УДК 517.977

© *Д. В. Сахаров*

ОДНА ЗАДАЧА ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ПРИМЕРЕ ПОНТРЯГИНА [1]

Рассматривается задача преследования группой преследователей одного убегающего в стационарном примере Л.С. Понтрягина при условии, что все участники игры обладают одинаковыми возможностями, корни характеристического уравнения простые и чисто мнимые, терминальные множества — выпуклые компакты, множество допустимых управлений — произвольный выпуклый компакт. Получены достаточные условия разрешимости задачи преследования, приведены иллюстрирующие примеры.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, пример Понтрягина.

Введение

Важное направление современной теории дифференциальных игр связано с разработкой методов решения игровых задач преследования–уклонения с участием нескольких объектов [1–6]. Задача преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что динамические и инерционные возможности участников совпадают, впервые была рассмотрена Б.Н. Пшеничным в работе [2]. Для случая простых движений были получены необходимые и достаточные условия поимки.

Естественным обобщением этой задачи является пример Л.С. Понтрягина [5] со многими участниками, имеющими одинаковые возможности. В работах [7,8] рассматривался стационарный пример Л.С. Понтрягина в случае чисто мнимых корней, множество допустимых управлений — шар с центром в нуле, терминальное множество — начало координат. Нестационарный пример Л.С. Понтрягина рассматривался в [9–11]. Задача о многократной поимке в примере Л.С. Понтрягина рассматривалась в [12].

В данной работе для примера Л.С. Понтрягина с равными возможностями всех участников в предположении, что корни характеристического уравнения являются простыми и чисто мнимыми, терминальные множества — выпуклые компакты, множество допустимых управлений — произвольный выпуклый компакт, получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. Работа примыкает к исследованиям [13–15].

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лица: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающего E. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$x_i^{(l)} + a_1 x_i^{(l-1)} + \ldots + a_l x_i = u_i, \quad u_i \in U. \tag{1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$y^{(l)} + a_1 y^{(l-1)} + \ldots + a_l y = v, \quad v \in U. \tag{2}$$

Здесь и далее x_i, y, u_i, $v \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}$, U — выпуклый компакт из $\mathbb{R}^k$.

При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(\alpha)}(t_0) = x_{i\alpha}^0, \quad y^{(\alpha)}(t_0) = y_\alpha^0, \quad \alpha = 0, \ldots, l-1,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 12–01–00195, 12–01–31077).

причем $x_{i0}^0 - y_0^0 \notin M_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$, где M_i — выпуклые компакты из $\mathbb{R}^k$.

Вместо систем (1), (2) рассмотрим систему

$$z_i^{(l)} + a_1 z_i^{(l-1)} + \ldots + a_l z_i = u_i - v, \quad u_i, v \in U, \tag{3}$$

$$z_i(t_0) = z_{i0}^0 := x_{i0}^0 - y_0^0, \quad \ldots, \quad z_i^{(l-1)}(t_0) = z_{i,l-1}^0 := x_{i,l-1}^0 - y_{l-1}^0. \tag{4}$$

Пусть $z^0 = \{z_{i\alpha}^0, \alpha = 0, \ldots, l-1, i \in I\}$. Управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из множества U будем называть допустимыми.

Определение 1. Будем говорить, что *задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i*, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию z^0, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в U.

Обозначим данную игру через Г.

Определение 2. В игре Г из начального состояния z^0 *происходит поимка,* если существует момент $T(z^0)$, квазистратегии $\mathcal{U}_1(t, z^0, v_t(\cdot)), \ldots, \mathcal{U}_n(t, z^0, v_t(\cdot))$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции v, $v(t) \in U$, $t \in [t_0, T(z^0)]$, найдется номер $q \in \{1, \ldots, n\}$ такой, что $z_q(T(z^0)) \in M_q$.

§ 2. Обозначения и предположения

Обозначим через $\varphi_p(t)$, $p = 0, \ldots, l-1$, решения уравнения

$$w^{(l)} + a_1 w^{(l-1)} + \ldots + a_l w = 0$$

с начальными условиями

$$w(0) = 0, \quad \ldots, \quad w^{(p-1)}(0) = 0, \quad w^{(p)}(0) = 1, \quad w^{(p+1)}(0) = 0, \quad \ldots, \quad w^{(l-1)}(0) = 0.$$

Предположение 1. В системах (1), (2) $l = 2p$ и характеристическое уравнение

$$\lambda^l + a_1 \lambda^{l-1} + \ldots + a_l = 0 \tag{5}$$

имеет простые чисто мнимые корни.

Обозначим корни уравнения (5) через

$$\pm\beta_1 i, \ \pm\beta_2 i, \ \ldots, \ \pm\beta_p i \ \ (0 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_p).$$

Пусть, далее,

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t) z_{i0}^0 + \varphi_1(t) z_{i1}^0 + \ldots + \varphi_{2p-1}(t) z_{i,2p-1}^0.$$

Так как

$$\varphi_q(t) = \sum_{s=1}^{p} (b_{s,q} \cos(\beta_s t) + c_{s,q} \sin(\beta_s t)), \qquad \text{где } b_{s,q}, c_{s,q} \in \mathbb{R},$$

то $\xi_i(t)$ представимы в виде

$$\xi_i(t) = \sum_{s=1}^{p} (B_{s,i} \cos(\beta_s t) + C_{s,i} \sin(\beta_s t)), \qquad \text{где } B_{s,i}, C_{s,i} \in \mathbb{R}^k.$$

Через H_i обозначим кривые $H_i = \{\xi_i(t), t \in [t_0, \infty)\}$. Положим далее

$$d = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in D = D_\varepsilon(h_1^0) \times D_\varepsilon(h_2^0) \times \ldots \times D_\varepsilon(h_n^0)$$

и определим функции r, λ_i, J_i следующим образом:

$$r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ \varphi_{2p-1}(t) \geqslant 0, \\ -1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\lambda_i(v, r, h_i, m_i) = \begin{cases} \sup\{\lambda | \lambda \geqslant 0, v - \lambda r(h_i - m_i) \in U\}, & \text{если } \ h_i \neq m_i, \\ 0, & \text{если } \ h_i = m_i, \end{cases}$$

$$\lambda_i(v, r, h_i) = \sup_{m_i \in M_i} \lambda_i(v, r, h_i, m_i),$$

$$J_i(t, h_i) = \int_{t_0}^{t} |\varphi_{2p-1}(t-s)| \lambda_i(v(s), r(t-s), h_i)\, ds.$$

Предположение 2. Существуют $h_i^0 \in H_i, h_i^0 \neq 0$ такие, что при некотором $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\delta = \inf_{d \in D} \min_{r \in \{-1,1\}} \min_{v \in U} \max_{i=1,\ldots,n} \lambda_i(v, r, h_i^0) > 0.$$

В дальнейшем считаем, что $\varepsilon > 0$ выбрано в соответствии с этим предположением.

Лемма 1. *Пусть выполнены предположения* 1, 2. *Тогда существует момент* $T > t_0$ *такой, что для любого допустимого управления убегающего* $v(t)$ *найдется номер* $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$ *такой, что* $J_\alpha(T, h_\alpha) \geqslant 1$.

Доказательство. По условию леммы

$$\delta = \inf_{d \in D} \min_{r \in \{-1,1\}} \min_{v \in U} \max_{i=1,\ldots,n} \lambda_i(v, r, h_i^0) > 0,$$

поэтому

$$\max_{i \in I} J_i(t, h_i) \geqslant \frac{1}{n} \int_{t_0}^{t} |\varphi_{2p-1}(t-s)| \sum_{i \in I} \lambda_i(v(s), r(t-s), h_i)\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\delta}{n} \int_{t_0}^{t} |\varphi_{2p-1}(t-s)|\, ds.$$

Таким образом, для момента T_1, определяемого из условия

$$\frac{\delta}{n} \int_{t_0}^{T_1} |\varphi_{2p-1}(T_1 - s)|\, ds \geqslant 1,$$

и некоторого $\alpha \in I$ выполнено $J_\alpha(T_1, h_\alpha) \geqslant 1$. Лемма доказана. □

Пусть

$$T(z^0) = \min\{t > t_0 : \inf_{v \in U} \min_{d \in D} \max_{i \in I} J_i(t, h_i) \geqslant 1\}.$$

В силу леммы 1 выполнено неравенство $T(z^0) < \infty$.

§ 3. Основной результат

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* 1, 2. *Тогда в игре* Γ *происходит поимка.*

Доказательство. По формуле Коши решение задачи (3)–(4) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$z_i(t) = \xi_i(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi_{2p-1}(t-s)(u_i(s) - v(s))\, ds \qquad \text{для всех } t \geqslant t_0.$$

Так как функция ξ_i является почти периодической, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать момент времени $T_\varepsilon(z^0) > T(z^0)$ такой, что найдутся моменты $T_\varepsilon^i \in [T(z^0), T(z^0) + T_\varepsilon(z^0))$, для которых $\xi_i(T_\varepsilon^i) \in D_\varepsilon(h_i^0)$.

Пусть $v(\tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant T_\varepsilon(z^0)$, — произвольное допустимое управление убегающего E и t_1 — наименьший положительный корень функции f вида

$$f(t) = 1 - \max_{i \in I} \int_{t_0}^{t} |\varphi_{2p-1}(T_\varepsilon^i - s)| \lambda_i(v(s), r(T_\varepsilon^i - s), \xi_i(T_\varepsilon^i))\, ds.$$

В силу леммы 1 $t_1 \leqslant T_\varepsilon^i$. Предпишем преследователю P_i строить свое управление следующим образом: функции $u_i(t) \in U$, $m_i(t) \in M_i$ выбираются как лексикографический минимум уравнения

$$u_i(t) = v(t) - \lambda_i(v(t), r(T_\varepsilon^i - t), \xi_i(T_\varepsilon^i)) r(T_\varepsilon^i - t)(\xi_i(T_\varepsilon^i) - m_i(t)) \text{ для всех } t \in [t_0, T_\varepsilon(z^0)],$$

где полагаем $\lambda_i(v(t), r(T_\varepsilon^i - t), \xi_i(T_\varepsilon^i)) = 0$ при $t \in (t_1, T_\varepsilon(z^0)]$.

В силу определения функции λ если для номера i справедливо $\xi_i(\tau) = m_i$ при некотором $\tau \in (t_0, T_\varepsilon(z^0))$, то управление такого преследователя при $t \in [\tau, T_\varepsilon(z^0)]$ будет иметь следующий вид:

$$u_i(t) = v(t).$$

Отметим, что так построенные функции $u_i(t)$, $m_i(t)$ измеримы.

Покажем, что, применяя управления $u_i(t)$, преследователи могут гарантировать окончание преследования в момент времени $T_\varepsilon(z^0)$.

С учетом формулы Коши получаем

$$\begin{aligned} z_i(T_\varepsilon(z^0)) = \xi_i(T_\varepsilon(z^0)) - \int_{t_0}^{T_\varepsilon(z^0)} |\varphi_{2p-1}(T_\varepsilon^i - s)| \lambda_i(v(s), r(T_\varepsilon^i - s), \xi_i(T_\varepsilon^i))(\xi_i(T_\varepsilon^i) - m_i(s))\, ds) = \\ = \xi_i(T_\varepsilon(z^0))(1 - \int_{t_0}^{T_\varepsilon(z^0)} |\varphi_{2p-1}(T_\varepsilon^i - s)| \lambda_i(v(s), r(T_\varepsilon^i - s), \xi_i(T_\varepsilon^i))\, ds) + \\ + \int_{t_0}^{T_\varepsilon(z^0)} |\varphi_{2p-1}(T_\varepsilon^i - s)| \lambda_i(v(s), r(T_\varepsilon^i - s), \xi_i(T_\varepsilon^i)) m_i(s)\, ds = \\ = \xi_i(T_\varepsilon(z^0))(1 - \int_{t_0}^{t_1} |\varphi_{2p-1}(T_\varepsilon^i - s)| \lambda_i(v(s), r(T_\varepsilon^i - s), \xi_i(T_\varepsilon^i))\, ds) + \\ + \int_{t_0}^{T_\varepsilon(z^0)} |\varphi_{2p-1}(T_\varepsilon^i - s)| \lambda_i(v(s), r(T_\varepsilon^i - s), \xi_i(T_\varepsilon^i)) m_i(s)\, ds. \end{aligned}$$

В силу определения t_1, для некоторого $j \in I$ разность в скобках обращается в ноль, поэтому

$$z_j(T_\varepsilon(z^0)) = \int_{t_0}^{t_1} |\varphi_{2p-1}(T_\varepsilon^j - s)| \lambda_j(v(s), r(T_\varepsilon^j - s), \xi_j(T_\varepsilon^j)) m_j(s)\, ds.$$

Покажем теперь, что $z_j(T_\varepsilon(z^0)) \in M_j$. Обозначим через $C_{M_j}(\psi)$ опорную функцию множества M_j. Так как $m_j(s) \in M_j$ при каждом s, то

$$(m_j(s), \psi) \leqslant C_{M_j}(\psi) \quad \text{для всех } \psi, s.$$

Умножая обе части неравенства на

$$g(s) = |\varphi_{2p-1}(T_\varepsilon^i - s)| \lambda_j(v(s), r(T_\varepsilon^j - s), \xi_j(T_\varepsilon^j)) \geqslant 0,$$

получаем

$$g(s)(m_j(s), \psi) \leqslant g(s) C_{M_j}(\psi) \quad \text{для всех } \psi, s.$$

Далее,

$$\int_{t_0}^{t_1} g(s)(m_j(s),\psi)\,ds \leqslant \int_{t_0}^{t_1} g(s)C_{M_j}(\psi)\,ds = C_{M_j}(\psi)\int_{t_0}^{t_1} g(s)\,ds = C_{M_j}(\psi)$$

в силу определения момента t_1, откуда для любого ψ имеем

$$\Big(\int_{t_0}^{t_1} g(s)m_j(s)\,ds,\ \psi\Big) \leqslant C_{M_j}(\psi)$$

и, учитывая выпуклость M_j, получаем

$$z_j(T_\varepsilon(z^0)) = \int_{t_0}^{t_1} g(s)m_j(s)\,ds \in M_j.$$

Теорема доказана. □

Предположение 3. Начальные позиции $\{z_{i0}^0\}$ участников игры таковы, что при некотором $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\delta = \inf_{d\in D}\min_{r\in\{-1,1\}}\min_{v\in U}\max_{i=1,\ldots,n}\lambda_i(v,r,z_{i0}^0) > 0.$$

Следствие 1. *Пусть выполнены предположения* 1, 3. *Тогда в игре* Γ *происходит поимка.*

§ 4. Примеры

Для каждой крайней точки v_0 компакта U определим конус $K(v_0) = \{(t-t_0)(v_0-U), t \geqslant t_0\}$ (см. [4, с. 58]).

Замечание 1. Предположение 3 будет выполнено, если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для всех крайних точек v_0 компакта U пересечение внутренности каждого конуса $K(v_0)$ с каждым из семейств множеств $z_{i0}^0 - M_i$, $M_j - z_{j0}^0$ содержит шар радиуса ε.

Пример 1. Пусть $k = 2$, $n = 4$; система (3) имеет вид

$$\ddot{z}_i + z_i = u_i - v;$$

заданы начальные условия (4):

$$z_{10}^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ z_{20}^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ z_{30}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ z_{40}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$z_{i,1}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ для всех } i = 1,2,3,4;$$

U — прямоугольник с вершинами $\{(2;1),(2;-1),(-2;1),(-2;-1)\}$, $M_i = D_1(0)$ для всех i. Тогда предположение 1 выполнено, конусами $K(v_0)$ для крайних точек v_0 компакта U являются координатные четверти. Пересечение каждой координатной четверти с семействами множеств $z_{i0}^0 - M_i$, $M_j - z_{j0}^0$ содержит шар радиуса 1. Условие замечания 1 выполнено. В игре Γ происходит поимка.

Пример 2. Пусть $k = 2$, $n = 3$; система (3) имеет вид

$$z_i^{(6)} + 30z_i^{(4)} + 129\ddot{z}_i + 100z_i = u_i - v;$$

заданы начальные условия (4):

$$z_{10}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix},\ z_{20}^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},\ z_{30}^0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$z_{i,j}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ для всех } i = 1,2,3,\ j = 1,\ldots,5;$$

U — сектор круга с центром в точке $A = (0; -1)$ радиуса 2, ограниченный двумя радиусами AB и AC, симметричными относительно вертикальной оси; $\angle BAC = \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $M_i = D_1(0)$ для всех i. Тогда корни характеристического уравнения

$$\lambda^6 + 30\lambda^4 + 129\lambda^2 + 100 = 0$$

равны $\pm i$, $\pm 2i$, $\pm 5i$ и предположение 1 выполнено, а крайними точками компакта U являются точки

$$A = (0; -1),\ B = (-2\sin\frac{\alpha}{2}; 2\cos\frac{\alpha}{2} - 1),\ C = (2\sin\frac{\alpha}{2}; 2\cos\frac{\alpha}{2} - 1)$$

и все точки дуги BC. Конусы $K(v_0)$ для крайних точек A, B и C представляют собой углы, для внутренних точек дуги BC — открытые полупространства, проходящие через начало координат. Условие замечания 1 выполнено. В игре Γ происходит поимка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л.А. Игры преследования со многими участниками // Известия АН Арм. ССР. 1966. Т. 1. № 5. С. 331–340.
2. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
3. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992. 240 с.
4. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во Московского ун-та, 1990. 197 с.
5. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Издательство «Удмуртский университет», 2009. 266 с.
6. Ganebny S.A., Kumkov S.S., Menec S.L., Patsko V.S. Model problem in a line with two pursuers and one evader // Dyn. Games Appl. 2012. № 2. P. 228–257.
7. Благодатских А.И. Об одном колебательном конфликтно управляемом процессе со многими участниками // Известия РАН. Теория и системы управления. 2005. № 2. С. 43–45.
8. Благодатских А.И. О двух колебательных конфликтно управляемых процессах со многими участниками // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2005. № 2. С. 3–22.
9. Благодатских А.И. Групповое преследование в нестационарном примере Понтрягина // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 1. С. 39–44.
10. Петров Н.Н. Нестационарный пример Понтрягина с фазовыми ограничениями // Проблемы управления и информатики. 2000. № 4. С. 18–24.
11. Банников А.С., Петров Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 10. № 1. С. 40–51.
12. Петров Н.Н. Многократная поимка в примере Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 747–754.
13. Сахаров Д.В. Об одной дифференциальной игре преследования со многими участниками // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 1. С. 81–88.
14. Петров Н.Н. «Мягкая» поимка в примере Л.С. Понтрягина со многими участниками // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 759–770.
15. Банников А.С. Об одной задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 3–11.

Поступила в редакцию 19.10.2013

Сахаров Денис Валентинович, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: drden@e-izhevsk.ru

D. V. Sakharov
Problem of group pursuit in a Pontriagin's example

Keywords: differential game, group pursuit, Pontriagin's example.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 49N75

МАТЕМАТИКА 2013. Вып. 4

A pursuit problem of one evader by a group of pursuers in stationary L.S. Pontriagin's example with equal possibilities for all participants is considered. It is supposed that the roots of the characteristic equation are simple and purely imaginary, the terminal sets are the convex compacts and the set of possible controls is arbitrary convex compact. The sufficient solvability conditions of the problem of pursuit are obtained, illustrative examples are presented.

REFERENCES

1. Petrosyan L.A. Games of pursuit with many participants, *Izvestiya Akademii Nauk Arm. SSR*, 1966, vol. 1, no. 5, pp. 331–340.

2. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by a few objects, *Kibernetika*, 1976, no. 3, pp. 145–146.

3. Chikrii A.A. *Konfliktno upravlyaemye protsessy* (Conflict controlled processes), Kiev: Naukova Dumka, 1992, 240 p.

4. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control a few dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990, 197 p.

5. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009, 266 p.

6. Ganebny S.A., Kumkov S.S., Menec S.L., Patsko V.S. Model problem in a line with two pursuers and one evader, *Dyn. Games Appl.*, 2012, no. 2, pp. 228–257.

7. Blagodatskikh A.I. On an oscillatory conflict-controlled process with many players, *J. Comput. Syst. Sci.*, 2005, no. 2, pp. 198–200.

8. Blagodatskikh A.I. On two oscillatory conflictly controlled processes with many persons, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2005, no. 2, pp. 3–22.

9. Blagodatskikh A.I. Group pursuit in Pontryagin's nonstationary example, *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 1, pp. 40–46.

10. Petrov N.N. Non-stationary Pontriagin's example with phase restrictions, *Problemy Upravleniya i Informatiki*, 2000, no. 4, pp. 18–24.

11. Bannikov A.S., Petrov N.N. On a nonstationary problem of group pursuit, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 271, issue 1 supplement, pp. 41–52.

12. Petrov N.N. Multiple capture in Pontryagin's example with phase constraints, *J. Appl. Math. Mech.*, 1997, vol. 61, issue 5, pp. 725–732.

13. Sakharov D.V. About one differential game of pursuit with many persons, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 1, pp. 81–88.

14. Petrov N.N. "Soft" capture in the L.S. Pontryagin example of many players, *J. Appl. Math. Mech.*, 2003, vol. 67, issue 5, pp. 671–680.

15. Bannikov A.S. On one problem of simple pursuit, *Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 3, pp. 3–11.

Received 19.10.2013

Sakharov Denis Valentinovich, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: drden@e-izhevsk.ru