УДК 517.977

© *В. Е. Хартовский, А. Т. Павловская*

К ПРОБЛЕМЕ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА [1]

Для линейных автономных систем нейтрального типа с одним запаздыванием в состоянии разработан метод построения линейных дифференциально-разностных регуляторов с обратной связью, обеспечивающих модальную управляемость. При этом отдельно выделены случаи непрерывного и абсолютно непрерывного решений. Предложено обобщение этих результатов на системы указанного типа с многими соизмеримыми запаздываниями.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, модальная управляемость, дифференциально-разностный регулятор.

Введение

Проблема модального управления (управления спектром) имеет многочисленные приложения при синтезе систем автоматического регулирования и занимает одну из ключевых позиций в теории управления. В случае систем с последействием основные этапы развития этой теории, обсуждение имеющихся методов, результатов и применяемых типов регуляторов (в виде линейной интегральной или разностной обратной связи) достаточно полно приведены в работе [1]. В представленном сообщении предложен конструктивный метод построения дифференциально-разностных регуляторов для линейных автономных систем нейтрального типа, обеспечивающих замкнутой системе заданные коэффициенты характеристического квазиполинома. Подобная задача для систем нейтрального типа исследована в [2], однако управление осуществляется регулятором вида $u(t) = Q_{00}x(t)+\sum\limits_{i=0}^{\Theta_1}\sum\limits_{j=1}^{\Theta_2} Q_{ij}x^{(i)}(t-jh)$, причем контролировать порядок производных, входящих в регулятор, в общем случае невозможно. Однако решение системы нейтрального типа может не быть дифференцируемым [3, с. 323], а аппроксимация его гладкой функцией не всегда допустима в силу некорректности численного дифференцирования в пространстве непрерывных функций. Это обстоятельство сужает спектр применения результатов [2]. В представленном исследовании строятся регуляторы, соответствующие непрерывному и абсолютно непрерывному решению и не выводящие систему за пределы исходного класса.

Процесс построения осуществляется в два этапа. На первом этапе строится регулятор, обеспечивающий системе запаздывающий тип квазиполинома. Это, как будет показано в § 2 настоящей работы, фактически эквивалентно апериодическому управлению [4] дискретной системы, описывающей динамику изменения скачков производной решения. После этого замкнутая система нейтрального типа преобразуется в систему запаздывающего типа, к которой на втором этапе построения регулятора применяются известные для таких систем методы модального управления. Такая идея управления объектами нейтрального типа достаточно хорошо себя зарекомендовала при построении программных управлений в [5, 6].

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф12МВ–043).

§ 1. Типы используемых регуляторов

Рассмотрим систему, которую будем для краткости называть системой Σ_1,

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) - Dx(t-h)\right) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

$$x(t) = \eta(t), \quad t \in [-h, 0] \ , \tag{1.2}$$

где x — решение уравнения (1.1), u — кусочно-непрерывное управление, $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 0, 1$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\mathbb{R}^{n_1\times n_2}$ — множество матриц размера $n_1 \times n_2$ с вещественными элементами, $\mathbb{R}^{n_1\times 1} = \mathbb{R}^{n_1}$. Начальная функция η в (1.2) предполагается непрерывной. Под решением уравнения (1.1) понимается [3, с. 323] непрерывная (не обязательно дифференцируемая) при $t \geqslant -h$ функция x, удовлетворяющая уравнению (1.1) почти всюду. Однако разность $x(t) - Dx(t-h)$, $t \geqslant 0$, представляет собой дифференцируемую функцию, поэтому систему Σ_1 можно замкнуть регулятором вида

$$u(t) = \sum_{k=1}^{s} T_k \frac{d}{dt}\left(x(t-kh) - Dx(t-(k+1)h)\right) + \sum_{k=0}^{s} R_k x(t-kh), \tag{1.3}$$

где s — некоторое натуральное число, $T_k \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $R_k \in \mathbb{R}^{r\times n}$.

Если начальная функция η в (1.2) абсолютно непрерывная, то уравнение (1.1) можно переписать в виде

$$\dot{x}(t) - D\dot{x}(t-h) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \quad t \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Уравнение (1.4) с абсолютно непрерывной начальной функцией (1.2) назовем системой Σ_2. Решение уравнения (1.4) — абсолютно непрерывная функция, поэтому в случае системы Σ_2 будем использовать более широкий класс регуляторов, а именно:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{s} T_k \dot{x}(t-kh) + \sum_{k=0}^{s} R_k x(t-kh). \tag{1.5}$$

Обратим внимание, что типы регуляторов (1.3) и (1.5) не выводят системы Σ_1 и Σ_2 из исходного класса систем и не требуют дополнительной гладкости начальной функции.

Обозначим: $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, $E_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ — единичная матрица, $A(m) = A_0 + A_1 m$, $R(m) = \sum\limits_{k=0}^{s} R_k m^k$, $T(m) = \sum\limits_{k=1}^{s} T_k m^k$, $\overline{\Sigma}_1$ $\left(\overline{\Sigma}_2\right)$ — система Σ_1 (Σ_2), замкнутая регулятором (1.3) ((1.5)),

$$\Delta_{\overline{\Sigma}_1} = \det\left[\lambda\{E_n - De^{-\lambda h} - BT(e^{-\lambda h})(E_n - De^{-\lambda h})\} - \{A(e^{-\lambda h}) + BR(e^{-\lambda h})\}\right]$$
$$(\Delta_{\overline{\Sigma}_2} = \det\left[\lambda\{E_n - De^{-\lambda h} - BT(e^{-\lambda h})\} - \{A(e^{-\lambda h}) + BR(e^{-\lambda h})\}\right])$$

— характеристический квазиполином системы $\overline{\Sigma}_1$ $\left(\overline{\Sigma}_2\right)$, $H\left[P(m)\right]$ — матрица, присоединенная к произвольной квадратной полиномиальной матрице $P(m)$ (то есть $H\left[P(m)\right] \cdot P(m) = P(m) \cdot H\left[P(m)\right] = \det P(m) \cdot E_n$).

Определение 1. Систему Σ_1 (Σ_2) назовем *модально управляемой регулятором* (1.3) ((1.5)) (далее *«модально управляемой»*), если для любых заданных полиномов $r_k(m) = \sum\limits_{j=0}^{s_1} r_{k,j} m^j$, $r_n(0) = 1$, найдутся число s, матрицы $T_k \in \mathbb{R}^{r\times n}$ и $R_k \in \mathbb{R}^{r\times n}$ такие, что $\Delta_{\overline{\Sigma}_1}(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda^k r_k(e^{-\lambda h})$ $(\Delta_{\overline{\Sigma}_2}(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda^k r_k(e^{-\lambda h}))$.

§ 2. Предварительные результаты

Лемма 1. *Если система* Σ_1 *модально управляема, то*

$$\det\,[E_n - Dm] \equiv 1 \tag{2.1}$$

(*то есть матрица* D *является нильпотентной*).

Доказательство. Пусть $\Delta_1(m)$ — произвольный полином, удовлетворяющий условию $\Delta_1(0) = 1$. В силу модальной управляемости системы Σ_1 найдется регулятор вида (1.3) такой, что $\Delta_{\overline{\Sigma}_1}(\lambda) = \lambda^n \Delta_1(e^{-\lambda h})$. Положим $\widehat{D}(m) = E_n - Dm - BT(m)\,(E_n - Dm)$. Учитывая, что $\det H[\widehat{D}(m)] = (\det \widehat{D}(m))^{n-1}$, имеем

$$\Delta_{\overline{\Sigma}_1}(\lambda)\cdot(\det \widehat{D}(e^{-\lambda h}))^{n-1} = \det\,[\lambda\cdot\det\widehat{D}(e^{-\lambda h})E_n - \{A(e^{-\lambda h}) + BR(e^{-\lambda h})\}H[\widehat{D}(e^{-\lambda h})]\,].$$

Обозначим $\varphi(\lambda, m) = \det\,[\lambda E_n - \{A(m) + BR(m)\}H[\widehat{D}(m)]\,]$. Квазиполином $\varphi(\lambda, m)$ представим в виде $\varphi(\lambda, m) = \lambda^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda^k p_k(m)$, где $p_k(m)$ — некоторые полиномы. Поэтому

$$\Delta_{\overline{\Sigma}_1}(\lambda)\cdot(\det \widehat{D}(e^{-\lambda h}))^{n-1} = \varphi(\lambda\cdot\det\widehat{D}(e^{-\lambda h}), e^{-\lambda h}) = (\lambda\cdot\det\widehat{D}(e^{-\lambda h}))^n +$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}(\lambda\cdot\det\widehat{D}(e^{-\lambda h}))^k p_k(e^{-\lambda h}) = \lambda^n\Delta_1(e^{-\lambda h})\cdot(\det\widehat{D}(e^{-\lambda h}))^{n-1}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, приходим к равенству $\Delta_1(m) = \det\widehat{D}(m)$, то есть $\det\,[E_n - BT(m)]\times\det\,[E_n - Dm] = \Delta_1(m)$. Значит, $\det\,[E_n - Dm]$ является делителем $\Delta_1(m)$, а в силу произвольности $\Delta_1(m)$ имеем (2.1). □

Лемма 2. *Если система* Σ_2 *модально управляема, то*

$$\operatorname{rank}\,[E_n - Dm, B] = n \quad \forall\, m \in \mathbb{C}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Доказательство леммы во многом похоже на доказательство леммы 1, поэтому изложим его схематично. Пусть $\Delta_1(m)$ — произвольный полином, $\Delta_1(0) = 1$. Тогда найдется регулятор (1.5) такой, что характеристическое уравнение системы $\overline{\Sigma}_2$ будет $\Delta_{\overline{\Sigma}_2}(\lambda) = \lambda^n\Delta_1(e^{-\lambda h})$. Обозначим $\widetilde{D}(m) = E_n - Dm - BT(m)$. Аналогично доказательству леммы 1 заключаем, что $\det\widetilde{D}(m) = \Delta_1(m)$. Далее, используя метод доказательства от противного, можно показать, что последнее равенство для произвольного полинома невозможно, если нарушается (2.2). □

Замечание 1. Для наилучшего понимания идейной основы работы схематично приведем еще одно доказательство леммы 2. Пусть $\Delta_{\overline{\Sigma}_2}(\lambda) = \lambda^n\Delta_1(e^{-\lambda h})$, где произвольный полином $\Delta_1(m)$ удовлетворяет условию $\Delta_1(0) = 1$. Возьмем для системы $\overline{\Sigma}_2$ произвольную начальную функцию, но такую, что решение системы $\overline{\Sigma}_2$ $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируемо при $t \geqslant 0$ и имеет кусочно-непрерывную производную n-го порядка [3, с. 37]. Обозначим $\delta_k = x^{(n)}(kh{+}0) - x^{(n)}(kh{-}0)$ и $w_k = u^{(n)}(kh{+}0) - u^{(n)}(kh{-}0)$, $k = 0, 1, \ldots$ — скачки n-ых производных решения системы $\overline{\Sigma}_2$ и управления (1.5) в точках kh. Можно показать, что при достаточно большом k выполняется $\Delta_1(e^{-ph})\delta_k = 0$ (e^{-ph} — оператор сдвига, то есть $e^{-ph}\delta_k = \delta_{k-1}$). С другой стороны, из (1.4), (1.5) следует [6], что $\delta_k = D\delta_{k-1} + Bw_k$, где $w_k = \sum\limits_{i=1}^{s} T_i\delta_{k-i}$. Варьируя коэффициенты полинома $\Delta_1(m)$, приходим к утверждению: для любого полинома $\Delta_1(m)$, $\Delta_1(0) = 1$, существует матрица $T(m)$, что $\det\widetilde{D}(m) = \Delta_1(m)$.

Лемма 3. *Пусть имеет место* (2.2). *Тогда для любого полинома* $\Delta_1(m)$, $\Delta_1(0) = 1$, *найдется матрица* $T(m) = \sum\limits_{k=1}^{s} T_k m^k$ *такая, что* $\det\,[E_n - Dm - BT(m)] = \Delta_1(m)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $D_B = \big[B, DB, \ldots, D^{n-1}B\big]$. В силу (2.2)

$$\operatorname{rank} D_B = \operatorname{rank}\,[D_B, D^n]\ . \tag{2.3}$$

Пусть $\operatorname{rank}\,D_B = \rho$ и матрица Q такова, что $Q^{-1}DQ = \begin{bmatrix} \overline{D}_1 & \overline{D}_2 \\ 0 & N \end{bmatrix}$, $Q^{-1}B = \begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, где $\overline{D}_1 \in \mathbb{R}^{\rho\times\rho}$, $\overline{B}_1 \in \mathbb{R}^{\rho\times r}$, размеры остальных блоков очевидны, $\operatorname{rank}\Big[\overline{B}_1, \overline{D}_1\overline{B}_1, \ldots, \overline{D}_1^{\rho-1}\overline{B}_1\Big] = \rho$. В силу (2.3) блок N будет нильпотентный, значит, $\det\,[E_{n-\rho} - Nm] \equiv 1$. Построим полиномиальную матрицу $\overline{T}_1(m)$, $\overline{T}_1(0) = 0$, что $\det\big[E_\rho - \overline{D}_1(m) - \overline{B}_1\overline{T}_1(m)\big] = \Delta_1(m)$ (для этого достаточно привести матрицу $\overline{D}_1$ к блочно-треугольному виду с диагональными блоками в форме Фробениуса). Заметим, что матрица $\overline{T}_1(m)$ определяется неоднозначно. Положим $T(m)Q = \big[\overline{T}_1(m), \overline{T}_2(m)\big]$, где $\overline{T}_2(m)$ — любая матрица соответствующего размера. Тогда

$$\begin{aligned}\det\,[E_n - Dm - BT(m)] &= \det\,\big[E_n - Q^{-1}DQm - Q^{-1}BT(m)Q\big] = \\ &= \Delta_1(m)\cdot\det\,[E_{n-\rho} - Nm] = \Delta_1(m).\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Замечание 2. Без требования $\Delta_1(0) = 1$ формулировка леммы 3 является неверной.

§ 3. Условия модальной управляемости системы Σ_2

Считаем, что условие (2.2) выполнено. Тогда существует (в общем случае не единственная) матрица $\widetilde{T}(m) = \sum\limits_{k=1}^{s} \widetilde{T}_k m^k$, $\widetilde{T}_k \in \mathbb{R}^{r\times n}$, обеспечивающая равенство

$$\det\,[E_n - Dm - B\widetilde{T}(m)] \equiv 1. \tag{3.1}$$

Замечание 3. Условие (3.1) обозначает, что у системы Σ_2, замкнутой регулятором $u(t) = \sum\limits_{k=1}^{s} \widetilde{T}_k\dot{x}(t-kh)$, характеристический квазиполином будет имееть запаздывающий тип.

Обозначим $A(m)H[E_n - Dm - B\widetilde{T}(m)] = \widehat{A}(m)$, $\Delta_{\overline{\Sigma}_2}(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda^k r_k(e^{-\lambda h})$ (напомним, что символ $H[\,\cdot\,]$ обозначает присоединенную матрицу, а полиномы $r_k(m)$ фигурируют в определении 1). Обратим внимание, что замена $\widetilde{x}(t) = H[E_n - De^{-ph} - B\widetilde{T}(e^{-ph})]x(t)$, где e^{-ph} — оператор сдвига ($e^{-ph}f(t) = f(t-h)$), приводит (1.4) при $u(t) = \widetilde{T}(e^{-ph})x(t) + u^1(t)$ к системе запаздывающего типа $\dot{\widetilde{x}}(t) = \widehat{A}(e^{-ph})\widetilde{x}(t) + Bu^1(t)$. Цель дальнейших рассуждений — установить связь между модальной управляемостью исходной системы и системы запаздывающего типа, определяемой парой матриц $\{\widehat{A}(e^{-ph}), B\}$, поскольку параметры последней зависят от матрицы $\widetilde{T}(m)$.

Лемма 4. *Пусть выполняется условие* (2.2), *а* $\widetilde{T}(m) = \sum\limits_{k=1}^{s} \widetilde{T}_k m^k$ *— любая матрица, обеспечивающая равенство* (3.1). *Тогда система* Σ_2 *модально управляема в том и только том случае, если для любого заданного квазиполинома* $\Delta_{\overline{\Sigma}_2}(\lambda)$ *найдутся матрицы* $\widehat{R}(m) = \sum\limits_{k=0}^{s} \widehat{R}_k m^k$ *и* $\widehat{T}(m) = \sum\limits_{k=1}^{s} \widehat{T}_k m^k$, $\widehat{R}_k \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $\widehat{T}_k \in \mathbb{R}^{r\times n}$, *такие, что*

$$\det\,[\lambda E_n - \widehat{A}(e^{-\lambda h}) - B\{\lambda\widehat{T}(e^{-\lambda h}) + \widehat{R}(e^{-\lambda h})\}] = \Delta_{\overline{\Sigma}_2}(\lambda). \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть имеет место (3.2). Учитывая (3.1), имеем

$$\Delta_{\overline{\Sigma}_2}(\lambda) = \det\left[(\lambda E_n - \widehat{A}(e^{-\lambda h}) - B\{\lambda\widehat{T}(e^{-\lambda h}) + \widehat{R}(e^{-\lambda h})\})\cdot(E_n - De^{-\lambda h} - B\widetilde{T}(e^{-\lambda h}))\right] =$$

$$= \det\left[\lambda(E_n - De^{-\lambda h}) - A(e^{-\lambda h}) - B\{\lambda T(e^{-\lambda h}) + R(e^{-\lambda h})\}\right],$$

где

$$T(m) = \widetilde{T}(m) + \widehat{T}(m)(E_n - Dm - B\widetilde{T}(m)), R(m) = \widehat{R}(m)(E_n - Dm - B\widetilde{T}(m)). \quad (3.3)$$

Из последних двух равенств определяются матрицы T_k и R_k регулятора (1.5). Тем самым показано, что система Σ_2 модально управляема.

Доказательство обратного утверждения следует из равенства

$$\det\left[\lambda(E_n - De^{-\lambda h}) - A(e^{-\lambda h}) - B\{R(e^{-\lambda h}) + \lambda T(e^{-\lambda h})\}\right] =$$

$$= \det\left[\lambda(E_n - De^{-\lambda h} - B\widetilde{T}(e^{-\lambda h})) - A(e^{-\lambda h}) - B\{R(e^{-\lambda h}) + \lambda(T(e^{-\lambda h}) - \widetilde{T}(e^{-\lambda h}))\}\right].$$

□

Из леммы 4 следует, что дальнейшее исследование свойства модальной управляемости системы Σ_2 можно провести, оперируя лишь парой матриц $\{\widehat{A}(m), B\}$, что существенно проще. При этом матрицу $\widetilde{T}(m)$ можно выбрать произвольно, лишь бы только имело место (3.1).

Обозначим $C(m) = [B, \widehat{A}(m)B, \ldots, \widehat{A}^{n-1}(m)B]$.

Теорема 1. *Для модальной управляемости системы Σ_2 необходимо, чтобы имели место условие* (2.2) *и равенство*

$$\operatorname{rank} C(m) = n \quad \forall\, m \in \mathbb{C}. \quad (3.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим в (3.2) $\Delta_{\overline{\Sigma}_2}(\lambda) = \lambda^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} g_k\lambda^k$ — произвольный полином. В силу того, что $\widehat{T}(0) = 0$, (3.2) останется справедливым, если в левой части (3.2) положить $\widehat{T}(m) \equiv 0$. Поэтому $\det[\lambda E_n - \widehat{A}(m) - B\widehat{R}(m)] = \Delta_{\overline{\Sigma}_2}(\lambda)$ при любом m. После этого (3.4) следует из необходимого условия модальной управляемости обыкновенной линейной системы и леммы 4. □

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (2.2), *и пусть, кроме того, найдутся столбцы b_{k_j}, $j = \overline{1,\xi}$, матрицы B и числа μ_j, $j = \overline{1,\xi}$, $\mu_1 + \ldots + \mu_\xi = n$, такие, что*

$$\det[b_{k_1}, \ldots, \widehat{A}^{\mu_1 - 1}(m)b_{k_1}, \ldots, b_{k_\xi}, \ldots, \widehat{A}^{\mu_\xi - 1}(m)b_{k_\xi}] \equiv const \neq 0. \quad (3.5)$$

Тогда система Σ_2 модально управляема.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Delta_{\overline{\Sigma}_2}(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda^k r_k(e^{-\lambda h})$ — произвольный квазиполином, $r_n(0) = 1$. В силу условия (3.5) найдутся [2] матрица $\widetilde{R}(m) = \sum\limits_{k=0}^{s} \widetilde{R}_k m^k$, $\widetilde{R}_k \in \mathbb{R}^{r\times n}$, и полиномиальная матрица $\Gamma(m)$, $\det\Gamma(m) \equiv const \neq 0$, что

$$\Gamma^{-1}(e^{-\lambda h})[\widehat{A}(e^{-\lambda h}) + B\widetilde{R}(e^{-\lambda h})]\,\Gamma(e^{-\lambda h}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

а столбец матрицы $\Gamma^{-1}(e^{-\lambda h})B$ с номером k_l, $k_l \in \{k_1, \ldots, k_\xi\}$, имеет вид $\operatorname{col}[0, \ldots, 0, 1]$. Положим

$$\{\lambda\widehat{T}(m) + \widehat{R}(m)\}\,\Gamma(m) = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_1(m) & \ldots & g_n(\lambda, m) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

(от нуля отлична только строка k_l), где $g_n(\lambda, m) = \lambda(1 - r_n(m)) - r_{n-1}(m)$, $g_k(m) = -r_{k-1}(m)$, $k = \overline{1, n-1}$. Тогда

$$\det[\lambda E_n - \Gamma^{-1}(e^{-\lambda h})\{\widehat{A}(e^{-\lambda h}) + B\widetilde{R}(e^{-\lambda h})\}\Gamma(e^{-\lambda h}) - \\ - \Gamma^{-1}(e^{-\lambda h})B\{\lambda\widehat{T}(e^{-\lambda h}) + \widehat{R}(e^{-\lambda h})\}\Gamma(e^{-\lambda h})] = \Delta_{\overline{\Sigma}_2}(\lambda),$$

или, что то же самое,

$$\det[\lambda E_n - \widehat{A}(e^{-\lambda h}) - B\{\widetilde{R}(e^{-\lambda h}) + \widehat{R}(e^{-\lambda h}) + \lambda\widehat{T}(e^{-\lambda h})\}] = \Delta_{\overline{\Sigma}_2}(\lambda).$$

Умножая последнее равенство на $\det[E_n - Dm - B\widetilde{T}(m)]$ и учитывая (3.1), получим

$$\det[\lambda(E_n - De^{-\lambda h}) - A(e^{-\lambda h}) - B\{R(e^{-\lambda h}) + \lambda T(e^{-\lambda h})\}] = \Delta_{\overline{\Sigma}_2}(\lambda),$$

где матрица $T(m)$ определяется формулой (3.3), а $R(m) = (\widetilde{R}(m) + \widehat{R}(m))(E_n - Dm - B\widetilde{T}(m))$. Далее из равенств $T(m) = \sum\limits_{k=1}^{s} T_k m^k$ и $R(m) = \sum\limits_{k=0}^{s} R_k m^k$ определяем число s и матрицы T_k и R_k регулятора (1.5). □

Замечание 4. Условия теорем 1, 2 можно сформулировать через параметры исходной системы (без нахождения матрицы $\widetilde{T}(m)$). Для этого достаточно привести матрицу $\overline{D}_1$ к упомянутому блочно-треугольному виду (см. доказательство леммы 3). Поскольку указанная процедура не представляет принципиальных трудностей, приводить ее не будем.

Пример. Рассмотрим систему Σ_2 с параметрами $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Условие (2.2) для данной системы выполняется. Регулятор имеет вид

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - r_3(e^{-ph}) \end{bmatrix}\dot{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\dot{x}(t-h) + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -r_0(e^{-ph}) & -r_0(e^{-ph}) - r_1(e^{-ph}) & r_0(e^{-ph}) - r_2(e^{-ph}) - 1 \end{bmatrix} x(t) + \\ + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -r_0(e^{-ph}) \end{bmatrix} x(t-h),$$

где $r_i(m)$, $i = \overline{0, 3}$ — некоторые полиномы. Обратим внимание, что $r_3(0) = 1$, поэтому, в силу действия оператора сдвига e^{-ph}, аргумент функции $\dot{x}$, входящий в построенный регулятор, будет иметь вид $t - kh$, где k — натуральное число. Выбрав коэффициенты полиномов $r_i(m)$, $i = \overline{0, 3}$ получим любой наперед заданный многочлен

$$\Delta_{\overline{\Sigma}_2}(\lambda) = \lambda^3 r_3(e^{-\lambda h}) + \lambda^2 r_2(e^{-\lambda h}) + \lambda r_1(e^{-\lambda h}) + r_0(e^{-\lambda h}).$$

§ 4. Условия модальной управляемости системы Σ_1

Считаем, что условие (2.1) имеет место. Положим $\breve{A}(m) = A(m)\left(\sum\limits_{k=0}^{\widehat{n}}(Dm)^k\right)$, где $\widehat{n} \leqslant n$ — индекс нильпотентности матрицы D. По схеме § 3 доказываются следующие утверждения.

Теорема 3. *Для модальной управляемости системы Σ_1 необходимо, чтобы имели место условие* (2.1) *и равенство* $\operatorname{rank}\breve{C}(m) = n\ \forall\, m \in \mathbb{C}$, *где* $\breve{C}(m) = [B, \breve{A}(m)B, \ldots, \breve{A}^{n-1}(m)B]$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условие* (2.1) *и, кроме того, найдутся столбцы* b_{k_j}, $j = \overline{1,\xi}$, *матрицы* B *и числа* μ_j, $j = \overline{1,\xi}$, $\mu_1 + \ldots + \mu_\xi = n$, *такие, что*

$$\det\,[b_{k_1}, \ldots, \breve{A}^{\mu_1-1}(m)b_{k_1}, \ldots, b_{k_\xi}, \ldots, \breve{A}^{\mu_\xi-1}(m)b_{k_\xi}] \equiv const \neq 0.$$

Тогда система Σ_1 модально управляема.

§ 5. Случай систем с многими запаздываниями

Исследование систем нейтрального типа с многими соизмеримыми запаздываниями во многом схоже с исследованием систем Σ_1 и Σ_2. Поэтому укажем лишь принципиальные отличия и приведем достаточные условия модальной управляемости.

Рассмотрим систему нейтрального типа со многими запаздываниями Σ_3:

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} D_i\dot{x}(t-ih) = \sum_{i=0}^{m}\left(A_i x(t-ih) + B_i u(t-ih)\right), \quad t \geqslant 0, \tag{5.1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-mh, 0], \tag{5.2}$$

где $D_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = \overline{1,m}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $i = \overline{0,m}$.

Обозначим $D(m) = \sum\limits_{i=1}^{m} D_i m^{i-1}$, $A(m) = \sum\limits_{i=0}^{m} A_i m^i$, $B(m) = \sum\limits_{i=0}^{m} B_i m^i$.

Определение модальной управляемости системы Σ_3 регулятором (1.5) формулируется подобно определению 1.

Аналогично лемме 2 можно показать, что для модальной управляемости необходимо, чтобы для любого полинома $\Delta(m)$, $\Delta(0) = 0$, нашлась полиномиальная матрица $T(m) = \sum\limits_{i=1}^{s} T_i m^i$, $T(0) = 0$, $T_i \in \mathbb{R}^{r\times n}$, что

$$\det\,[E_n - D(m)\cdot m - B(m)T(m)] = \Delta(m). \tag{5.3}$$

Отсюда следует необходимое условие модальной управляемости системой Σ_3:

$$\operatorname{rank}\,[E_n - D(m)\cdot m, B(m)] = n \quad \forall\, m \in \mathbb{C}. \tag{5.4}$$

Однако условия (5.4) недостаточно для существования матрицы $T(m)$, обеспечивающей (5.3). Например, такой матрицы не существует, если $n = 1$, $D = d$, $B(m) = b_1 + b_2 m$, $d\cdot b_1\cdot b_2 \neq 0$.

Лемма 5 (см. [4]). *Для того чтобы существовала матрица $T(m)$, обеспечивающая* (5.3), *достаточно существования столбцов* $b_{k_i}(m)$, $i = \overline{1,\xi}$, *матрицы* $B(m)$ *и чисел* μ_j, $j = \overline{1,\xi}$, $\mu_1 + \ldots + \mu_\xi = n$, *таких, что*

$$\det\,[b_{k_1}(m), \ldots, D^{\mu_1-1}(m)b_{k_1}(m), \ldots, b_{k_\xi}(m), \ldots, D^{\mu_\xi-1}(m)b_{k_\xi}(m)] \equiv const \neq 0. \tag{5.5}$$

Заметим, что если условие (5.5) имеет место, то все остальные рассуждения по решению задачи модальной управляемости системы Σ_3 аналогичны, как и для системы Σ_2. Сформулируем достаточные условия. Предварительно обозначим $\overline{A}(m) = A(m)H[E_n - D(m)\cdot m - B(m)T(m)]$, где матрица $T(m)$ обеспечивает (5.3) при $\Delta(m) \equiv 1$.

Теорема 5. *Пусть найдутся столбцы $b_{k_j}(m)$, $j=\overline{1,\xi}$, матрицы $B(m)$ и числа μ_j, $j=\overline{1,\xi}$, $\mu_1+\ldots+\mu_\xi=n$, такие, что*

$$\det\left[b_{k_1}(m),\ldots,\overline{A}^{\mu_1-1}(m)b_{k_1}(m),\ldots,b_{k_\xi}(m),\ldots,\overline{A}^{\mu_\xi-1}(m)b_{k_\xi}(m)\right]\equiv const\neq 0.$$

Тогда система Σ_3 модально управляема.

Рассмотрим систему нейтрального типа Σ_4 с непрерывным решением:

$$\frac{d}{dt}(x(t)-\sum_{i=1}^{m}D_i x(t-ih))=\sum_{i=0}^{m}(A_i x(t-ih)+B_i u(t-ih)),\quad t\geqslant 0,$$

$$x(t)=\eta(t),\quad t\in[-mh,0],$$

где $\eta(t)$ — непрерывная функция.

Определение модальной управляемости системы Σ_4 регулятором

$$u(t)=\sum_{k=1}^{s}T_k\frac{d}{dt}(x(t-kh)-\sum_{i=1}^{m}D_i x(t-(i+k)h))+\sum_{k=0}^{s}R_k x(t-kh)$$

формулируется аналогично определению 1. Необходимым условием модальной управляемости будет требование

$$\det[E_n-D(m)\cdot m]\equiv 1. \tag{5.6}$$

Для доказательства этого факта достаточно повторить с очевидными изменениями рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 1. Сформулируем для этой системы достаточные условия модальной управляемости. Обозначим $\overline{\overline{A}}(m)=A(m)H[E_n-D(m)\cdot m]$.

Теорема 6. *Пусть выполняется условие* (5.6) *и, кроме того, найдутся столбцы $b_{k_j}(m)$, $j=\overline{1,\xi}$, матрицы $B(m)$ и числа μ_j, $j=\overline{1,\xi}$, $\mu_1+\ldots+\mu_\xi=n$, такие, что*

$$\det\left[b_{k_1}(m),\ldots,\overline{\overline{A}}^{\mu_1-1}(m)b_{k_1}(m),\ldots,b_{k_\xi}(m),\ldots,\overline{\overline{A}}^{\mu_\xi-1}(m)b_{k_\xi}(m)\right]\equiv const\neq 0.$$

Тогда система Σ_4 модально управляема.

§ 6. Обсуждение результатов

1. Для линейных автономных систем нейтрального типа в случаях непрерывного и абсолютно непрерывного решений получены необходимые и достаточные условия модальной управляемости посредством линейных дифференциально-разностных регуляторов. Обобщение используемых типов регуляторов на случай интегральной обратной связи (в виде линейного непрерывного функционала) сохранит необходимыми условия (2.1) и (2.2), но, как следует из § 3 и [1], при $B\in\mathbb{R}^n$ позволит ослабить условие (3.5) или его аналог в теореме 4.

2. В [3, с. 352] линейное неоднородное функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа определяется так:

$$\frac{d}{dt}[Dx_t-G(t)]=Lx_t+F(t),\qquad t\geqslant 0$$

(обозначения см. в [3, с. 352]). Поэтому обобщением объекта исследования является система (1.1) с левой частью вида

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)-Dx(t-h)+B_1u_1(t)\right),$$

где u_1 — управление, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times l}$. Аналогично доказательству леммы 2 можно показать, что условие $\operatorname{rank}[E_n - Dm, B_1] = n \ \forall m \in \mathbb{C}$ будет необходимым для модальной управляемости такой системой регулятором

$$u_1(t) = \sum_{k=1}^{s_1} \overline{T}_k x(t-kh),$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^{s_2} T_k \frac{d}{dt}\left(x(t-kh) - Dx(t-(k+1)h) + B_1 u_1(t-kh)\right) + \sum_{k=0}^{s_2} R_k x(t-kh).$$

Это сводит задачу модальной управляемости к аналогичной задаче для системы Σ_1.

3. Из леммы 2 следует, что условие (2.2) является необходимым и достаточным для существования линейной обратной связи (1.5) ($R_k = 0$), обеспечивающей замкнутой системе Σ_2 запаздывающий тип характеристического квазиполинома. Это позволяет преобразовать исходную систему нейтрального типа к системе запаздывающего типа (см. § 3), качественная теория управления которыми развита в большей мере. Например, так можно решать задачи успокоения решения, выхода и идентификации состояния систем нейтрального типа [5–7].

В заключение отметим, что представляет интерес получение критерия модальной управляемости исследуемых систем в классе дифференциально-разностных регуляторов, однако, насколько известно авторам, этот вопрос остается открытым даже в случае систем запаздывающего типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченко В.М. Управление системами с последействием в шкалах линейных регуляторов по типу обратной связи // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 1003–1017.
2. Марченко В.М., Якименко А.А. О модальном управлении многовходных систем с запаздыванием аргументом нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1534–1543.
3. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
4. Асмыкович И.К. Апериодическое управление линейными дискретными системами с запаздыванием // Актуальные задачи теории динамических систем управления: сборник статей / Институт математики АН БССР. Минск: Наука и техника, 1989. С. 19–26.
5. Хартовский В.Е. Задача полной управляемости и ее обобщение для линейных автономных систем нейтрального типа // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 6. С. 15–28.
6. Хартовский В.Е., Павловская А.Т. Полная управляемость и управляемость линейных автономных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2013. № 5. С. 59–79.
7. Хартовский В.Е. Задачи идентификации и управления выходом для систем с запаздываниями // Автоматика и телемеханика. 2011. № 5. С. 17–31.

Поступила в редакцию 06.11.2013

Хартовский Вадим Евгеньевич, к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой логистики и методов управления, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, 230023, Беларусь, г. Гродно, ул. Ожешко, 22.
E-mail: hartovskij@grsu.by

Павловская Анастасия Тауновна, аспирант, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, 230023, Беларусь, г. Гродно, ул. Ожешко, 22.
E-mail: pavlovskay_at@grsu.by

V. E. Khartovskii, A. T. Pavlovskaya

To the problem of modal control for linear systems of neutral type

Keywords: the systems of neutral type, modal controllability, the difference-differential feedback control.

Mathematical Subject Classifications: 93B05, 93C15

МАТЕМАТИКА 2013. Вып. 4

For linear autonomous systems of neutral type with one delay in the state, we develop the method of construction of linear difference-differential feedback controls that ensure modal controllability. In this case, we distinguish the cases of continuous and absolutely continuous solutions. The generalization of these results to a system of this type with multiple commensurate delays is suggested.

REFERENCES

1. Marchenko V.M. Control of systems with aftereffect in scales of linear controllers with respect to the type of feedback, *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 7, pp. 1014–1028.

2. Marchenko V.M., Yakimenko A.A. Modal control of multi-input systems of neutral type with retarded argument, *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 11, pp. 1595–1604.

3. Hale J. *Theory of functional differential equations*, New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1977. Translated under the title *Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii*, Moscow: Mir, 1984, 421 p.

4. Asmykovich I.K. Aperiodic control by linear discrete systems with delay, *Aktual'nye zadachi teorii dinamicheskikh sistem upravleniya* (Actual problems of the theory of dynamic control systems), Inst. Mat. Akad. Nauk Belorus. SSR, Minsk, Nauka i Tekhnika, 1989, pp. 19–26.

5. Khartovskii V.E. Complete controllability problem and its generalization for linear autonomous systems of neutral type, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, issue 6, pp. 755–769.

6. Khartovskii V.E., Pavlovskaya A.T. Complete controllability and controllability for linear autonomous systems of neutral type, *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, issue 5, pp. 769–784.

7. Khartovskii V.E. Problems of identification and control of the output for time lag systems, *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, issue 5, pp. 17–31.

Received 06.11.2013

Khartovskii Vadim Evgen'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Logistics and Methods of Control, Yanka Kupala State University of Grodno, ul. Ozheshko, 22, Grodno, 230023, Belarus.
E-mail: hartovskij@grsu.by

Pavlovskaya Anastasiya Taunovna, Post-graduate student, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Yanka Kupala State University of Grodno, ul. Ozheshko, 22, Grodno, 230023, Belarus.
E-mail: pavlovskay_at@grsu.by