УДК 515.163.1 + 517.977.1

© *Е. Л. Тонков*

МАГИСТРАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ НА ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЯХ[1]

Рассматриваются так называемые *стандартные* управляемые системы, это системы дифференциальных уравнений, заданных на гладких многообразиях конечной размерности, равномерно непрерывные и ограниченные по времени на числовой прямой и локально липшицевы по фазовым переменным. Кроме того, предполагается, что задано *компактное* множество, задающее геометрические ограничения на допустимые управления и, кроме того, выполнено *условие невырожденности*, означающее, что для каждой точки фазового многообразия и всех моментов времени найдется управление, при котором значение векторного поля содержится в евклидовом пространстве, касательном к фазовому многообразию в заданной точке.

При помощи модифицированного метода функции Ляпунова и построения омега-предельного множества соответствующей динамической системы сдвигов сформулированы утверждения о существовании *ограниченных* на положительной полуоси допустимых управляемых процессов и утверждение о равномерной локальной управляемости соответствующего магистрального процесса.

Ключевые слова: магистральные процессы, многообразия конечной размерности, равномерная локальная управляемость, омега-предельные множества, функции Ляпунова.

Введение

В настоящее время нет установившегося определения *магистрального* процесса управляемой системы. Я называю допустимый процесс магистральным, если наряду с требованиями «магистральности» процесса с точки зрения А. И. Панасюка и В. И. Панасюка (см. [1]) выполнены следующие два дополнительных требования: требование *равномерной магистральности* процесса с точки зрения структуры омега-предельного множества *динамической системы сдвигов* и наличие *равномерной* локальной управляемости магистрального процесса.

В этой краткой заметке, открывающей цикл статей о магистральных процессах, заданных на гладких многообразиях конечной размерности, рассматриваются вопросы существования и равномерной устойчивости магистральных процессов.

§ 1. Стандартные управляемые системы

Основным объектом этой статьи является стандартная управляемая система.

Определение 1 (стандартная управляемая система). Управляемую систему

$$\dot{x} = v(t, x, u), \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times M \times U,$$

будем называть *стандартной*, если выполнены следующие условия.

1. U — компакт в *евклидовом* пространстве $\mathbb{R}^m$ размерности m, M — *связное, ориентируемое многообразие размерности* n, обладающее свойством *отделимости* и имеющее *счетный атлас.* Предполагается, что рассматриваемое многообразие M не имеет *края* и *гладко вложено* в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$ размерности $2n+1$ (при высказанных предположениях такое вложение всегда возможно).

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (№ 12–01–00195), Программы Президиума РАН при финансовой поддержке УрО РАН (проект № 12–П–1002).

2. Для всех $(t,x)\in\mathbb{R}\times M$, выполнено *условие невырожденности*

$$v(t,x,U)\bigcap T_xM\neq\varnothing,$$

где T_xM — евклидово *пространство, касательное к многообразию M в точке $x\in M$.*

3. Предположим далее, что функция $t\to v(t,x,u)$ *ограничена* и *равномерно непрерывна* на числовой прямой $\mathbb{R}$ *равномерно* относительно любого компактного множества $Z_K\doteq K\times U$, где K — произвольный компакт многообразия M и, кроме того, предполагается, что функция $x\to v(t,x,u)$ удовлетворяет *локальному условию Липшица* для каждой точки $(t,u)\in\mathbb{R}\times U$.

Напомним (см. [2]), что *евклидово* пространство $\mathbb{R}^n$ размерности n — это пространство, снабженное *группой параллельных переносов и положительно-определенной билинейной симметрической формой $x^*Qy=\langle x,Qy\rangle$*, называемой *скалярным произведением*. Если в $\mathbb{R}^n$ фиксирован *ортонормированный базис*, то предполагается, что $Q=E$, где E — единичная матица, и тогда $|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$.

В дальнейшем применяются следующие обозначения:

$$\mathcal{O}^n_r(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|<r\},\quad O^n_r(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|\leqslant r\}$$

— *открытый и замкнутый* шары радиуса r с центром в точке x_0 пространства $\mathbb{R}^n$ (если $x_0=0$, то пишем $\mathcal{O}^n_r,\ O^n_r$, или $\mathcal{O}_r,\ O_r$, если размерность пространства $\mathbb{R}^n$ не имеет значения).

В этой работе рассматриваются только такие многообразия M, которые являются *пространствами Хаусдорфа со счетной базой*. Напомним, что топологическое пространство M называется *пространством Хаусдорфа* [3], если для каждой пары точек $x,y\in M$ существуют открытые множества X и Y пространства M такие, что

$$x\in X,\quad y\in Y\quad\text{и}\quad X\bigcap Y=\varnothing.$$

Далее, семейство $\mathfrak{B}(A)$ открытых подмножеств пространства M называется *базой* пространства M, если для любого отрытого множества V в M найдется такое подмножество U семейства $\mathfrak{B}(A)$, что имеет место вложение $U\subset V$.

§ 2. Гладкие многообразия

Кратко напомним основные понятия, связанные с простейшими гладкими многообразиями.

Определение 2 (конечномерное многообразие). Многообразием M называется [4–6] *топологическое* пространство, снабженное *гладким атласом*. Атлас, покрывающий многообразие, называется *дифференцируемой структурой*.

Карта конечномерного многообразия M^n размерности n — это *область* X (то есть открытое связное множество) в $\mathbb{R}^n$ вместе с взаимно однозначным отображением $\varphi:W\to X$, где W — заданное *открытое* множество в M^n:

$$x\in W,\quad \varphi(x)=(x_1\dots x_n)\in X\subseteq\mathbb{R}^n.$$

Далее, две карты[2] (W_i,φ_i,X_i), (W_j,φ_j,X_j) многообразия M^n называются *согласованными*, если множества

$$X_{ij}=\varphi_i\big(W_i\bigcap W_j\big),\quad X_{ji}=\varphi_j\big(W_j\bigcap W_i\big)$$

образуют области в $\mathbb{R}^n$ и отображения

$$\varphi^{ij}\doteq\varphi_j\varphi_i^{-1}:X_{ij}\to X_{ji},\quad \varphi^{ji}\doteq\varphi_i\varphi_j^{-1}:X_{ji}\to X_{ij}\tag{2.1}$$

[2]Для записи карты $\varphi:W\to X$ могут употребляться также следующие обозначения: (W,φ,X) или $(W,\varphi,\mathbb{R}^n)$.

диффеоморфны:

$$\begin{cases} \varphi_1^{ij}(x_1^i \dots x_n^i) = x_1^j, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \varphi_n^{ij}(x_1^i \dots x_n^i) = x_n^j, \end{cases} \qquad \det\left(\frac{\partial \varphi_k^{ij}(x_1^i \dots x_n^i)}{\partial x_s^j}\right)_{\substack{k=1\dots n\\ s=1\dots n}} \neq 0.$$

Атласом многообразия M^n называется совокупность таких карт, что любые две карты, имеющие непустое пересечение, согласованы и любая точка x многообразия M^n имеет изображение по крайней мере на одной карте. Два атласа *эквивалентны*, если любая карта одного атласа согласована с любой картой другого атласа. *Структурой* дифференцируемого многообразия M^n называется класс эквивалентных атласов.

Обсудим теперь более подробно понятие *диффеоморфизма*. Мы говорим, что заданная функция $p : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, где M — конечномерное многообразие, *допустима в точке* x (принадлежит классу C^k, $k \geqslant 1$), если $p(0) = x$ и в локальных координатах функция $p(t) \doteq \big(p_1(t) \dots p_n(t)\big)$ непрерывно дифференцируема k раз в окрестности точки $t = 0$. Пусть теперь заданы два многообразия M и N и отображение $f : M \to N$. По определению

отображение f принадлежит классу $C^k,\ k \geqslant 1,$ в точке $x \in M$,

если для любой *допустимой* функции $t \to p(t)$ вектор-функция

$$t \to f\big(p(t)\big) = \big(f_1(p_1(t) \dots p_n(t)) \dots f_n(p_1(t) \dots p_n(t))\big)$$

в локальных координатах непрерывно дифференцируема k раз в окрестности точки $t = 0$. Далее, по определению отображение $f : M \to N$ *принадлежит классу* C^k на многообразии M, если f принадлежит C^k в каждой точке $x \in M$.

Определение 3. Отображение $f : M \to N$ называется C^k-*диффеоморфизмом*, $k \geqslant 1$, если оно принадлежит классу C^k в каждой точке многообразия M и имеет обратное того же класса. Вспомним, кроме того, что диффеоморфизм $f : M \to N$ называется *собственным*, если прообраз $f^{-1}(K)$ компактен для любого компакта K в N.

Далее, отображение

$$df(x) : T_x M \to T_{f(x)} N,$$

действующее из пространства $T_x M$, касательного к многообразию M в точке x, в пространство $T_{f(x)} N$, касательное к многообразию N в точке $f(x)$, и определенное в локальных координатах равенством

$$df(x)v \doteq \left(\frac{df_1\big(p_1(t) \dots p_n(t)\big)}{dt} \cdots \frac{df_n\big(p_1(t) \dots p_n(t)\big)}{dt}\right)\Bigg|_{t=0}$$

для всякой C^k-кривой $p : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M,$ удовлетворяющей следующим условиям:

$$p(0) = x, \quad \frac{dp(t)}{dt}\Big|_{t=0} \doteq v,$$

называется *производной отображения* f *в точке* x *по направлению вектора* v.

Определение 4 (гладкое многообразие). Конечномерное многообразие M называется *гладким* (класса C^r, где $r \geqslant 1$), если все *функции перехода* (2.1) r раз непрерывно дифференцируемы.

Далее, по определению два гладких (класса C^r, $r \geqslant 1$) многообразия M и N C^k-*диффеоморфны*, $1 \leqslant k \leqslant r$ (или просто *диффеоморфны*), если существует C^k-диффеоморфизм $f : M \to N$.

При дальнейших рассмотрениях нам понадобится следующая теорема.

Теорема 1 (см. [6, § 33]). *Пусть M и N — гладкие многообразия, вложенные в евклидовы пространства, а $f : M \to N$ — отображение класса C^k, $k \geqslant 1$, и*

$$df(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$$

— изоморфизм для каждой точки $x \in M$. Тогда отображение f является C^k-диффеоморфизмом, а многообразия M и N называются C^k-диффеоморфными.

Определение 5 (свойства конечномерных гладких многообразий). Многообразие M^n называется *ориентируемым*, если

$$\det\left(\frac{\partial\varphi_k^{ij}(x_1^i \ldots x_n^i)}{\partial x_s^j}\right)_{\substack{k=1\ldots n\\ s=1\ldots n}} > 0$$

для всех карт (W_i, φ_i, X_i), (W_j, φ_j, X_j) многообразия M^n, имеющих непустое пересечение. Здесь

$$\varphi^{ij} \doteq \varphi_j\varphi_i^{-1} : X_{ij} \to X_{ji}, \quad X_{ij} = \varphi_i\big(W_i \bigcap W_j\big), \quad X_{ji} = \varphi_j\big(W_j \bigcap W_i\big).$$

Связность многообразия M^n означает, что для любых $x, y \in M^n$ найдется такой набор карт

$$(W_i, \varphi_i, X_i),\ i = 1 \ldots k, \quad \text{что} \quad x \in W_1,\ y \in W_k \quad \text{и} \quad W_{i-1} \bigcap W_i \neq \varnothing,\ i = 2 \ldots k.$$

Далее, существование *счетного атласа* означает, что существует атлас не более чем из счетного числа карт.

И, наконец, подмножество K многообразия M^n называется *компактным*[3], если для каждого покрытия множества K открытыми множествами найдется *конечное* покрытие.

В силу сформулированной ниже теоремы гладкое конечномерное многообразие не является принципиально новым математическим объектом.

Теорема 2 (теорема Х. Уитни). *Всякое гладкое конечномерное связное многообразие M^n со счетной базой имеет собственное вложение в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Определение 6 (касательное пространство и касательное расслоение). Фиксируем гладкое класса C^r, $r \geqslant 1$, многообразие M размерности n и точку $x \in M$. Для каждой C^k-кривой $p : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $1 \leqslant k \leqslant r$, проходящей через точку $p(0) = x$, построим *вектор скорости*

$$v(x, p) \doteq \frac{dp(t)}{dt}\Big|_{t=0}$$

в точке x. Совокупность всех векторов скорости $v(x, p)$ с естественными операциями сложения и умножения на число оказывается *линейным пространством, касательным к многообразию M в точке x,* и обозначается T_xM. В дальнейшем касательное пространство T_xM снабжается структурой евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Отметим теперь, что множество

$$TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$$

имеет естественную структуру гладкого многообразия размерности $2n$. Оно называется *касательным расслоением* многообразия M. Каждая точка $(x_1 \ldots x_n, \xi_1 \ldots \xi_n)$ касательного расслоения TM имеет $2n$ координат, где $x = (x_1 \ldots x_n)$ — локальные координаты точки $x \in M$, а $\xi = (\xi_1 \ldots \xi_n)$ — координаты вектора, исходящего из точки $(x_1 \ldots x_n)$ и находящегося в касательном пространстве T_xM к многообразию M в точке x. Если M — многообразие класса C^r, где $r \geqslant 1$, то касательное расслоение TM является *гладким многообразием класса C^{r-1}*.

[3]Множество G многообразия M^n называется *открытым*, если его изображение $\varphi(W \bigcap G)$ на каждой карте (W, φ, X) является открытым подмножеством области X пространства $\mathbb{R}^n$.

Поясним сказанное. Пусть $(W, \varphi, \mathbb{R}^n)$ — карта многообразия M, $\varphi(x) = (x_1 \dots x_n)$ — локальные координаты точки $x \in W$. Тогда карте $(W, \varphi, \mathbb{R}^n)$ отвечает карта $(TW, \psi, \mathbb{R}^{2n})$, где

$$TW = \bigcup_{x \in W} T_x M, \quad \psi(x, \xi) = (x_1 \dots x_n, \xi_1 \dots \xi_n) \in W \times T_x M,$$

и можно проверить, что любым двум согласованным картам многообразия M отвечают согласованные карты касательного пространства $T_x M$. Следовательно, касательное расслоение TM многообразия M имеет структуру *гладкого многообразия размерности* $2n$.

§ 3. Стандартные управляемые системы и динамическая система сдвигов

Стандартная управляемая система

$$\dot{x} = v(t, x, u), \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times M \times U, \quad v(t, x, U) \bigcap T_x M \neq \varnothing, \tag{3.1}$$

удовлетворяет локальному условию Липшица на гладком многообразии и условию равномерной непрерывности векторного поля. Напомним соответствующие определения.

Определение 7 (локальное условие Липшица). Функция $v : M \to TM$, заданная на гладком многообразии M размерности n и принимающая значения в касательном расслоении TM, удовлетворяет *локальному условию Липшица*, если для каждой точки x^0 многообразия M и любой карты (W, φ, X), содержащей точку x^0, выполнено следующее условие: для каждого *компактного* множества $K \subset W$ такого, что $x^0 \in K$, найдется число $\ell_K(x^0)$, обеспечивающее для всех $x, y \in K$ неравенство[4]

$$\bigl|v(x_1 \dots x_n) - v(y_1 \dots y_n)\bigr| \leqslant \ell_K(x^0) \bigl|(x_1 \dots x_n) - (y_1 \dots y_n)\bigr|.$$

Определение 8 (равномерная непрерывность $v(t, x, u)$ по переменной t). Функция $t \to v(t, x, u)$ называется *равномерно непрерывной* на прямой $\mathbb{R}$ равномерно относительно каждого *компактного* множества $Z_K \doteq K \times U$, где $K \subset M$, если для любого положительного ε найдется такое число $\beta = \beta(\varepsilon, K) > 0$, что при всех $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in [-\beta, \beta]$ и любых $(x, u) \in Z_K$ имеет место неравенство[5]

$$\bigl|v(t + \tau, x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m) - v(t, x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m)\bigr|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \varepsilon.$$

Для *стандартной* управляемой системы (3.1) (которую мы отождествляем с тройкой (v, M, U)) рассмотрим множество сдвигов

$$\tau \to v_\tau(t, x, u) \doteq v(t + \tau, x, u)$$

функции $t \to v(t, x, u)$ и напомним, что множество

$$\operatorname{orb}(v) \doteq \{v_\tau(\cdot) : \tau \in \mathbb{R}\} \tag{3.2}$$

называется *траекторией движения* $\tau \to v_\tau(\cdot)$ системы (3.1). Таким образом, по системе (3.1) мы строим множество управляемых систем

$$\dot{x} = v_\tau(t, x, u),$$

[4] Ниже $\varphi(x) = (x_1 \dots x_n)$ — локальные координаты точки $x \in K$, а $v(x) = \bigl(v_1(x_1 \dots x_n) \dots v_n(x_1 \dots x_n)\bigr)$ — координаты вектора $v(x)$, исходящего из точки x и содержащегося в касательном к многообразию M пространстве $T_x M$; это пространство, как уже было сказано, снабжается евклидовой нормой, и поэтому неравенство (7) записано в терминах нормы пространства $\mathbb{R}^n$.

[5] Которое следует понимать так: для каждой карты (W, φ, X) многообразия M, имеющей непустое пересечение с компактом K, неравенство (8) выполнено для всех $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in [-\beta, \beta]$, $(x_1 \dots x_n) \in \varphi(W \bigcap K)$ и $(u_1 \dots u_m) \in U$.

каждая из которых, очевидно, является *стандартной* управляемой системой. Замкнем теперь *траекторию* (3.2) в метрике, построенной на основе метрики Бебутова (см. [7, 8]):

$$b(v^1, v^2) \doteq \sup_{\vartheta \geqslant 0,\, K \subset M} \min \left\{ \max_{|t| \leqslant \vartheta,\, (x,u) \in X_K \times U} \left| v^1(t,x,u) - v^2(t,x,u) \right|_{\mathbb{R}^n}, \frac{1}{r_K} \right\}, \tag{3.3}$$

где K — заданный компакт многообразия M,

$$u = (u_1 \ldots u_m) \in U, \quad x = (x_1 \ldots x_n) \in X_K \doteq \bigcup_{(W,\varphi,X)} \varphi\Big(W \bigcap K\Big),$$

(W, φ, X) — карта многообразия M, имеющая непустое пересечение с множеством $W \bigcap K$,

$$r_K \doteq \min\{r : X_K \subseteq O_r^N, \text{ где } N = 2n+1\}.$$

Замыкание траектории (3.2) будем обозначать $\overline{\mathrm{orb}}(v)$.

Формулируемая ниже лемма несложно доказывается с помощью стандартных рассуждений.

Лемма 1 (**о замыкании**). *Включение $\widehat{v} \in \overline{\mathrm{orb}}(v)$ выполнено тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{\tau_i\}$ моментов времени, удовлетворяющая следующему свойству: для любых положительных чисел ε, ϑ и всякого компакта $K \subset M$ найдется такой индекс $i_0 = i(\varepsilon, \vartheta, K)$, что для всех i, удовлетворяющих неравенству $i \geqslant i_0$, и всех точек (t, x, u) множества $[-\vartheta, \vartheta] \times X_K \times U$ выполнено неравенство*

$$|v_{\tau_i}(t,x,u) - \widehat{v}(t,x,u)| \leqslant \varepsilon.$$

Кроме того, если v — стандартная управляемая система, то всякая система $\widehat{v}$, принадлежащая множеству $\overline{\mathrm{orb}}(v)$, тоже является стандартной.

В силу леммы 1 рассматриваемая в пространстве $(\overline{\mathrm{orb}}(v), b)$ топология называется топологией сходимости, *равномерной на компактах* пространства $\mathbb{R} \times M$.

Для дальнейшего нам понадобится ввести в рассмотрение так называемое *омега-предельное множество* $\Omega(v)$ траектории $\mathrm{orb}(v)$. Это множество определяется следующим образом: включение $\widehat{v} \in \Omega(v)$ выполнено в том и только том случае, если найдется такая числовая последовательность $\{\tau_i\}$, где $\tau_i \to \infty$, что в метрике (3.3) имеет место равенство $\lim\limits_{i \to \infty} v_{\tau_i} = \widehat{v}$.

В статье [8] (см. лемму 4 статьи) с помощью результатов Бебутова [7] доказано следующее важное для дальнейшего утверждение.

Лемма 2 (**о компактности**). *Пусть задана стандартная управляемая система* (3.1). *Предположим, что функция $t \to v(t, x, u)$ ограничена на числовой прямой $\mathbb{R}$ для каждой точки (x, u) множества $M \times U$ и равномерно непрерывна по переменной t на прямой $\mathbb{R}$ с дополнительным условием равномерной непрерывности относительно переменных (x, u) на компактах $K \times U$. Тогда пространство $(\overline{\mathrm{orb}}(v), b)$ с метрикой* (3.3) *компактно.*

§ 4. Ограниченные и равномерно ограниченные решения системы

Допустимые программные и позиционные управления стандартной системы

$$\dot{x} = v(t,x,u), \quad (t,x,u) \in \mathbb{R} \times M \times U, \tag{4.1}$$

определяются следующим образом.

Определение 9 (программное и позиционное управления). Функция $u : \mathbb{R} \to U$ называется *допустимым программным* управлением стандартной системы (4.1), если она локально интегрируема по Лебегу, равномерно непрерывная в среднем на числовой прямой [6] и при всех $(t,x)\in\mathbb{R}\times M$ выполнено условие невырожденности

$$v\bigl(t,x,u(t)\bigr)\bigcap T_xM \neq \varnothing. \tag{4.2}$$

Далее, функция $u : \mathbb{R}\times M \to U$ называется *допустимым позиционным* управлением стандартной системы (4.1), если:
1) при каждом $x \in M$ функция $t \to u(t,x)$ является допустимым *программным* управлением;
2) функция $x \to u(t,x)$ измерима по Э. Борелю [9] при каждом t;
3) при всех $(t,x)\in\mathbb{R}\times M$ выполнено условие невырожденности

$$Q(t,x)\bigcap T_xM \neq \varnothing, \tag{4.3}$$

где $q(t,x) \doteq v\bigl(t,x,u(t,x)\bigr)$,

$$Q(t,x) = \bigcap_{\varepsilon>0}\ \bigcap_{\operatorname{mes}\mu=0} \overline{\operatorname{co}}\, q(t,\mathcal{O}_\varepsilon(x)\setminus\mu), \quad \operatorname{mes} \text{ — мера Лебега в } \mathbb{R}^n, \tag{4.4}$$

и в локальных координатах векторное поле $q(t,x)$ имеет представление

$$q(t,x) = \bigl(q_1(t,x_1\ldots x_n)\ldots q_n(t,x_1\ldots x_n)\bigr);$$

4) для каждой точки $x_0 \in M$ найдется понимаемое в смысле А. Ф. Филиппова [7] (см. [10]) и *определенное при всех* $t \geqslant 0$ решение $x_0(t)$ задачи Коши

$$\dot x = q(t,x), \quad x(0) = x_0 \in M.$$

Для дальнейшего полезно напомнить, как правильно понимать условия Каратеодори.

Определение 10 (условия Каратеодори). Напомним, что функция $a : \mathbb{R}\times M \to TM$, где M — гладкое многообразие размерности n, удовлетворяет условиям Каратеодори, если:

1) при каждом t функция $x \to a(t,x)$ непрерывна на многообразии M;

2) для любой точки $x \in M$ функция $t \to a(t,x)$ локально интегрируема по Лебегу;

3) для каждого компакта $K \subset M$ найдется такая локально интегрируемая по Лебегу функция $t \to m_{K}(t)$, что в локальных координатах функция

$$a(t,x) = \bigl(a_1(t,x_1\ldots x_n)\ldots a_n(t,x_1\ldots x_n)\bigr), \quad x\in K,$$

удовлетворяет неравенству

$$|a(t,x)|_{\mathbb{R}^n} \leqslant m_{K}(t), \quad (t,x)\in\mathbb{R}\times K.$$

С помощью определений 9 и 10 несложно доказывается, что если для стандартной управляемой системы (4.1) рассматривается допустимое программное управление $u(t)$, то полученное векторное поле $f(t,x) \doteq v\bigl(t,x,u(t)\bigr)$ системы

$$\dot x = f(t,x)$$

удовлетворяет условиям Каратеодори и локальному условию Липшица (определение 7).

Нам понадобится следующая вспомогательная задача Коши:

$$\dot z = g(t,z), \quad z(0) = z_0. \tag{4.5}$$

[6]Это означает, что для каждого положительного ε найдется такое положительное число $\beta = \beta(\varepsilon)$, что при всех $|\tau| \leqslant \beta$ и $t\in\mathbb{R}$ выполнено неравенство $\displaystyle\int_t^{t+1} |u_\tau(s) - u(s)|\,ds \leqslant \varepsilon$.

[7]Абсолютно непрерывным решением системы дифференциальных уравнений $\dot x = q(t,x)$ с разрывным по фазовым переменным векторным полем q называется всякое решение включения $\dot x \in Q(t,x)$, см. (4.4).

Определение 11 (**правильные и равномерно правильные задачи Коши**). Пусть задана *ограниченная и равномерно непрерывная*[8] по переменной t на числовой прямой $\mathbb{R}$ функция

$$(t,z)\to g(t,z)\in\mathbb{R},\quad (t,z)\in\mathbb{R}\times[0,\infty),\tag{4.6}$$

удовлетворяющая тождеству $g(t,0)\equiv 0$, локальному условию Липшица и условиям Каратеодори. Будем говорить, что функция (4.6) *правильная* при всех $z_0\in[0,r]$ (или, что то же самое, задача Коши (4.5) при всех $z_0\in[0,r]$ *правильная*), если решение задачи Коши для любого начального условия $z_0\in[0,r]$ определено и *ограничено* на полуоси $[0,\infty)$.

Далее, пусть $\operatorname{orb}(g)\doteq\{g_\tau(\cdot):\tau\in\mathbb{R}\}$ — траектория, отвечающая уравнению

$$\dot z=g(t,z),\tag{4.7}$$

а $\Omega(g)$ — омега-предельное множество траектории $\operatorname{orb}(g)$, построенное согласно топологии равномерной сходимости на компактах[9] (см. лемму 1 и равенства (3.2), (3.3)). Мы называем задачу Коши (4.5) *равномерно правильной* при всех $z_0\in[0,r]$ (или, что эквивалентно, функцию (4.6) *равномерно правильной* при всех $z_0\in[0,r]$), если для любой точки $\widehat g$ омега-предельного множества $\Omega(g)$ решение задачи Коши

$$\dot z=\widehat g(t,z),\quad z(0)=z_0,$$

определено и *ограничено* на полуоси $[0,\infty)$.

Из этого определения следует, что если правой части $g(t,z)$ уравнения (4.7) отвечает *правильная* задача Коши (4.5), то это же верно и для задачи Коши с правой частью $g_\tau(t,z)$ при каждом $\tau\in[0,\infty)$. Поэтому из условия *правильности* функции $g(t,z)$ и *равномерной правильности* задачи Коши (4.5) следует, что решение задачи Коши уравнения (4.7) ограничено на полуоси $[0,\infty)$ для каждой точки $\widehat g$ замыкания $\overline{\operatorname{orb}}_+(g)$ полутраектории $\operatorname{orb}_+(g)$.

Пример 1. Несложно убедиться, что для каждого фиксированного $\lambda\in(0,1)$ тривиальное решение уравнения

$$\dot z=p(t,\lambda)z,\quad p(t,\lambda)=\begin{cases}\sin\bigl(\ln(t+1)\bigr)-\lambda & \text{при } t\geqslant 0,\\ -\lambda & \text{при } t<0,\end{cases}\tag{4.8}$$

асимптотически устойчиво по Ляпунову[10] и, следовательно, соответствующая задача Коши

$$\dot z=p(t,\lambda)z,\quad z(0)=z_0,\tag{4.9}$$

правильная при всех z_0, но, как мы сейчас убедимся, задача Коши (4.9) не является равномерно правильной.

Действительно, омега-предельное множество $\Omega\bigl(p(\cdot,\lambda)\bigr)$ траектории $\operatorname{orb}\bigl(p(\cdot,\lambda)\bigr)$, полученной замыканием в метрике (3.3) множества сдвигов уравнения (4.8), содержит все уравнения вида

$$\dot z=\gamma(\lambda)z,\tag{4.10}$$

где $\gamma(\lambda)$ — любая константа из отрезка $[-(1+\lambda),1-\lambda]$. Следовательно, среди уравнений (4.10) есть как правильные (при всех $\gamma(\lambda)\in[-(1+\lambda),0]$), так и неправильные (при $\gamma(\lambda)\in(0,(1-\lambda)]$) уравнения и, следовательно, задача Коши (4.9) не является равномерно правильной.

---

[8]Это означает, что для каждого положительного ε и любого положительного z^* найдется такое положительное число $\beta=\beta(\vartheta,z^*)$, что при всех $t\in\mathbb{R}$, $z\in[0,z^*]$ выполнено неравенство $\max\limits_{|\tau|\leqslant\beta,\,z\in[0,z^*]}|g_\tau(t,z)-g(t,z)|\leqslant\varepsilon$.

[9]В силу ограниченности в существенном функции $g(t,x)$ по переменной t естественно рассматривать замыкание траектории $\operatorname{orb}(g)$ в следующей метрике: $b(g^1,g^2)\doteq\sup\limits_{t,\,z\geqslant 0}\min\Bigl\{\max\limits_{z\in[0,z^*]}\bigl|g^1(t,z)-g^2(t,z)\bigr|,\,1/(t+z^*)\Bigr\}$.

[10]Это следует из неравенства $\varlimsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t p(s,0)\,ds\leqslant\lambda$.

Пример 2. Другой пример: всякое решение $z(t) = z_0 \exp\bigl(\operatorname{arctg}(t)\bigr)$ уравнения

$$\dot{z} = p(t)z,$$

где $p(t) = (1+t^2)^{-1}$, ограничено на числовой прямой $\mathbb{R}$, а омега-предельное множество $\Omega(p)$ траектории $\operatorname{orb}(p)$ состоит из одной точки $p(t) \equiv 0$, для которой уравнение $\dot{z} = 0$ устойчиво, а следовательно, задача Коши

$$\dot{z} = p(t)z, \quad z(0) = z_0,$$

равномерно правильная при всех z_0.

Определение 12 (равномерно ограниченные решения). Пусть стандартная система

$$\dot{x} = v(t,x,u), \quad (t,x,u) \in \mathbb{R} \times M \times U, \tag{4.11}$$

при допустимом программном управлении $u(t)$ имеет *ограниченное* на полуоси $[0,\infty)$ решение $x(t,x_0)$ задачи Коши

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(0) = x_0,$$

где $f(t,x) = v\bigl(t,x,u(t)\bigr)$. Это решение называется *равномерно ограниченным*, если каждой точке $\widehat{f}$ омега-предельного множества $\Omega(f)$ траектории $\operatorname{orb}(f)$ отвечает ограниченное на полуоси $[0,\infty)$ решение $\widehat{x}(t,x_0)$ задачи

$$\dot{x} = \widehat{f}(t,x), \quad x(0) = x_0.$$

Для формулируемого ниже утверждения нам понадобится следующее определение.

Определение 13 (бесконечно большие функции). Пусть задано гладкое многообразие M размерности n, которое гладко вложено в пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$. Предположим, что M — *неограниченное* многообразие и рассмотрим непрерывно дифференцируемую, *неотрицательную* при всех $(t,x) \in \mathbb{R} \times M$ функцию $\ell(t,x)$, относительно которой предполагается, что

1) функция $t \to \ell(t,x)$ ограничена и равномерно непрерывна вместе с производной $\dfrac{\partial}{\partial x}\ell(t,x)$ на числовой прямой $\mathbb{R}$;

2) для любой достаточно большой константы $\mathcal{C}$ существует такое число r, что неравенство $\ell(t,x) \geqslant \mathcal{C}$ выполнено для всех $(t,x) \in \mathbb{R} \times (M \setminus \mathcal{O}_r^{2n+1})$.

Функцию $\ell(t,x)$, обладающую перечисленными выше свойствами, будем называть *бесконечно большой* функцией.

Теорема 3 (об ограниченном решении системы). *Рассмотрим стандартную управляемую систему* (4.11), *допустимое программное управление* $u(t)$ (*см. определение* 9) *и задачу Коши*

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(0) = x_0, \tag{4.12}$$

где $x_0 \in M$, $f(t,x) = v\bigl(t,x,u(t)\bigr)$. *Предположим, кроме того, что либо многообразие* M *компактно, либо, если* M *не является компактным многообразием, существуют бесконечно большая функция* $\ell(t,x)$ *и такая правильная на множестве* $\mathbb{R} \times [0, \ell(0,x_0)]$ *задача Коши*

$$\dot{z} = g(t,z), \quad z(0) = z_0,$$

что $z_0 \in [0, \ell(0,x_0)]$ *и для всех* $t \geqslant 0$, $x \in M$, *выполнено неравенство*

$$\frac{\partial}{\partial t}\ell(t,x) + \Bigl\langle \frac{\partial}{\partial x}\ell(t,x), f(t,x) \Bigr\rangle \leqslant g\bigl(t, \ell(t,x)\bigr).$$

Тогда управляемая система (4.11) *при заданном программном управлении* $u(t)$ *имеет ограниченное на полуоси* $[0,\infty)$ *решение.*

Прежде чем формулировать следующую теорему, введем в рассмотрение функцию

$$\psi(t,x,z)=\big(f(t,x),\ell(t,x),g(t,z)\big)\in T_xM\times[0,\infty)\times[0,\infty),\quad (t,x,z)\in\mathbb{R}\times M\times[0,\infty),\quad (4.13)$$

где f, M и g имеют прежний смысл, траекторию $\operatorname{orb}(\psi)\doteq\{\psi_\tau(\cdot):\tau\in\mathbb{R}\}$ функции (4.13) и замыкание $\overline{\operatorname{orb}}(\psi)$ траектории $\operatorname{orb}(\psi)$ в топологии равномерной сходимости на компактах. Такая топология определяется следующей метрикой: $\psi^1,\psi^2\in\overline{\operatorname{orb}}(\psi)$,

$$\rho(\psi^1,\psi^2)=\sup_{t,\,K}\min\left\{\max_{x\in K}\int_t^{t+1}\big|f^1(s,x)-f^2(s,x)\big|\,ds,\ \frac{1}{t+r}\right\}+$$
$$+\sup_{t,\,K}\min\left\{\max_{x\in K}\big|\ell^1(t,x)-\ell^2(t,x)\big|,\ \frac{1}{t+r}\right\}+\sup_{t,z\geqslant 0}\min\left\{\max_{z\in[0,z^*]}\big|g^1(t,z)-g^2(t,z)\big|,\ \frac{1}{t+z^*}\right\},$$

где K — компакт в M, r — наименьшее из таких чисел, что $\varphi(K\bigcap M)\subseteq O_k^{2n+1}(0)$.

Используя результаты Бебутова, можно показать, что в силу высказанных предположений фазовое пространство $\overline{\operatorname{orb}}(\psi)$ динамической системы $(\overline{\operatorname{orb}}(\psi),h^\tau)$, где $h^\tau\widehat{\psi}=\widehat{\psi}_\tau(\cdot)$ — оператор сдвига, компактно.

Теорема 4 (**о равномерно ограниченных решениях системы** (4.11))**.** *Будем рассматривать стандартную управляемую систему* (4.11) *и все системы* $\widehat{v}$ *пространства* $\overline{\operatorname{orb}}(v)$. *Предполагается далее, что для всех* $(t,x)\in\mathbb{R}\times M$ *и любых* $\widehat{v}\in\overline{\operatorname{orb}}(v)$ *выполнено следующее условие невырожденности:*

$$\widehat{v}(t,x,U)\bigcap T_xM\neq\varnothing.$$

Фиксируем допустимое программное управление $u(t)$ *и задачу Коши*

$$\dot{x}=f(t,x),\quad x(0)=x_0,\qquad (4.14)$$

где $x_0\in M$, $f(t,x)=v\big(t,x,u(t)\big)$. *Предположим, кроме того, что либо многообразие* M *компактно, либо, если* M *не является компактным многообразием, существуют бесконечно большая функция* $\ell(t,x)$ *и равномерно правильная на множестве* $\mathbb{R}\times[0,\ell(0,x_0)]$ *задача Коши*

$$\dot{z}=g(t,z),\quad z(0)=z_0,$$

такие, что для всех $t\geqslant 0$, $x\in M$, *выполнено неравенство*

$$\frac{\partial}{\partial t}\ell(t,x)+\left\langle\frac{\partial}{\partial x}\ell(t,x),f(t,x)\right\rangle\leqslant g\big(t,\ell(t,x)\big),\qquad (4.15)$$

и, кроме того, предполагается, что неравенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\ell}(t,x)+\left\langle\frac{\partial}{\partial x}\widehat{\ell}(t,x),\widehat{f}(t,x)\right\rangle\leqslant\widehat{g}\big(t,\widehat{\ell}(t,x)\big)$$

выполнено для каждой точки $\widehat{\psi}(t,x,z)=\big(\widehat{f}(t,x),\widehat{\ell}(t,x),\widehat{g}(t,z)\big)$ *омега-предельного множества* $\Omega(\psi)$ *траектории* $\operatorname{orb}(\psi)$, *где*

$$\psi(t,x,z)=\big(f(t,x),\ell(t,x),g(t,z)\big),\quad (t,x,z)\in\mathbb{R}\times M\times[0,\infty).$$

Тогда управляемая система (4.11) *при заданном программном управлении* $u(t)$ *имеет равномерно ограниченное на полуоси* $[0,\infty)$ *решение задачи* (4.14).

§ 5. Доказательства теорем 3 и 4

Доказательство теоремы 3. Из высказанных условий о векторном поле $v(t,x,u)$ стандартной управляемой системы (4.11) и условий допустимости программного управления $u(t)$ следует, что векторное поле $f(t,x) = v\big(t,x,u(t)\big)$ системы (4.12) удовлетворяет локальному условию Липшица и условиям Каратеодори. Следовательно, в силу классических теорем существования и единственности решения (в смысле Каратеодори) задачи Коши (4.12) найдется такое положительное число ε, что на интервале $-\varepsilon < t < \varepsilon$ решение $t \to \varphi(t,x_0)$ задачи (4.12) существует, единственно и непрерывно по совокупности переменных t, x_0.

Из сказанного следует, что в силу включения $f(t,x) \in T_xM$, выполненного при всех $t \geqslant 0$, $x \in M$ и единственности решения задачи Коши решение $\varphi(t,x_0)$ не покидает многообразие M. Обозначим через (t_*,t^*) максимальный интервал существования решения $\varphi(t,x_0)$. Отметим, во-первых, что если $t^* < \infty$, то

$$\varlimsup_{t\to t^*-0}|\varphi(t)| = \infty. \tag{5.1}$$

Поэтому если многообразие M компактно, то в силу сказанного выполнено равенство $t^* = \infty$. Тем самым осталось рассмотреть случай, когда многообразие M неограниченно.

Предположим, что многообразие M неограниченно и $t^* < \infty$. Рассмотрим поведение функции $z(t) = \ell\big(t,\varphi(t,x_0)\big)$ при $t \to t^* - 0$. В силу свойств бесконечно большой функции $\ell(t,x)$ и равенства (5.1) найдется такая последовательность моментов времени $\{t_i\}$, $t_i < t^*$, $t_i \to t^*$, что $z(t_i) \to \infty$. Вспомним теперь, что в силу условия (4.15) теоремы справедливы неравенства

$$\dot z(t) = \frac{\partial}{\partial t}\ell\big(t,\varphi(t,x_0)\big) + \Big\langle \frac{\partial}{\partial x}\ell\big(t,\varphi(t,x_0)\big), f\big(t,\varphi(t,x_0)\big)\Big\rangle \leqslant g\big(t,\ell(t,\varphi(t,x_0))\big) \leqslant g\big(t,z(t)\big),$$

из которых следует, что $z(t)$ является абсолютно непрерывным решением решением задачи

$$\dot z(t) \leqslant g\big(t,z(t)\big), \quad z(0) = \ell(0,x_0).$$

В силу известной теоремы о дифференциальных неравенствах верно неравенство $z(t) \leqslant z^*(t)$, выполненное для всех t, при которых определено решение $z^*(t)$ следующей задачи Коши:

$$\dot z^*(t) = g\big(t,z^*(t)\big), \quad z(0) = \ell(0,x_0). \tag{5.2}$$

Поскольку по условиям теоремы задача (5.2) правильная (см. определение 11), то решение $z^*(t)$ определено при всех $t \in [0,\infty)$, что противоречит неравенству $z(t) \leqslant z^*(t)$ в точке t^*.

Доказательство теоремы 4. Доказательство этой теоремы сводится к повторению рассуждений доказательства теоремы 3 для системы

$$\psi(t,x,z) = \big(f(t,x), \ell(t,x), g(t,z)\big)$$

и каждой системы $\widehat\psi(t,x,z) = \big(\widehat f(t,x), \widehat\ell(t,x), \widehat g(t,z)\big)$ омега-предельного множества $\Omega(\psi)$.

§ 6. Равномерная локальная управляемость стандартной управляемой системы

Рассматриваем стандартную управляемую систему

$$\dot x = v(t,x,u), \quad (t,x,u) \in \mathbb{R}\times M \times U, \tag{6.1}$$

и допустимое программное управление $u(t,x)$ (см. определение 9). Будем называть далее фиксированную пару $\varphi(t) \doteq \big(u_0(t), x_0(t)\big)$ *допустимым процессом* системы

$$\dot x = v\big(t,x,u(t,x)\big), \tag{6.2}$$

если $x_0(t)$ — *ограниченное* на полуоси $[0,\infty)$ решение (в смысле Каратеодори) системы

$$\dot x = v\big(t,x,u_0(t)\big) \tag{6.3}$$

с управлением $u_0(t) = u\big(t, x_0(t)\big)$ (таких допустимых процессов может быть много). Далее, по заданной функции

$$\psi(t,x) \doteq \big(q(t,x), \varphi(t)\big), \quad \text{где} \quad q(t,x) \doteq v\big(t,x,u(t,x)\big) \in T_xM,$$

построим траекторию $\operatorname{orb}(\psi) = \{\psi_\tau(\cdot) : \tau \in \mathbb{R}\}$ и ее замыкание $\overline{\operatorname{orb}}(\psi)$.

Определение 14 (множества управляемости). Пусть заданы допустимое позиционное управление $u(t,x)$ и допустимый процесс $\varphi(t) = \big(x_0(t), u_0(t)\big)$. *Множеством управляемости* системы (6.1) на отрезке $[0,\vartheta]$ называется множество

$$\mathfrak{D}_\vartheta(\psi,u,\varphi) = \mathfrak{D}_\vartheta(\psi) \doteq \big\{x^* \in M : x(t,x^*)\big|_{t=\vartheta} = x_0(t)\big|_{t=\vartheta}\big\},$$

где допустимый процесс $\big(x(t,x^*), u(t)\big)$ определен так: $x(t,x^*)$ — решение системы (6.2) с начальным условием $x(0) = x^*$ и управлением $u(t) = u_0\big(t, x(t,x^*)\big)$.

Положительная полутраектория

$$\operatorname{orb}_+(x_0) = \{x_0(\cdot + \tau) : \tau \geqslant 0\}$$

системы (6.3) называется *равномерно локально управляемой*, если найдется такое положительное число ε, что $O_\varepsilon\big(\widehat{x}_0(0)\big) \subseteq \mathfrak{D}_\vartheta(\widehat{\psi})$ для всех $\widehat{\psi}(\cdot) \in \overline{\operatorname{orb}_+}(\psi)$.

Для формулировки теоремы о локальной управляемости магистрального процесса напомним обозначение $q(t,x) = v\big(t,x,u(t,x)\big)$ и рассмотрим произвольное решение $x(t)$ системы

$$\dot{x} = q(t,x), \tag{6.4}$$

удовлетворяющее при заданном положительном ε включению [11] $x(0) \in \mathcal{O}_\varepsilon\big(x_0(0)\big)$. Далее рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = q\big(t,x\big) - q\big(t,x_0(t)\big)$$

и такое решение $x(t)$ этой системы, что $x(0) \in \mathcal{O}_\varepsilon\big(x_0(0)\big)$.

Теорема 5 (о равномерной локальной управляемости траектории $x_0(t)$). *Пусть заданы допустимое позиционное управление $u(t,x)$ и допустимый процесс $\varphi(t) \doteq \big(u_0(t), x_0(t)\big)$, отвечающий управлению $u(t,x)$. Предположим, что заданы положительные числа ϑ, ε и две функции:*

1) *скалярная функция $\ell(t,x)$ переменных $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{O}_\varepsilon\big(x_0(t)\big)$ такая, что функция $t \to \ell(t,x)$ ограниченна и равномерно непрерывна вместе с производной $\dfrac{\partial}{\partial x}\ell(t,x)$ на числовой прямой и $\ell\big(t,x_0(t)\big) \equiv 0$ при всех $t \geqslant 0$;*

2) *ограниченная и равномерно непрерывная функция $t \to a(t)$ такова, что $\displaystyle\int_0^\vartheta a(s)\,ds + \varepsilon = 0$.*

Построим, кроме того, замыкание [12] $\overline{\operatorname{orb}_+}(\psi)$ положительной полутраектории $\operatorname{orb}_+(\psi)$, где

$$\psi(t,x,y) = \big(q(t,x), \ell(t,y), a(t)\big).$$

Тогда если для всех $\psi \in \overline{\operatorname{orb}_+}(\psi)$, $t \in [0,\vartheta]$ и $x \in \mathcal{O}_\varepsilon\big(\widehat{x}(0)\big)$ выполнено неравенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\ell}(t,x) + \Big\langle \frac{\partial}{\partial x}\widehat{\ell}(t,x), \widehat{q}(t,x) - \widehat{q}\big(t,\widehat{x}_0(t)\big) \Big\rangle \leqslant \widehat{a}(t)\operatorname{sgn}\big(\widehat{\ell}(t,x)\big),$$

то положительная полутраектория $\operatorname{orb}_+(x_0) = \{x_0(\cdot + \tau) : \tau \geqslant 0\}$ системы (6.3) равномерно локально управляема.

[11] Уместно напомнить, что поскольку рассматривая система (6.4) определена на многообразии M, то предполагается, что точка $x(0)$ с некоторой областью B точки $x(0)$ находятся на одной карте (W,ϕ,X) и область B такова, что $\phi(B) = \mathcal{O}_\varepsilon\big(x_0(0)\big)$.

[12] В топологии равномерной сходимости на компактах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Панасюк А.И., Панасюк В.И. Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986. 296 с.
2. Аносов Д.В. Лекции по линейной алгебре. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 1999. 105 с.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
4. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: УРСС, 1986. 759 с.
5. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005. 391 с.
6. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971. 239 с.
7. Бебутов М.В. О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюлл. Ин-та матем. при МГУ. 1940. Т. 2. № 5. С. 1–52.
8. Панасенко Е.А., Родина Л.И., Тонков Е.Л. Пространство $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа–Бебутова и дифференциальные включения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 162–177.
9. Скворцов В.А. Борелевское множество // Математическая энциклопеция. М.: Советская энциклопеция, 1977. Том 1. С. 535.
10. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1971. 224 с.

Поступила в редакцию 30.11.2013

Тонков Евгений Леонидович, д. ф.-м. н., профессор, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1; Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: eltonkov@udm.ru

E. L. Tonkov

Turnpike processes of control systems on smooth manifolds

Keywords: turnpike processes, manifolds of finite dimension, uniform local controllability, omega-limit sets, Lyapunov functions.

Mathematical Subject Classifications: 34A26, 34H05, 34A60

We consider the so-called *standard* control systems. These are systems of differential equations defined on smooth manifolds of finite dimension that are uniformly continuous and time-bound on the real axis and locally Lipschitz in the phase variables. In addition, we assume that the compact set is given, which defines geometric constraints on the admissible controls and moreover, the *non-degeneracy condition* holds. This condition means that for each point of the phase manifold and for all times there exists a control such that the value of vector field is contained in the Euclidean space that is tangent to the phase manifold at a given point.

Using the modified method of the Lyapunov function and constructing omega-limit set of the corresponding dynamical system of shifts, we give propositions about the existence of admissible control processes that are it bounded on the positive semiaxis, and the assertion of uniform local controllability of the corresponding turnpike process.

REFERENCES

1. Panasyuk A.I., Panasyuk V.I. *Asimptoticheskaya magistral'naya optimizatsiya upravlyaemykh sistem* (Asymptotic turnpike optimization of control systems), Minsk: Nauka i Tekhnika, 1986, 296 p.

2. Anosov D.V. *Lektsii po lineinoi algebre* (Lectures on linear algebra), Moscow: Regular and Chaotic Dynamics, 1999, 105 p.

3. Engelking R. *General topology*, Warsaw: PWN, 1977. Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow: Mir, 1986, 751 p.

4. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. *Sovremennaya geometriya* (Modern geometry — methods and applications), Moscow: URSS, 1986, 759 p.

5. Agrachev A.A., Sachkov Yu.L. *Control theory from the geometric viewpoint*, Berlin: Springer-Verlag, 2004.

МАТЕМАТИКА 2013. Вып. 4

6. Arnold V.I. *Ordinary differential equations*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1992.

7. Bebutov M.V. Dynamical systems in the space of continuous function, *Bull. Mat. Inst. Moscow State University*, 1940, vol. 2, no. 5, pp. 1–52.

8. Panasenko E.A., Rodina L.I., Tonkov E.L. The space $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ with the Hausdorff–Bebutov metric and differential inclusions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. 121–136.

9. Skvortsov V.A. Borel set, *Mathematical encyclopedia*, Moscow: Soviet Encyclopedia, 1977, vol. 1, p. 535.

10. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988.

Received 30.11.2013

Tonkov Evgenii Leonidovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia; Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: eltonkov@udm.ru