mathcal{V}$. Следовательно, $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. В силу максимальности $\mathcal{U}$ имеем (см. (2.4)) равенство $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. □

Введем отображение $\alpha : \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A] \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A)$, для которого

$$\alpha(\mathcal{U}) \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{U}|_A \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]. \tag{7.5}$$

Предложение 7.7. *Отображение* α *есть биекция* $\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$ *на* $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что отображение α инъективно. В самом деле, пусть $\mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$ и $\mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$ таковы, что $\alpha(\mathcal{U}_1) = \alpha(\mathcal{U}_2)$. Тогда из (7.5) и предложения 7.6 получаем, что

$$\mathcal{U}_1 = \{\, L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \in \alpha(\mathcal{U}_1)\} = \{\, L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \in \alpha(\mathcal{U}_2)\} = \mathcal{U}_2.$$

Поскольку выбор $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ был произвольным, инъективность α установлена.

Выберем произвольно $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A)$. С учетом предложения 7.4 имеем, что $\mathcal{W} \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \in \mathcal{V}\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. В частности, $A \cap L \neq \varnothing \quad \forall L \in \mathcal{W}$. Тогда $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$. При этом $A \cap W \in \mathcal{V} \;\; \forall W \in \mathcal{W}$. Иными словами, $\mathcal{W}|_A \subset \mathcal{V}$, где, согласно предложению 7.2, $\mathcal{W}|_A \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A)$. Но в этом случае имеем в силу максимальности $\mathcal{W}|_A$, что $\mathcal{W}|_A = \mathcal{V}$, то есть $\mathcal{V} = \alpha(\mathcal{W})$ (см. (7.5)). Это означает, что $\mathcal{V} \in \alpha^1(\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A])$, чем завершается проверка вложения $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A) \subset \alpha^1(\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A])$, а следовательно, и сюръективности α. □

С учетом последнего предложения введем биекцию $\beta : \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A) \longrightarrow \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$, обратную к α:

$$\alpha^{-1}(\{\mathcal{U}\}) = \{\beta(\mathcal{U})\} \;\; \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A).$$

Введем вспомогательное отображение $\gamma : \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A) \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ посредством правила

$$\gamma(\mathcal{U}) \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \in \mathcal{U}\} \;\; \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A) \tag{7.6}$$

(см. предложение 7.4). В частности, при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$ определен у/ф

$$\gamma(\mathcal{U}|_A) = \{L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \in \mathcal{U}|_A\} = \{L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \in \alpha(\mathcal{U})\}. \tag{7.7}$$

Из (7.7) и предложения 7.6 вытекает, что

$$\gamma(\mathcal{U}|_A) = \mathcal{U} \;\; \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]. \tag{7.8}$$

Предложение 7.8. *Справедливо равенство* $\beta = \gamma$.

Доказательство. Отображения β и γ имеют общую область определения — множество $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A)$; заметим, в частности, что $\beta : \ \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A) \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Фиксируем у/ф $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A)$, получая, в частности, вложение $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}|_A$. Рассмотрим множество

$$\alpha^{-1}(\{\mathcal{V}\}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A] \mid \alpha(\mathcal{U}) = \mathcal{V}\} = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A] \mid \mathcal{U}|_A = \mathcal{V}\}.$$

Имеем у/ф

$$\gamma(\mathcal{V}) = \{L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \in \mathcal{V}\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{7.9}$$

Покажем, что справедливо равенство

$$\gamma(\mathcal{V})|_A = \mathcal{V}. \tag{7.10}$$

В этой связи отметим прежде всего, что $\gamma(\mathcal{V})|_A = \{A \cap L : \ L \in \gamma(\mathcal{V})\}$ есть непустое семейство п/м A. Выберем произвольно $\tilde{\Gamma} \in \gamma(\mathcal{V})|_A$. Тогда для некоторого множества $\Gamma \in \gamma(\mathcal{V})$ имеем равенство $\tilde{\Gamma} = A \cap \Gamma$. Поэтому, согласно (7.9), множество $\Gamma \in \mathcal{L}$ обладает свойством $A \cap \Gamma \in \mathcal{V}$. В итоге $\tilde{\Gamma} \in \mathcal{V}$. Итак, установлено вложение

$$\gamma(\mathcal{V})|_A \subset \mathcal{V}. \tag{7.11}$$

Выберем произвольно $V \in \mathcal{V}$. Тогда имеем, в частности, $V \in \mathcal{L}|_A$, а тогда для некоторого $\tilde{V} \in \mathcal{L}$ справедливо равенство

$$V = A \cap \tilde{V}. \tag{7.12}$$

Получаем с учетом (7.12), что

$$\tilde{V} \in \mathcal{L} : \ A \cap \tilde{V} \in \mathcal{V}.$$

Это означает, что (см. (7.9)) $\tilde{V} \in \gamma(\mathcal{V})$. Как следствие, $V = A \cap \tilde{V} \in \gamma(\mathcal{V})|_A$. Поскольку выбор V был произвольным, установлено вложение

$$\mathcal{V} \subset \gamma(\mathcal{V})|_A. \tag{7.13}$$

Из (7.11) и (7.13) вытекает равенство (7.10). Поскольку $\mathcal{V}$ — у/ф и, в частности, фильтр, то $\varnothing \notin \mathcal{V}$ и в силу (7.10) $\varnothing \notin \gamma(\mathcal{V})|_A$. Это означает, что

$$A \cap L \neq \varnothing \quad \forall L \in \gamma(\mathcal{V}). \tag{7.14}$$

Из (7.2), (7.9) и (7.14) получаем, что $\gamma(\mathcal{V}) \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$. Тогда определен у/ф

$$\alpha(\gamma(\mathcal{V})) = \gamma(\mathcal{V})|_A \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A).$$

С учетом (7.10) получаем, что $\alpha(\gamma(\mathcal{V})) = \mathcal{V}$, а потому

$$\gamma(\mathcal{V}) \in \alpha^{-1}(\{\mathcal{V}\}). \tag{7.15}$$

По определению β, имеем равенство $\beta(\mathcal{V}) = \gamma(\mathcal{V})$ (в самом деле, $\alpha^{-1}(\{\mathcal{V}\}) = \{\beta(\mathcal{V})\}$). Поскольку $\mathcal{V}$ выбиралось произвольно, установлено требуемое равенство $\beta = \gamma$. $\square$

С учетом (7.6) и последнего предложения получаем, что

$$\beta = (\{L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \in \mathcal{U}\})_{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A)} \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A)}. \tag{7.16}$$

Теорема 7.1. *Отображение* α *есть гомеоморфизм компакта* $(\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A], \mathbf{t}_A^*)$ *на компакт*

$$\left(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}|_A}[A]\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку рассматривается биекция одного компакта на другой, достаточно установить непрерывность α (см. [19, теорема 3.1.13]). Пусть $\mathcal{U}_0 \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$. Тогда $\alpha(\mathcal{U}_0) \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A)$. Выберем произвольную окрестность $\Theta \in N_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}|_A}[A]}(\alpha(\mathcal{U}_0))$. Тогда $\Theta \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A))$ и для некоторого множества $M \in \alpha(\mathcal{U}_0)$

$$\Phi_{\mathcal{L}|_A}(M) \subset \Theta. \tag{7.17}$$

Напомним, что (см. (7.5)) $\alpha(\mathcal{U}_0) = \mathcal{U}_0|_A$. Тогда $M \in \mathcal{U}_0|_A$. Следовательно, $M = A \cap M_0$ для некоторого множества $M_0 \in \mathcal{U}_0$. Тогда $\Phi_{\mathcal{L}}(M_0) \in N^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}(\mathcal{U}_0)$. Разумеется,

$$\mathbb{M}_0 \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A] \cap \Phi_{\mathcal{L}}(M_0) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A] \mid M_0 \in \mathcal{U}\} \in N^0_{\mathbf{t}^*_A}(\mathcal{U}_0). \tag{7.18}$$

Пусть $\mathcal{U}_* \in \mathbb{M}_0$. Тогда $\mathcal{U}_* \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$ и при этом

$$M_0 \in \mathcal{U}_*. \tag{7.19}$$

Поскольку $\alpha(\mathcal{U}_*) = \mathcal{U}_*|_A$, имеем из (7.19), что $A \cap M_0 \in \alpha(\mathcal{U}_*)$. Поэтому $M \in \alpha(\mathcal{U}_*)$. Тогда $\alpha(\mathcal{U}_*) \in \Phi_{\mathcal{L}|_A}(M)$ и, согласно (7.17), $\alpha(\mathcal{U}_*) \in \Theta$. Тем самым установлено вложение

$$\alpha^1(\mathbb{M}_0) \subset \Theta. \tag{7.20}$$

Из (7.18) и (7.20) имеем, в частности, что $\exists\, B \in N^0_{\mathbf{t}^*_A}(\mathcal{U}_0):\ \alpha^1(B) \subset \Theta$. Поскольку и выбор Θ был произвольным, установлено, что

$$\forall\, P \in N_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}|_A}[A]}(\alpha(\mathcal{U}_0))\ \exists\, Q \in N_{\mathbf{t}^*_A}(\mathcal{U}_0):\ \alpha^1(Q) \subset P.$$

Итак, α непрерывно в точке $\mathcal{U}_0$, которая выбиралась произвольно. Тем самым «глобальная» непрерывность α установлена. Как следствие, получаем следующее свойство: α — гомеоморфизм. □

Рассмотрим частный случай, полагая до конца настоящего раздела, если не оговорено противное, что $A \in \mathcal{L}$ (случай измеримого подпространства). Легко видеть, что (в данном случае) справедливо равенство $\mathcal{L}|_A = \{L \in \mathcal{L} \mid L \subset A\}$. Кроме того, определено множество $\Phi_{\mathcal{L}}(A)$.

Предложение 7.9. *Справедливо равенство* $\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A] = \Phi_{\mathcal{L}}(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что, согласно (2.5), $\Phi_{\mathcal{L}}(A) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid A \in \mathcal{U}\}$. Поскольку $A \neq \varnothing$, имеем свойство непустоты $\Phi_{\mathcal{L}}(A)$ (напомним здесь же, что $\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A] \neq \varnothing$).

Пусть $\mathfrak{U} \in \Phi_{\mathcal{L}}(A)$. Тогда $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом $A \in \mathfrak{U}$. Как следствие, $A \cap L \neq \varnothing\ \ \forall\, L \in \mathfrak{U}$. Следовательно, $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$. Поскольку выбор $\mathfrak{U}$ был произвольным, получаем вложение

$$\Phi_{\mathcal{L}}(A) \subset \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]. \tag{7.21}$$

Выберем произвольно $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$. Тогда $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом $A \cap L \neq \varnothing\ \ \forall\, L \in \mathcal{V}$. Тогда [14, (5.7)] $A \in \mathcal{V}$. В этом случае $\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{L}}(A)$. Поскольку выбор $\mathcal{V}$ был произвольным, установлено вложение

$$\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A] \subset \Phi_{\mathcal{L}}(A). \tag{7.22}$$

Из (7.21) и (7.22) вытекает требуемое равенство. □

Заметим, что множество $\Phi_{\mathcal{L}}(A)$ открыто-замкнуто в $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])$. В частности, имеем в рассматриваемом случае, что

$$\mathbf{t}^*_A = \{\Phi_{\mathcal{L}}(A) \cap G:\ G \in \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]\} = \{G \in \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] \mid G \subset \Phi_{\mathcal{L}}(A)\}.$$

При этом, согласно предложению 7.9 и теореме 7.1, α является гомеоморфизмом компакта $(\Phi_{\mathcal{L}}(A), \mathbf{t}^*_A)$ на $\left(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}|_A}[A]\right)$.

Заметим, в частности, что в настоящем построении можно допустить в общем случае $A \in \mathcal{P}'(E)$, что множество E определяется посредством (5.6), а алгебра $\mathcal{L}$ п/м E порождена произведением полуалгебр $\mathcal{L}_x \in \Pi[E_x]$, $x \in X$ (следуем здесь стандартной конструкции, подобной используемой в разделе 5 при очевидной коррекции обозначений), где X — множество индексов. Иными словами, мы можем здесь принять соглашение

$$\mathcal{L} = \mathbf{a}_E^0 \left(\bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x \right),$$

после чего используем след данной алгебры на непустое множество A, то есть алгебру множеств $\mathcal{L}|_A$. Здесь в качестве A может использоваться множество обычных решений (терминология [1, гл. III]) соответствующей задачи управления; в этом случае индексное множество X отождествляется обычно с промежутком вещественной прямой. Тем самым на основе построений настоящего раздела реализуется принципиально представление компакта Стоуна для содержательной задачи управления с геометрическими ограничениями (систематическое изучение таких задач управления было начато Л. С. Понтрягиным); правда, данное представление получено пока для скалярных управлений в случае, когда ограничения на выбор мгновенных управлений определяются всякий раз отрезком вещественной прямой (в этой связи см. [25, раздел 6], где указан конкретный вид компакта (2.7), подпространством которого является компакт (7.4)). Заметим, что такое расширение может, как представляется, оказаться полезным для исследования качественных вопросов структуры задач о достижимости для систем, правая часть которых разрывна по управлению (см. [26]), а сами ограничения на выбор скалярного управления предполагаются геометрическими. Затруднения могут быть связаны с обеспечением ярусности компонент целевого отображения (см. [6]), что является важным для обеспечения работоспособности схемы расширения в духе [3,6] на этапе построения множества притяжения, являющегося асимптотическим аналогом области достижимости. Данный вопрос требует дополнительного исследования.

Отметим здесь же с учетом положений [5], что теорема 7.1 может, конечно, использоваться в более простом случае, когда E определяется декартовым произведением конечного числа множеств; в этом случае отображения с ярусными компонентами (см. [6]) уже не представляются экзотическими. В то же время сочетание конструкций работ [5,25] дает возможность построить компакт на основе (2.7) в целом ряде практически интересных случаев (см., например, вариант построений в [25, раздел 6], отвечающий случаю конечного индексного множества X), после чего можно применить теорему 7.1 для интересующего нас п/м декартова произведения. Данное п/м может, в свою очередь, рассматриваться в качестве пространства обычных решений для статического варианта задачи о достижимости с ограничениями асимптотического характера, подобной в логическом отношении задаче [27] (см. в этой связи [27, предложение 2]).

В заключение отметим (в связи с общими построениями раздела 2) работы [28, 29], посвященные исследованию конкретных реализаций пространства Стоуна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. Архангельский А.В. Компактность // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». Т. 50: Общая топология–2. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 5–128.
3. Ченцов А.Г. Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 268–293.
4. Ченцов А.Г. Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна–Чеха // Современная математика и ее приложения. Академия наук Грузии. Институт кибернетики. 2005. Т. 26. С. 119–150.
5. Ченцов А.Г. Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4. С. 293–311.

6. Ченцов А.Г. Ярусные отображения и преобразования на основе ультрафильтров // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 4. С. 298–314.
7. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1975. 230 с.
8. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
9. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 518 с.
10. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
11. Chentsov A.G. Finitely additive measures and extensions of abstract control problems // Journal of Mathematical Sciences. 2006. Vol. 133. № 2. P. 1045–1206.
12. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
13. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
14. Ченцов А.Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142.
15. Бурбаки Н. Общая топология. М.: Наука, 1968. 272 с.
16. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: УГТУ–УПИ. 2008. 388 с.
17. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные опeратры. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
18. Chentsov A.G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. New York–London–Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996.
19. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
20. Ченцов А.Г. К вопросу о построении корректных расширений в классе конечно-аддитивных мер // Известия вузов. Математика. 2002. № 2 (477). С. 58–80.
21. Chentsov A.G. Asymptotic attainability. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997. 322 p.
22. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: УГТУ–УПИ. 2010. 541 с.
23. Келли Дж.Л. Общая топология. М.: Наука, 1981. 431 с.
24. Рудин У. Функциональный анализ. С.-Пб.–М.–Краснодар: Лань, 2005. 443 с.
25. Ченцов А.Г. К вопросу о представлении ультрафильтров в произведении измеримых пространств // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 2. С. 306–318.
26. Пашаев А.Б., Ченцов А.Г. Обобщенная задача управления в классе конечно-аддитивных мер // Кибернетика. 1986. № 2. С. 110–112.
27. Ченцов А.Г. К вопросу о структуре множеств притяжения в топологическом пространстве // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 1 (39). С. 147–150.
28. Грызлов А.А., Бастрыков Е.С., Головастов Р.А. О точках одного бикомпактного расширения $\mathbb{N}$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17.
29. Головастов Р.А. Об одном бикомпактном расширении счетного дискретного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 14–19.

Поступила в редакцию 15.05.2013

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, заведующий отделом управляемых систем, Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

A. G. Chentsov
To question about representation of Stone compactums

Keywords: extension, finitely additive measure, ultrafilter.

Mathematical Subject Classifications: 28A33

МАТЕМАТИКА 2013. Вып. 4

We consider the questions connected with the representation of ultrafilters of measurable spaces and finitely additive (0,1)-measures for consequent application in extension constructions of abstract attainability problems and extremal problems. Properties connected with the application of (generalized) Cartesian products and their subspaces, and the property having the sense of the identification of ultrafilters and finitely additive (0,1)-measures and realized in the form of homeomorphism of natural topologies are investigated.

REFERENCES

1. Warga J. *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami* (Optimal control of differential and functional equations), Moscow: Nauka, 1977, 624 p.

2. Arkhangel'skii A.V. Compactness, *Itogi Nauki i Tekhniki, Sovrem. Probl. Mat. Fund. Naprav.*, vol. 50, General Topology–2, Moscow: VINITI, 1989, pp. 5–128.

3. Chentsov A.G. Ultrafilters of measurable spaces as a generalized solutions to abstract problems of attainability, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 1, pp. 268–293.

4. Chentsov A.G. Some constructions of the asymptotic analysis connected to the Stone–Chech compactification, *Sovrem. Mat. Prilozh.*, 2005, vol. 26, pp. 119–150.

5. Chentsov A.G. About the example of representation of the space of ultrafilters of the algebra of sets, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 293–311.

6. Chentsov A.G. Tiered operators and conversion based on ultrafilters, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 298–314.

7. Gamkrelidze R.V. *Osnovy optimal'nogo upravleniya* (Foundations of optimal control), Tbilisi: Izd. Tbil. Univ., 1975, 230 p.

8. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.

9. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi. Zadacha o mimimume garantirovannogo rezul'tata* (Control of dynamic system. The problem of the minimum guaranteed result), Moscow: Nauka, 1985, 518 p.

10. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Optimization of guarantee in control problems), Moscow: Nauka, 1981, 288 p.

11. Chentsov A.G. Finitely additive measures and extensions of abstract control problems, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 133, no. 2, pp. 1045–1206.

12. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* (Theory of stochastic processes), Moscow: Fizmatlit, 2005, 402 p.

13. Neve J. *Matematicheskie osnovy teorii veroyatnostey* (Mathematical foundations of probability theory), Moscow: Mir, 1969, 309 p.

14. Chentsov A.G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 113–142.

15. Burbaki N. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Nauka, 1968, 272 p.

16. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, I* (The elements of finitely additive measures theory, I), Yekaterinburg: USTU–UPI, 2008, 388 p.

17. Dunford N., Schwartz J.T. *Lineinye operatopy* (Linear operators), Moscow: Izd. Inostr. Lit., 1962, 895 p.

18. Chentsov A.G. *Finitely additive measures and relaxations of extremal problems*, New York–London–Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996.

19. Engelking R. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Mir, 1986, 751 p.

20. Chentsov A.G. To the question of the construction of correct extensions in the class of finitely additive measures, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2002, no. 2 (477), pp. 58–80.

21. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability*, Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997, 322 p.

22. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, II* (The elements of finitely additive measures theory, II), Yekaterinburg: USTU–UPI, 2010, 541 p.

23. Kelley J.L. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Nauka, 1981, 431 p.

24. Rudin W. *Functional analysis*, McGraw-Hill Science. Translated under the title *Funktsional'nyi analiz*, St.-Petersburg–Moscow–Krasnodar, Lan', 2005, 443 p.

25. Chentsov A.G. To the question of the representation of the product of ultrafilters of measurable spaces, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2013, vol. 19, no. 2, pp. 306–318.

26. Pashaev A.B., Chentsov A.G. Generalized control problem in the class of finitely additive measures, *Kibernetika*, 1986, no. 2, pp. 110–112.

27. Chentsov A.G. To the question of the structure of the attraction sets in a topological space, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2012, no. 1 (39), pp. 147–150.

28. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. About points of compactification ℕ, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 10–17.

29. Golovastov R.A. About a bicompactification of a countable discrete space, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 14–19.

Received 15.05.2013

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru