УДК 517.935 + 517.938

© *Л. И. Родина*

О НЕКОТОРЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЯХ ДИНАМИКИ РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ [1]

Разработана новая вероятностная модель, которая применяется для описания динамики роста изолированной популяции. Найдены условия асимптотического вырождения с вероятностью единица для популяции, развитие которой задано управляемой системой со случайными коэффициентами, получены также условия существования управления, приводящего популяцию к вырождению. Исследуется динамический режим развития популяции, находящейся на грани исчезновения; это означает, что с вероятностью единица размер данной популяции окажется меньше минимального критического значения, после которого биологическое восстановление популяции невозможно. Результаты работы проиллюстрированы на примере развития двуполой популяции.

Ключевые слова: вероятностные модели динамики популяции, вероятность вырождения популяции, управляемые системы со случайными коэффициентами.

Введение

В работах [1–3] (см. также обзор в [4]) изучаются детерминированные математические модели динамики численности изолированной популяции, в которых гибель особей носит непрерывный характер, а появление особей новых генераций происходит в некоторые фиксированные моменты времени τ_k. В данной работе предложена новая вероятностная дискретно-непрерывная модель, в которой предполагается, что развитие популяции на интервалах времени (τ_k, τ_{k+1}), так же как и моменты τ_k зависят от различных изменений внешней среды, поэтому динамика популяции описывается управляемой системой со случайными коэффициентами. Для данной популяции исследованы различные динамические режимы развития, получены условия асимптотического вырождения с вероятностью единица и условия существования управления, приводящего популяцию к вырождению. Результаты работы могут найти применение в практических задачах, в которых управляющие воздействия направлены либо на увеличение размера популяции (сохранение редких видов животных, занесенных в красную книгу), либо на его уменьшение (управление численностью вредных насекомых, задачи эпидемиологии).

Согласно А. Н. Колмогорову [5], детерминированные модели описывают динамику роста популяции для случая, когда ее численность достаточно велика, а при низких значениях эти модели неприменимы. Подобное допущение сделаем и для введенной в работе вероятностной модели. Будем предполагать, что популяция исчезает не только когда ее размер асимптотически стремится к нулю. Она также вырождается, если этот размер окажется меньше некоторого минимального критического значения x_*, после которого восстановление популяции с биологической точки зрения невозможно, несмотря на то что решение системы, описывающей развитие данной популяции, после достижения минимального значения может возрастать. Если речь идет о популяциях млекопитающих, то говорят, что они находятся на грани исчезновения и данный вид может исчезнуть в том случае, если несколько лет подряд будет подвергаться неблагоприятным условиям (нехватка корма, истребление браконьерами).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12–01–00195-а).

§ 1. Описание вероятностной дискретно-непрерывной модели динамики роста популяции

1.1. Примеры дискретно-непрерывных моделей роста популяции

Приведем примеры детерминированных моделей, которые изучены в работах [1, с. 36, 69], [2, 3] и послужат в дальнейшем основой для построения вероятностной модели.

Пример 1. Целесообразность применения этой модели связана с тем, что в реализации процесса рождения, появления новых генераций особей наблюдается синхронность. В то же время процесс гибели носит непрерывный характер, каждая отдельная особь может погибнуть в любой момент времени под воздействием различных факторов. Для описания динамики популяции в этом случае требуется дифференциальное уравнение с импульсным воздействием, траектории которого терпят разрыв в определенные моменты времени (моменты появления новых поколений) $\tau_k = kT$, где $T > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. В рамках модели можно допускать, что появление новой генерации осуществляется моментально в моменты времени τ_k, поскольку временной диапазон ее появления намного меньше времени жизни отдельных особей. Предполагается, что численность популяции изменяется согласно дифференциальному уравнению

$$\dot{z} = -zR(z), \quad t \neq \tau_k, \quad \Delta z\big|_{t=\tau_k} = \ell z,$$

где $\Delta z\big|_{t=\tau_k} = z(\tau_k+0) - z(\tau_k-0)$, $\ell = const > 0$ — коэффициент размножения, равный количеству новых особей, приходящихся на одну выжившую к моменту размножения особь в популяции. Функция $R(z)$ является интенсивностью гибели особей, она дифференцируема и удовлетворяет следующим условиям, которые реализуются во многих моделях динамики популяций:

$$R(0) > 0, \quad R'(z) > 0, \quad \lim_{z\to+\infty} R(z) = +\infty. \tag{1.1}$$

В работе [1] показано, что при выполнении условий (1.1) численность популяции (рассматриваемая в моменты τ_k) изменяется монотонно и при этом всегда имеется единственный глобально устойчивый стационарный уровень.

Пример 2. Существуют различные модели динамики роста популяции (например, модели с типовой структурой, с возрастной структурой, модели, описывающие динамику численности особей разных типов и различных возрастных классов), в которых предполагается, что переход из одного типа или класса в другой носит скачкообразный характер и осуществляется в фиксированные моменты времени τ_k. Это модели с непрерывно-дискретным поведением траекторий, которые описываются системой дифференциальных уравнений с импульсным воздействием; такое же поведение траекторий будет и для популяции с половой структурой (примеры описания этих моделей см. в [1, с. 68–76], [2]). Рассматриваются популяции, динамика развития которых задана управляемой системой

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(t, x, u), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x\big|_{t=\tau_k} = g(x, w), \quad (t, x, u, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $\tau_k = kT$, $k = 1, 2, \ldots$, $\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности n со скалярным произведением $\langle x, y\rangle$ и нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Обозначим через $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ пространство непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Допустимыми управлениями $u(t)$ являются всевозможные ограниченные измеримые функции со значениями в множестве $U \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, вектор w является управляющим воздействием, влияющим на поведение системы в моменты времени τ_k и принимает значения в множестве $W \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^p)$. Предполагаем, что функции $f(t, x, u)$ и $g(x, w)$ непрерывны по совокупности переменных.

Поставим в соответствие системе (1.2) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad F(t, x) = \mathrm{co}\,\widetilde{F}(t, x), \tag{1.3}$$

где для каждой фиксированной точки $(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}$ множество $\widetilde{F}(t,x)$ состоит из всех предельных значений функции $(t,x)\to f\bigl(t,x,U\bigr)$ при $(t_i,x_i)\to(t,x)$, запись со $\widetilde{F}(t,x)$ означает замыкание выпуклой оболочки множества $\widetilde{F}(t,x)$. Решением системы (1.2) является такая кусочно-непрерывная функция $x=\varphi(t)$ (абсолютно непрерывная на интервалах (τ_k,τ_{k+1})) с разрывами первого рода при $t=\tau_k$, которая при почти всех t удовлетворяет включению $\dot\varphi(t)\in F(t,\varphi(t))$ и условию скачка при $t=\tau_k$, то есть

$$\Delta\varphi\big|_{t=\tau_k}=\varphi(\tau_k+0)-\varphi(\tau_k-0)=g(\varphi(\tau_k-0),w).$$

В дальнейшем будем предполагать, что функция $\varphi(t)$ непрерывна слева, и под значением функции $\varphi(t)$ в точке $t=\tau_k$ будем понимать $\varphi(\tau_k-0)=\lim\limits_{t\to\tau_k-0}\varphi(t)$.

1.2. Описание вероятностной модели

Теперь «немного» изменим модель (1.2), превратив ее в вероятностную. Естественно допускать, что развитие популяции на интервалах (τ_k,τ_{k+1}), так же как и моменты τ_k, определяется различными природными и экологическими условиями, поэтому будем считать, что на каждом временном интервале (τ_k,τ_{k+1}) функция f зависит от случайного параметра ψ_k, принимающего значения в заданном множестве Ψ, а длины интервалов $\theta_k=\tau_k-\tau_{k-1}$, $k=2,3,\ldots$, между моментами появления новой генерации являются случайными величинами с функцией распределения $G(t)$. Предполагаем, что данное распределение сосредоточено на отрезке $[\alpha,\beta]$, где $0<\alpha<\beta<\infty$, то есть $G(t)=0$ при $t<\alpha$ и $G(t)=1$ при $t\geqslant\beta$. В частном случае, когда все величины φ_k, θ_k постоянные, вероятностная модель совпадает с детерминированной, поэтому она является обобщением детерминированной модели.

Приведем описание вероятностной модели. Пусть динамика развития некоторой популяции задана управляемой системой

$$\begin{gathered}\dot x=f(h^t\sigma,x,u),\quad t\neq\tau_k(\sigma),\\ \Delta x\big|_{t=\tau_k(\sigma)}=g(x,w),\quad (t,\sigma,x,u,w)\in\mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p,\end{gathered}\tag{1.4}$$

порожденной метрической динамической системой $(\Sigma,\mathfrak{A},\mu,h^t)$. Предполагаем, что функция $(x,w)\to g(x,w)$ и для каждого фиксированного $\sigma\in\Sigma$ функция $(t,x,u)\to f(h^t\sigma,x,u)$ непрерывны по совокупности переменных, а управления u и w принимают значения в множествах $U\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$ и $W\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^p)$ соответственно.

Напомним, что *метрической динамической системой* называется четверка $(\Sigma,\mathfrak{A},\mu,h^t)$, где Σ — фазовое пространство динамической системы; $\mathfrak{A}$ — некоторая сигма-алгебра подмножеств Σ; h^t — однопараметрическая группа измеримых преобразований фазового пространства Σ в себя (измеримость означает, что $h^tA\in\mathfrak{A}$ для каждого $A\in\mathfrak{A}$ и для любого $t\in\mathbb{R}$). Далее, μ — вероятностная мера, инвариантная относительно потока h^t, то есть $\mu(h^tA)=\mu(A)$ для всех $A\in\mathfrak{A}$ и любого $t\in\mathbb{R}$ (см., например, [6, с. 12]).

Опишем метрическую динамическую систему $(\Sigma,\mathfrak{A},\mu,h^t)$, которая параметризует управляемую систему (1.4), и таким образом эта система превращается в систему со случайными коэффициентами (подобная система описана в [7]). Определим вероятностное пространство $(\Sigma,\mathfrak{A},\mu)$, которое является прямым произведением вероятностных пространств $(\Sigma_1,\mathfrak{A}_1,\mu_1)$ и $(\Sigma_2,\mathfrak{A}_2,\mu_2)$. Здесь Σ_1 означает множество числовых последовательностей $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_k,\ldots)$, где $\theta_k\in(0,\infty)$, система множеств $\mathfrak{A}_1$ является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами $E_k\doteq\{\theta\in\Sigma_1:\theta_1\in I_1,\ldots,\theta_k\in I_k\}$, где $I_i\doteq(t_i,s_i]$, а вероятностная мера μ_1 определена следующим образом. Для каждого промежутка I_i, $i\geqslant2$, определим вероятностную меру $\widetilde{\mu}_1(I_i)=G(s_i)-G(t_i)$ с помощью функций распределения $G(t)$, а для I_1 — с помощью функции распределения

$$G_1(t)=\frac{1}{m_\theta}\int_0^t\bigl(1-G(s)\bigr)ds,\quad t\in(0,\infty),\tag{1.5}$$

где m_θ — математическое ожидание случайной величины с распределением $G(t)$. На алгебре цилиндрических множеств построим меру $\widetilde{\mu}_1(E_k) = \widetilde{\mu}_1(I_1)\widetilde{\mu}_1(I_2)\ldots\widetilde{\mu}_1(I_k)$, тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (см., например, [8, с. 176]) на измеримом пространстве $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1)$ существует единственная вероятностная мера μ_1, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}_1$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_1$.

Далее, пусть заданы множество Ψ и сигма-алгебра его подмножеств $\mathfrak{A}_0$, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}_2$. Обозначим через Σ_2 множество последовательностей

$$\Sigma_2 \doteq \{\varphi : \varphi = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_k, \ldots),\ \psi_k \in \Psi\},$$

через $\mathfrak{A}_2$ обозначим наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$D_k \doteq \{\varphi \in \Sigma_2 : \psi_1 \in \Psi_1, \ldots, \psi_k \in \Psi_k\}, \quad \text{где} \quad \Psi_i \in \mathfrak{A}_0,$$

определим меру $\widetilde{\mu}_2(D_k) = \widetilde{\mu}_2(\Psi_1)\widetilde{\mu}_2(\Psi_2)\ldots\widetilde{\mu}_2(\Psi_k)$ и меру μ_2 как продолжение меры $\widetilde{\mu}_2$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_2$.

Введем последовательность $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом: $\tau_0 = 0$, $\tau_k(\theta) = \sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i$, где $\theta \in \Sigma_1$. Обозначим через $z = z(t, \theta)$ число точек последовательности $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$, расположенных левее t, тогда $z = z(t, \theta) = \max\bigl\{k : \tau_k \leqslant t\bigr\}$, где $t \geqslant 0$. Величина $z(t, \theta)$ называется *процессом восстановления.* Так как функция распределения случайной величины θ_1 задана равенством (1.5), то $z(t, \theta)$ является *стационарным процессом восстановления* (см. [9, с. 145–147]).

На вероятностном пространстве $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ определим преобразование сдвига

$$h_1^t\theta = \bigl(\tau_{z+1} - t, \theta_{z+2}, \theta_{z+3}, \ldots\bigr), \quad t > 0.$$

Поскольку $z(t, \theta)$ — стационарный процесс восстановления, то преобразование h_1^t сохраняет меру μ_1, то есть для любого множества $A \in \mathfrak{A}_1$ и всех $t \geqslant 0$ выполнено равенство $\mu_1(h_1^t A) = \mu_1(A)$. На пространстве $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ при каждом фиксированном $\theta \in \Sigma_1$ зададим преобразование сдвига $h_2^t(\theta)\varphi = (\psi_z, \psi_{z+1}, \ldots)$. Из определения меры μ_2 следует, что h_2^t сохраняет данную меру. На пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ также определим преобразование $h^t\sigma = h^t(\theta, \varphi) = \bigl(h_1^t\theta, h_2^t(\theta)\varphi\bigr)$. Построенная динамическая система $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$ называется косым произведением динамических систем $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1, h_1^t)$ и $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2, h_2^t(\theta))$, а преобразование $h^t\sigma$ сохраняет меру $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ (см. [6, с. 190]), которая является прямым произведением вероятностных мер μ_1 и μ_2. Это означает, что $\mu_1 \times \mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$ для всех $A \in \mathfrak{A}_1$, $B \in \mathfrak{A}_2$.

§ 2. Условия вырождения популяции с вероятностью единица

2.1. Вспомогательные утверждения

Результаты этого раздела как представляют самостоятельный интерес, так и служат для нахождения условий вырождения популяции, динамика которой задана управляемой системой со случайными коэффициентами. Здесь исследуется популяция, развитие которой определяется дифференциальным уравнением с импульсным воздействием

$$\dot{z} = q(h^t\sigma, z), \quad t \neq \tau_k(\sigma), \quad \Delta z\big|_{t=\tau_k(\sigma)} = \ell(z), \quad (t, \sigma, z) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

параметризованным метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$, которая построена в предыдущем разделе. Решения уравнения (2.1) предполагаем непрерывными слева.

Уравнению (2.1) поставим в соответствие вспомогательное детерминированное уравнение с импульсным воздействием

$$\dot{z} = q(t, \psi, z), \quad t \neq \tau_k, \quad \Delta z\big|_{t=\tau_k} = \ell(z), \quad (t, \psi, z) \in \mathbb{R} \times \Psi \times \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

где $\tau_k = kT$, $T \in [\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$. Отметим, что уравнение (2.2) можно рассматривать как частный случай уравнения со случайными коэффициентами (2.1) при фиксированном $\sigma = ((T, \psi), (T, \psi), \ldots) \in \Sigma$. Предполагаем, что выполнены следующие условия:

для каждого $\psi \in \Psi$ функция $(t, z) \to q(t, \psi, z)$ определена и непрерывна вместе с производной $q'_z(t, \psi, z)$ на множестве $(0, \infty) \times (0, \infty)$; $q(t, \psi, 0) = 0$ и $q(t, \psi, z) < 0$ при $t \geqslant 0$, $z > 0$; функция $L(z) \doteq \ell(z) + z$ дифференцируемая, возрастающая, $L(0) = 0$ и $L(z) > 0$ для всех $z > 0$.

Пусть $\varphi(t, \psi, z)$ — решение уравнения $\dot{z} = q(t, \psi, z)$ при фиксированном значении $\psi \in \Psi$ (без учета импульсного воздействия), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, \psi, z) = z$. Введем в рассмотрение функцию

$$H(t, \psi, z) \doteq L\big(\varphi(t, \psi, z)\big) = \ell\big(\varphi(t, \psi, z)\big) + \varphi(t, \psi, z),$$

которая, как будет показано дальше, определена для всех $(t, \psi, z) \in \mathbb{R}_+ \times \Psi \times \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+ \doteq [0, \infty)$. При фиксированных $t = T$ и $\psi \in \Psi$ функция $z \to H(T, \psi, z)$ определяет характер поведения популяции, заданной детерминированной моделью (2.2). Обозначим через $z_k = z(kT, \psi)$ размер популяции (2.2) в момент времени kT в предположении, что в начальный момент размер этой популяции равен $z(0, \psi) = z_0 \geqslant 0$, тогда

$$z_{k+1} = z\big((k+1)T, \psi\big) = H(T, \psi, z_k), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Отметим, что уравнение $H(T, \psi, z) = z$ всегда имеет решение $z = 0$. Известно, что если данное уравнение имеет единственное положительное решение $\bar{z}$ и $H'_z(T, \psi, \bar{z}) < 1$, то численность популяции z_k (рассматриваемая в моменты kT) монотонно стремится к $\bar{z}$ при $k \to \infty$. Если уравнение $H(T, \psi, z) = z$ не имеет положительных решений и $H'_z(T, \psi, 0) < 1$, то последовательность $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ асимптотически стремится к нулю при любом начальном размере z_0 (см., например, [1, с. 27; 37–38]).

В данной работе показано, что для вероятностной модели (2.1) существует больше динамических режимов изменения численности популяции. Для описания этих режимов исследуем свойства функции $(t, z) \to H(t, \psi, z)$ при заданном $\psi \in \Psi$. Предполагаем, что для всех $(t, \psi) \in (0, \infty) \times \Psi$ уравнение $H(t, \psi, z) = z$ имеет конечное число решений, и обозначим наибольшее из этих решений через $\widetilde{z}(t, \psi)$.

Лемма 1. *Пусть $\psi \in \Psi$ фиксировано. Функция $H(t, \psi, z)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $H'_z(t, \psi, z)$ для всех $t > 0$, $z > 0$, и имеют место следующие свойства:*

1) *$H(t, \psi, z) > 0$ для всех $(t, z) \in \mathbb{R}_+ \times (0, \infty)$ и $H(t, \psi, 0) = 0$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$;*

2) *для любого $t \in (0, \infty)$ функция $z \to H(t, \psi, z)$ возрастающая;*

3) *для любого $z \in (0, \infty)$ функция $t \to H(t, \psi, z)$ убывающая;*

4) *если $H'_z(t, \psi, \widetilde{z}(t, \psi)) < 1$ для всех $t > 0$, то функция $t \to \widetilde{z}(t, \psi)$ невозрастающая; следовательно, если $\widetilde{z}(t^*, \psi) = 0$, то для всех $t > t^*$ также выполнено равенство $\widetilde{z}(t, \psi) = 0$, то есть уравнение $H(t, \psi, z) = z$ не имеет положительных решений.*

Доказательство. Поскольку $\varphi(t, \psi, 0) \equiv 0$ и $L(0) = 0$, то $H(t, \psi, 0) = 0$ для любого $t \in [0, \infty)$. Покажем, что $\varphi(t, \psi, z) > 0$ для всех $z > 0$. Предположим противное: пусть существует точка t^* такая, что $\varphi(t^*, \psi, z) = 0$, $z > 0$. Тогда через точку $(t^*, 0)$ проходят два решения уравнения $\dot{z} = q(t, \psi, z)$ — исходное решение $\varphi(t, \psi, z)$ и решение, тождественно равное нулю; получили противоречие с условием единственности решения. Отметим, что $L(z) > 0$ при $z > 0$, поэтому $H(t, \psi, z) > 0$ для всех $(t, z) \in \mathbb{R}_+ \times (0, \infty)$.

Функция $t \to \varphi(t, \psi, z)$ является убывающей; это следует из неравенства $q(t, \psi, z) < 0$, которое верно для всех $(t, z) \in [0, \infty) \times (0, \infty)$. Следовательно, для решения $\varphi(t, \psi, z_0)$ уравнения $\dot{z} = q(t, \psi, z)$, удовлетворяющего начальному условию $\varphi(t, \psi, z_0) = z_0 \geqslant 0$, для всех $t \in [0, \infty)$ выполнено неравенство $0 \leqslant \varphi(t, \psi, z_0) \leqslant z_0$. Таким образом, решение $\varphi(t, \psi, z)$ ограничено и бесконечно продолжаемо вправо, поэтому функция $H(t, \psi, z)$ определена для всех $(t, \psi, z) \in \mathbb{R}_+ \times \Psi \times \mathbb{R}_+$. Непрерывность функций $H(t, \psi, z)$ и $H'_z(t, \psi, z)$ для всех $t > 0$, $z > 0$ следует из дифференцируемости функции $L(z)$ и теоремы о дифференцируемости по начальным значениям. Из единственности решения $\varphi(t, \psi, z)$ также следует, что функция $z \to \varphi(t, \psi, z)$ возрастающая. Действительно, если существуют такие $z_1 < z_2$, что $\varphi(t, \psi, z_1) \geqslant \varphi(t, \psi, z_2)$, то найдется точка $t_* \in (0, t]$ такая, что $\varphi(t_*, \psi, z_1) = \varphi(t_*, \psi, z_2)$; приходим к противоречию. Функция $L(z)$ возрастающая, поэтому функция $z \to H(t, \psi, z) = L\big(\varphi(t, \psi, z)\big)$ также возрастает.

Далее, для любого $z \in (0,\infty)$ функция $t \to H(t,\psi,z)$ убывает, поскольку убывающей является функция $t \to \varphi(t,\psi,z)$.

Зафиксируем положительные моменты времени $t_1 < t_2$ и рассмотрим функцию

$$S(z) = H(t_2,\psi,z) - z, \quad z \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда $S(0) = 0$, $S(\widetilde{z}(t_2,\psi)) = 0$ и при $z > \widetilde{z}(t_1,\psi)$ выполнено неравенство

$$S(z) = H(t_2,\psi,z) - z < H(t_1,\psi,z) - z < 0.$$

Следовательно, для максимального решения $\widetilde{z}(t_2,\psi)$ уравнения $H(t_2,\psi,z) = z$ (или равносильного ему уравнения $S(z) = 0$) имеет место неравенство $\widetilde{z}(t_2,\psi) \leqslant \widetilde{z}(t_1,\psi)$, то есть функция $t \to \widetilde{z}(t,\psi)$ невозрастающая. □

Заметим, что если функцию $H(t,\psi,z)$ нельзя выписать в явном виде, то можно попытаться оценить функцию $q(\sigma,z)$ некоторой функцией $q_0(\sigma,z)$, затем построить функцию $H_0(t,\psi,z)$ и воспользоваться теоремой о дифференциальных неравенствах.

2.2. Условия вырождения популяции, выполненные для всех $\sigma \in \Sigma$ и выполненные с вероятностью единица

Обозначим через $z(t,\sigma,z_0)$ размер популяции, динамика которой задана уравнением (2.1), через z_0 — начальный размер популяции.

Лемма 2. *Если для каждого $\psi \in \Psi$ уравнение $H(\alpha,\psi,z) = z$ не имеет положительных решений и $H'_z(\alpha,\psi,0) < 1$, то для каждого $\sigma \in \Sigma$ и любого $z_0 \geqslant 0$ справедливо равенство $\lim\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma,z_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\sigma = ((\theta_1,\psi_1),(\theta_2,\psi_2),\dots)$ — произвольная точка множества Σ, $\sigma_0 = ((\theta_1,\psi_1),(\alpha,\psi_2),(\alpha,\psi_3),\dots) \in \Sigma$, где $\theta_1 \in [0,\beta]$, $\theta_k \in [\alpha,\beta]$, $k = 2,3,\dots$. Рассмотрим решения $z(t,\sigma_0,z_0)$ и $z(t,\sigma,z_0)$ уравнения (2.1) с одинаковым начальным условием $z_0 \geqslant 0$. При $z_0 = 0$ утверждение леммы очевидно, поэтому будем предполагать, что $z_0 > 0$. Решению $z(t,\sigma,z_0)$ поставим в соответствие последовательность $\{z_k(\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$z_0(\sigma) = z_0, \quad z_k(\sigma) = z(\tau_k(\sigma),\sigma) = H(\theta_k,\psi_k,z_{k-1}(\sigma)), \;\; k = 1,2,\dots, \tag{2.3}$$

таким же образом определим последовательность $\{z_k(\sigma_0)\}_{k=1}^{\infty}$. Если $\sigma = \sigma_0$, мы имеем уравнение с моментами скачков $\tau_k(\sigma_0) = \theta_1 + (k-1)\alpha$, $k = 1,2,\dots$, для которого при выполнении условий леммы справедливо равенство $\lim\limits_{k\to\infty} z_k(\sigma_0) = 0$ (см., например, [1, с. 27]). Очевидно, что $z_1(\sigma) = z(\theta_1,\sigma,z_0) = z(\theta_1,\sigma_0,z_0) = z_1(\sigma_0)$. Поскольку функция $t \to H(t,\psi,z)$ убывает и $\theta_2 \in [\alpha,\beta]$, то

$$z_2(\sigma) = H(\theta_2,\psi_2,z_1(\sigma)) = H(\theta_2,\psi_2,z_1(\sigma_0)) \leqslant H(\alpha,\psi_2,z_1(\sigma_0)) = z_2(\sigma_0).$$

Далее, функция $z \to H(t,\psi,z)$ возрастающая, поэтому

$$z_3(\sigma) = H(\theta_3,\psi_3,z_2(\sigma)) \leqslant H(\theta_3,\psi_3,z_2(\sigma_0)) \leqslant H(\alpha,\psi_3,z_2(\sigma_0)) = z_3(\sigma_0).$$

Аналогично доказываем, что $z_k(\sigma) \leqslant z_k(\sigma_0)$ для любых натуральных k; кроме того, в силу леммы 1 имеет место $z_k(\sigma) = H(\theta_k,\psi_k,z_{k-1}(\sigma)) > 0$. Таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k(\sigma) = \lim\limits_{k\to\infty} z_k(\sigma_0) = 0$. Из леммы 1 также следует, что для всех $t \in [\tau_{k-1}(\sigma),\tau_k(\sigma))$, $k = 1,2,\dots$, выполнено неравенство $0 < z(t,\sigma,z_0) \leqslant z_{k-1}(\sigma)$, поэтому $\lim\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma,z_0) = 0$ для каждого $\sigma \in \Sigma$ и любого $z_0 \geqslant 0$. □

В теореме 1 получены условия вырождения популяции с вероятностью единица в случае, когда уравнение $H(\beta,\psi,z) = z$ не имеет положительных решений для любых $\psi \in \Psi$. Относительно решений уравнения $H(\alpha,\psi,z) = z$ предполагаем только, что для каждого фиксированного $\psi \in \Psi$ число таких решений конечное, при этом количество положительных решений может быть произвольным и различным для разных значений $\psi \in \Psi$.

Теорема 1. *Предположим, что имеют место следующие свойства:*

1) *для всех* $(t,\psi,z)\in[\alpha,\beta]\times\Psi\times(0,\infty)$ *выполнено неравенство* $H(t,\psi,z)<H'_z(t,\psi,0)z$;

2) *существует* $\theta^*\in(\alpha,\beta]$ *такое, что* $\mu([\theta^*,\beta])>1/2$, *для каждого* $\psi\in\Psi$ *уравнение* $H(\theta^*,\psi,z)=z$ *не имеет положительных решений и справедливо неравенство*

$$\sup_{\psi\in\Psi}H'_z(\theta^*,\psi,0)\cdot\sup_{\psi\in\Psi}H'_z(\alpha,\psi,0)\leqslant 1. \tag{2.4}$$

Тогда популяция, динамика развития которой задана моделью (2.1), *вырождается с вероятностью единица, то есть существует множество* $\Sigma_0\subseteq\Sigma$ *такое, что* $\mu(\Sigma_0)=1$ *и* $\lim\limits_{t\to\infty}z(t,\sigma,z_0)=0$ *для всех* $\sigma\in\Sigma_0$ *и любого* $z_0\geqslant 0$.

Доказательство. Для любого $\sigma\in\Sigma$ рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{\zeta_k(\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$, где $\zeta_k(\sigma)=1$, если $\theta_k\in[\alpha,\theta^*)$ и $\zeta_k(\sigma)=-1$, если $\theta_k\in[\theta^*,\beta]$. Из второго условия теоремы следует, что

$$\mu(\zeta_k(\sigma)=-1)=\mu([\theta^*,\beta])>\frac{1}{2},\quad \mu(\zeta_k(\sigma)=1)=\mu([\alpha,\theta^*))<\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим также последовательность $\{S_k(\sigma)\}_{k=0}^{\infty}$, где $S_0(\sigma)=0$, $S_k(\sigma)=\zeta_1(\sigma)+\ldots+\zeta_k(\sigma)$, которая является случайным блужданием по целочисленным точкам прямой, тогда из неравенства $\mu(\zeta_k(\sigma)=-1)>1/2$ следует, что с вероятностью единица случайное блуждание уходит в $-\infty$ (см. [9, с. 154]). Это означает, что существует множество $\Sigma_0\subset\Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0)=1$ и $\lim\limits_{k\to\infty}S_k(\sigma)=-\infty$ для всех $\sigma\in\Sigma_0$.

Если уравнение $H(\alpha,\psi,z)=z$ не имеет положительных решений для всех $\psi\in\Psi$, то в силу леммы 2 равенство $\lim\limits_{t\to\infty}z(t,\sigma,z_0)=0$ выполнено для всех $\sigma\in\Sigma$, $z_0\geqslant 0$. Далее рассматриваем случай, когда существует множество $\Psi_+\subseteq\Psi$ такое, что для каждого $\psi\in\Psi_+$ уравнение $H(\alpha,\psi,z)=z$ имеет положительные решения. Напомним, что через $\widetilde{z}(\alpha,\psi)$ мы обозначаем наибольшее решение уравнения $H(\alpha,\psi,z)=z$, тогда $\widetilde{z}(\alpha,\psi)>0$ при всех $\psi\in\Psi_+$.

Пусть $c=\sup\limits_{\psi\in\Psi}H'_z(\alpha,\psi,0)$. Из первого условия теоремы следует, что если $\psi\in\Psi_+$, то

$$\widetilde{z}(\alpha,\psi)=H(\alpha,\psi,\widetilde{z}(\alpha,\psi))<H'_z(\alpha,\psi,0)\widetilde{z}(\alpha,\psi)\leqslant c\widetilde{z}(\alpha,\psi),$$

поэтому $c>1$. Каждой точке $z_0>0$ поставим в соответствие последовательность случайных величин $\{y_k(\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$, где $y_0(\sigma)=z_0$, $y_k(\sigma)=c^{\zeta_k(\sigma)}y_{k-1}$, $k=1,2,\ldots$. Тогда

$$y_k(\sigma)=c^{\zeta_1(\sigma)+\ldots+\zeta_k(\sigma)}z_0=c^{S_k(\sigma)}z_0,$$

следовательно, если $\lim\limits_{k\to\infty}S_k(\sigma)=-\infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty}y_k(\sigma)=0$.

Расмотрим последовательность $\{z_k(\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$, заданную равенством (2.3), и покажем, что при выполнении условий леммы справедливы неравенства $z_k(\sigma)<y_k(\sigma)$, где $k=1,2,\ldots$. Если $\theta_1\in[\alpha,\theta^*)$, то $\zeta_1(\sigma)=1$, функция $t\to H(t,\psi,z)$ убывает, поэтому для любого $\psi_1\in\Psi$ имеем

$$z_1(\sigma)=H(\theta_1,\psi_1,z_0)\leqslant H(\alpha,\psi_1,z_0)<H'_z(\alpha,\psi_1,0)z_0\leqslant c^{\zeta_1(\sigma)}z_0=y_1(\sigma).$$

Если $\theta_1\in[\theta^*,\beta]$, то $\zeta_1(\sigma)=-1$, тогда из (2.4) получаем

$$z_1(\sigma)=H(\theta_1,\psi_1,z_0)\leqslant H(\theta^*,\psi_1,z_0)<H'_z(\theta^*,\psi_1,0)z_0\leqslant\frac{z_0}{\sup\limits_{\psi\in\Psi}H'_z(\alpha,\psi,0)}=c^{\zeta_1(\sigma)}z_0=y_1(\sigma).$$

Далее, если $\theta_2\in[\alpha,\theta^*)$, то $\zeta_2(\sigma)=1$, следовательно,

$$z_2(\sigma)=H(\theta_2,\psi_2,z_1(\sigma))\leqslant H(\alpha,\psi_2,z_1(\sigma))<H'_z(\alpha,\psi_2,0)z_1(\sigma)<$$
$$<H'_z(\alpha,\psi_2,0)y_1(\sigma)=c^{\zeta_2(\sigma)}y_1(\sigma)=y_2(\sigma).$$

Аналогично можно показать, что $z_2(\sigma) < y_2(\sigma)$ при $\theta_2 \in [\theta^*, \beta]$, а также что неравенство $0 < z_k(\sigma) < y_k(\sigma)$ верно для всех $k = 1, 2, \ldots$. Таким образом, если $\sigma \in \Sigma_0$, то для последовательности $\{z_k(\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$ выполнено равенство $\lim\limits_{k\to\infty} z_k(\sigma) = 0$, из которого следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} z(t, \sigma, z_0) = 0$ для всех $\sigma \in \Sigma_0$, $z_0 > 0$. □

В следующей теореме также получены условия вырождения популяции, выполненные с вероятностью единица, но в отличие от предыдущей, здесь нельзя утверждать, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство $\lim\limits_{t\to\infty} z(t, \sigma, z_0) = 0$. Отметим, что популяция вырождается и при более слабых условиях — для этого достаточно, чтобы в некоторый момент времени t_* размер популяции оказался меньше критического значения $z_* > 0$, при котором дальнейшее восстановление ее численности невозможно.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $H'_z(t, \psi, \widetilde{z}(t, \psi)) < 1$ *для каждого* $t \in [\alpha, \beta]$, $\psi \in \Psi$ *и* $\sup\limits_{\psi\in\Psi} \widetilde{z}(\alpha, \psi) < \infty$;

2) *существуют* $\theta^* \in (\alpha, \beta)$ *и множество* $\Psi^* \subseteq \Psi$ *такие, что* $G(\theta^*) < 1$, $\mu(\Psi^*) > 0$ *и для каждого* $\psi \in \Psi^*$ *уравнение* $H(\theta^*, \psi, z) = z$ *не имеет положительных решений.*

Тогда существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ *такое, что* $\mu(\Sigma_0) = 1$ *и для любых* $z_* > 0$, $z_0 > 0$ *и* $\sigma \in \Sigma_0$ *найдется такое* $t_* = t_*(z_*, \sigma, z_0)$, *что* $z(t_*, \sigma, z_0) < z_*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\bar{z}(\alpha) = \sup\limits_{\psi\in\Psi} \widetilde{z}(\alpha, \psi)$. Отметим, что $\bar{z}(\alpha) = 0$ только в том случае, когда уравнение $H(\alpha, \psi, z) = z$ не имеет положительных решений для каждого $\psi \in \Psi$; поэтому, если $\bar{z}(\alpha) = 0$, в силу леммы 2 равенство $\lim\limits_{t\to\infty} z(t, \sigma, z_0) = 0$ справедливо для всех $\sigma \in \Sigma$, то есть утверждение теоремы заведомо выполнено. Далее рассмотрим случай, когда $\bar{z}(\alpha) > 0$, и покажем, что с вероятностью единица начиная с некоторого момента времени $\tau_r = \tau_r(\sigma, z_0)$ для всех решений уравнения (2.1) выполнено неравенство $0 < z(t, \sigma, z_0) \leqslant \bar{z}(\alpha)$.

Рассмотрим события A_k, состоящие в том, что $(\theta_k, \psi_k) \in [\theta^*, \beta] \times \Psi^*$, $k = 1, 2, \ldots$. Случайные величины $\theta_1, \theta_2, \ldots$ и $\psi_1, \psi_2, \ldots$ независимы, поэтому события A_k независимы и при $k \geqslant 2$ имеют одинаковые вероятности $\mu(A_k) = (1 - G(\theta^*))\mu(\Psi^*) > 0$. В силу леммы 1 уравнение $H(t, \psi, z) = z$ не имеет положительных решений для всех $t \in [\theta^*, \beta]$, $\psi \in \Psi^*$, поэтому, если происходят только события A_k, при любом начальном условии z_0 решение $z(t, \sigma, z_0)$ асимптотически стремится к нулю. Если, наоборот, события A_k никогда не происходят, то решение $z(t, \sigma, z_0)$ либо стремится к значению $\widetilde{z}(\alpha, \psi) \leqslant \bar{z}(\alpha)$ при $t \to \infty$ (например, в случае, когда $\theta_k = \alpha$, $\psi_k = \psi$ для всех $k = 1, 2, \ldots$), либо в силу леммы 1 достигает значения, меньшего $\bar{z}(\alpha)$. Известно, что если события A_k взаимно независимы и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ расходится, то с вероятностью единица осуществится бесконечно много событий A_k (см. [10, с. 216]). Это означает, что при любом начальном условии $z_0 > 0$ неравенство $0 < z(t, \sigma, z_0) \leqslant \bar{z}(\alpha)$ будет выполнено после осуществления определенного числа событий A_k, то есть в некоторый момент времени τ_r, $r \geqslant k$. Отметим, что если неравенство $0 < z(t, \sigma, z_0) \leqslant \bar{z}(\alpha)$ выполнено при некотором $t = \tau_r$, то оно верно для всех $t \geqslant \tau_r$. Действительно, если $0 < z(\tau_r, \sigma, z_0) \leqslant \bar{z}(\alpha)$, то при $t \in (\tau_r, \tau_{r+1})$ имеет место неравенство $0 < z(t, \sigma, z_0) < z(\tau_r, \sigma, z_0) \leqslant \bar{z}(\alpha)$. Далее,

$$0 < z(\tau_{r+1}, \sigma, z_0) = H(\theta_r, \psi_r, z(\tau_r, \sigma)) \leqslant H(\alpha, \psi_r, z(\tau_r, \sigma)) \leqslant H(\alpha, \psi_r, \bar{z}(\alpha)) \leqslant \bar{z}(\alpha).$$

Таким же образом показываем, что $0 < z(t, \sigma, z_0) \leqslant \bar{z}(\alpha)$ для всех $t \geqslant \tau_{r+1}$.

Рассмотрим решение $z(t, \sigma, z_0)$ уравнения (2.1) при $t \geqslant \tau_r$, тогда $0 < z(t, \sigma, z_0) \leqslant \bar{z}(\alpha)$. Пусть задано $z_* > 0$. Обозначим через s такое число, что после последовательного осуществления s событий A_k для решения $z(t, \sigma, z_0)$, удовлетворяющего условию $z(t, \sigma, z_0) \leqslant \bar{z}(\alpha)$, будет выполнено неравенство $z(t, \sigma, z_0) < z_*$, то есть размер популяции окажется ниже предельно допустимого уровня. Такое число s существует, поскольку, если происходят только события A_k, решение $z(t, \sigma, z_0)$ асимптотически стремится к нулю. Введем в рассмотрение события

$$B_1 = A_{r+1} \cap \ldots \cap A_{r+s}, \quad B_2 = A_{r+s+1} \cap \ldots \cap A_{r+2s}, \quad \ldots, \quad r \geqslant 1.$$

Пусть $p = \mu(A_k) > 0$, $k = 2, 3, \ldots$. Из независимости событий A_k следует, что события B_k независимы и $\mu(B_k) = p^s > 0$, поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$ расходится и с вероятностью единица осуществится хотя бы одно из этих событий, то есть размер популяции будет меньше заданного значения $z_* > 0$ в некоторый момент времени $t_* = t_*(z_*, \sigma)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $H'_z(t, \psi, \widetilde{z}(t, \psi)) < 1$ *для каждого* $t \in [\alpha, \beta]$, $\psi \in \Psi$ *и* $\sup\limits_{\psi \in \Psi} \widetilde{z}(\alpha, \psi) < \infty$;

2) *существуют* $\theta^* \in (\alpha, \beta)$ *и множество* $\Psi_* \subseteq \Psi$ *такие, что* $G(\theta^*) < 1$, $\mu(\Psi_*) > 0$ *и для всех* $\psi \in \Psi_*$ *выполнены неравенства* $\widetilde{z}(\theta^*, \psi) < z_*$.

Тогда существует $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ *такое, что* $\mu(\Sigma_0) = 1$ *и для любых* $\sigma \in \Sigma_0$, $z_0 \geqslant 0$ *найдется такое* $t_* = t_*(z_*, \sigma, z_0)$, *что* $z(t_*, \sigma, z_0) < z_*$.

Доказательство. В силу леммы 1 при $t > \alpha$ выполнено неравенство $\widetilde{z}(t, \psi) < \widetilde{z}(\alpha, \psi)$. Поэтому, так же как в теореме 2, можно показать, что с вероятностью единица начиная с некоторого момента времени $t_1 = t_1(\sigma, z_0)$ для каждого решения $z(t, \sigma, z_0)$ уравнения (2.1) выполнено неравенство $0 < z(t, \sigma, z_0) \leqslant \bar{z}(\alpha)$. Дальнейшее доказательство повторяет доказательство теоремы 2. □

Обозначим через $\widehat{z}(\beta, \psi)$ минимальное положительное решение уравнения $H(\beta, \psi, z) = z$ (если такого решения не существует, положим $\widehat{z}(\beta, \psi) = 0$). В следующем утверждении приведены условия, при которых популяция не вырождается, то есть ее размер все время превосходит критическое значение $z_* > 0$. Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

Лемма 3. *Пусть задано* $z_* > 0$. *Если* $\inf\limits_{\psi \in \Psi} \widehat{z}(\beta, \psi) > z_*$, $z_0 > z_*$ *и* $H'_z(\beta, \psi, \widehat{z}(\beta, \psi)) < 1$ *для всех* $\psi \in \Psi$, *то неравенство* $z(t, \sigma, z_0) > z_*$ *выполнено для всех* $t \geqslant 0$, $\sigma \in \Sigma$.

Отметим, что в модели, заданной уравнением (2.1), существуют и другие динамические режимы развития. Например, рассмотрим случай, когда уравнение $H(t, \psi, z) = z$ для каждой пары $(t, \psi) \in [\alpha, \beta] \times \Psi$ имеет ровно одно положительное решение $\widehat{z}(t, \psi)$ такое, что $H'_z(t, \psi, \widehat{z}(t, \psi)) > 1$. Тогда $\lim\limits_{t \to +\infty} z(t, \sigma, z_0) = +\infty$, если $z_0 \geqslant \sup\limits_{\psi \in \Psi} \widehat{z}(\beta, \psi)$, и $\lim\limits_{t \to +\infty} z(t, \sigma, z_0) = 0$, если $z_0 \leqslant \inf\limits_{\psi \in \Psi} \widehat{z}(\alpha, \psi)$. Если же $z_0 \in \Big(\inf\limits_{\psi \in \Psi} \widehat{z}(\alpha, \psi), \sup\limits_{\psi \in \Psi} \widehat{z}(\beta, \psi)\Big)$, то решение $z(t, \sigma, z_0)$ с вероятностью единица либо уходит на бесконечность, либо стремится к нулю, причем вероятности того, что $z(t, \sigma, z_0) \to +\infty$ при $t \to \infty$, и того, что $z(t, \sigma, z_0) \to 0$ при $t \to \infty$, зависят от начального размера популяции z_0.

§ 3. Условия вырождения популяции для управляемых моделей с типовой, возрастной или половой структурой

Результаты этого параграфа получены совместно с Я. Ю. Лариной.

3.1. Управляемая система, описывающая развитие популяции

Исследуются условия вырождения с вероятностью единица для популяции, динамика развития которой задана управляемой системой

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(h^t\sigma, x, u), \quad t \neq \tau_k(\sigma), \\ \Delta x\big|_{t=\tau_k(\sigma)} &= g(x, w), \quad (t, \sigma, x, u, w) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p, \end{aligned} \tag{3.1}$$

порожденной метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$, построенной в первом параграфе. Управляемая система (3.1) описывает развитие популяции с типовой, возрастной, половой структурой или популяции, в которой есть особи разных типов и различных возрастных классов (см., например, [1, с. 68–76], [2]). В качестве допустимых управлений $u(t,\sigma)$ берем всевозможные ограниченные измеримые функции со значениями в множестве $U \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, вектор w также является управляющим воздействием, влияющим на поведение системы в моменты времени $t = \tau_k(\sigma)$, и принимает значения в множестве $W \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^p)$. Предполагаем, что функция $g(x,w)$ непрерывна по совокупности переменных, $g(0,w) = 0$; для каждого $\sigma \in \Sigma$ функция $(t,x,u) \to f(h^t\sigma,x,u)$ непрерывна, решения системы (3.1) непрерывны слева.

Относительно решений системы (3.1) также требуем, чтобы они были неотрицательными при неотрицательных начальных условиях. Для системы $\dot{x} = f(t,x)$ это требование выполнено тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет условию квазиположительности (см., например, [11, с. 34]). Сформулируем подобное условие для системы с импульсным воздействием (3.1). Обозначим $\mathbb{R}^n_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$.

Определение 1. Будем говорить, что функции $f(h^t\sigma,x,u)$ и $g(x,w)$ *удовлетворяют условию квазиположительности,* если для любых $(t,\sigma,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Sigma \times \mathbb{R}^n_+$ и любых допустимых управлений имеют место неравенства

$$f_i(h^t\sigma, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.2}$$

$$x_i + g_i(x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_p) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Пусть $x(t,\sigma,x_0)$ — решение системы $\dot{x} = f(h^t\sigma,x,u)$, удовлетворяющее начальному условию $x(0,\sigma,x_0) = x_0$. Если выполнено неравенство (3.2) и $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$, то $x(t,\sigma,x_0) \in \mathbb{R}^n_+$ для всех $t \geqslant 0$ (см. [11, с. 34]). Неравенство (3.3) обеспечивает неотрицательность решений системы с импульсным воздействием (3.1).

Следуя А. Ф. Филиппову, поставим в соответствие системе (3.1) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma,x), \quad F(\sigma,x) = \mathrm{co}\,\widetilde{F}(\sigma,x), \tag{3.4}$$

где для каждой фиксированной точки $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ множество $\widetilde{F}(\sigma,x)$ состоит из всех предельных значений функции $(t,x) \to f\big(h^t\sigma,x,U\big)$ при $(t_i,x_i) \to (0,x)$. Далее, запись $\mathrm{co}\,\widetilde{F}(\sigma,x)$ означает замыкание выпуклой оболочки множества $\widetilde{F}(\sigma,x)$. В данной работе рассматриваем дифференциальное включение (3.4), которое имеет компактные образы, то есть предполагаем, что при фиксированных (σ,x) множество $F(\sigma,x)$ выпукло и компактно; также предполагаем, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ функция $(t,x) \to F(h^t\sigma,x)$ полунепрерывна сверху. Тогда для любого $\sigma \in \Sigma$ существует локальное решение задачи Коши $\dot{x} \in F(h^t\sigma,x)$, $x(0) = x_0$ (см. [15, с. 213]).

Определение 2. Скалярная функция $V(\sigma,x)$ переменных $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ называется *функцией Ляпунова* (см. [12, с. 235]), если она удовлетворяет локальному условию Липшица и является положительно определенной. Это означает, что существует непрерывная скалярная функция $\widetilde{V}(x)$ такая, что для всех $\sigma \in \Sigma$ имеют место соотношения

$$V(\sigma,x) \geqslant \widetilde{V}(x) > 0 \text{ при } |x| \neq 0, \quad V(\sigma,0) = \widetilde{V}(0) = 0.$$

Функция $V(\sigma,x)$ называется *бесконечно большой*, если для каждого $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(\sigma,x) = +\infty$.

Определение 3. Для локально липшицевой функции $V(\sigma,x)$ *обобщенной производной* в точке $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $d \in \mathbb{R}^n$ (производной Ф. Кларка) называется следующий предел (см. [13, с. 17]):

$$V^o(\sigma,x;d) \doteq \limsup_{(\vartheta,y,\varepsilon)\to(\sigma,x,+0)} \frac{V(h^\varepsilon\vartheta, y+\varepsilon d) - V(\vartheta,y)}{\varepsilon},$$

а выражения $V^o_{\min}(\sigma,x) \doteq \inf\limits_{d\in F(\sigma,x)} V^o(\sigma,x;d)$, $V^o_{\max}(\sigma,x) \doteq \sup\limits_{d\in F(\sigma,x)} V^o(\sigma,x;d)$ называются *нижней* и *верхней производными* функции V в силу дифференциального включения (3.4).

3.2. Различные условия вырождения популяции

В следующих утверждениях получены условия вырождения с вероятностью единица для популяции, развитие которой задано управляемой системой (3.1).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1, 2 *теоремы* 1. *Предположим, что существуют множество* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ *такое, что* $\mu(\Sigma_0) = 1$, *и функции* $V(\sigma, x) = V(x)$, $q(\sigma, z)$, $L(z)$ *такие, что* $V(x)$ *является бесконечно большой функцией Ляпунова и для всех* $(\sigma, x) \in \Sigma_0 \times \mathbb{R}^n_+$ *выполнены неравенства*

$$V^o_{\max}(\sigma, x) \leqslant q\big(\sigma, V(x)\big), \quad \max_{w \in W} V\big(x + g(x, w)\big) \leqslant L\big(V(x)\big). \tag{3.5}$$

Тогда для любого решения $\varphi(t, \sigma, x)$ *системы* (3.1), *удовлетворяющего начальному условию* $\varphi(0, \sigma, x) = x \in \mathbb{R}^n_+$, *с вероятностью единица имеет место равенство* $\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t, \sigma, x)| = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ и для каждого $x \in \mathbb{R}^n_+$ обозначим через $\varphi(t, \sigma, x)$ решение управляемой системы (3.1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, \sigma, x) = x$ и определенное на некотором промежутке $[0, \tau)$. Рассмотрим функцию $v(t, \sigma) = V\big(\varphi(t, \sigma, x)\big)$, которая в силу теоремы Радемахера дифференцируема при почти всех $t \in [0, \tau)$. В точках дифференцируемости функции $v(t, \sigma)$ выполнено неравенство (см. [14])

$$\dot{v}(t, \sigma) \leqslant V^o_{\max}\big(h^t\sigma, \varphi(t, \sigma, x)\big),$$

поэтому, учитывая (3.5), имеем при всех $t \in [0, \tau)$ неравенство $\dot{v}(t, \sigma) \leqslant q(h^t\sigma, v(t, \sigma))$, которое верно, поскольку $\varphi(t, \sigma, x) \in \mathbb{R}^n_+$ (последнее включение следует из условия квазиположительности функций $f(h^t\sigma, x, u)$ и $g(x, w)$). Обозначим через $z(t, \sigma)$ решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальному условию $z(0, \sigma) = v(0, \sigma) = V(x)$; это решение бесконечно продолжаемо вправо, поскольку его можно продолжить на любой промежуток $[\tau_k(\sigma), \tau_{k+1}(\sigma))$, $k = 0, 1, \ldots$ (см. доказательство леммы 1). В силу теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах неравенство $v(t, \sigma) \leqslant z(t, \sigma)$ верно при всех $t \in [0, \min\{\tau, \tau_1(\sigma)\})$. Далее, если $\tau > \tau_1(\sigma)$, то из второго неравенства (3.5) следует, что для любого $w \in W$ выполнено

$$\begin{aligned} v(\tau_1 + 0, \sigma) = V\big(\varphi(\tau_1 + 0, \sigma, x)\big) = V\big(\varphi(\tau_1, \sigma, x) + g(\varphi(\tau_1, \sigma, x), w)\big) \leqslant \\ \leqslant L\big(V(\varphi(\tau_1, \sigma, x))\big) = L(v(\tau_1, \sigma)). \end{aligned}$$

Далее, из равенства $z(\tau_1 + 0, \sigma) = z(\tau_1, \sigma) + \ell(z(\tau_1, \sigma)) = L(z(\tau_1, \sigma))$ следует неравенство $v(\tau_1 + 0, \sigma) \leqslant z(\tau_1 + 0, \sigma)$. Продолжая подобные рассуждения, можно показать, что неравенство $v(t, \sigma) \leqslant z(t, \sigma)$ верно для всех $t \in [0, \tau)$, и поскольку функция $V(x)$ является функцией Ляпунова, то для всех $t \in [0, \tau)$ имеет место неравенство $0 \leqslant v(t, \sigma) \leqslant z(t, \sigma)$.

Покажем, что при выполнении условий теоремы рассматриваемое решение $\varphi(t, \sigma, x)$ бесконечно продолжаемо вправо. Предположим, что это не так и $\varphi(t, \sigma, x)$ определено на промежутке $[0, \tau)$, где $\tau \neq +\infty$, тогда $|\varphi(t, \sigma, x)| \to \infty$ при $t \to \tau - 0$. Поскольку $V(x)$ является бесконечно большой функцией Ляпунова, то

$$\lim_{t\to\tau-0} v(t, \sigma) = \lim_{|\varphi(t,\sigma,x)|\to\infty} V\big(\varphi(t, \sigma, x)\big) = +\infty,$$

что противоречит неравенству $v(t, \sigma) \leqslant z(t, \sigma)$.

В силу теоремы 1 существует множество $\widetilde{\Sigma}_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\widetilde{\Sigma}_0) = 1$ и $z(t, \sigma) \to 0$ при $t \to \infty$ для всех $\sigma \in \widetilde{\Sigma}_0$; поэтому из неравенства $0 \leqslant v(t, \sigma) \leqslant z(t, \sigma)$ получаем, что

$$\lim_{t\to\infty} v(t, \sigma) = \lim_{t\to\infty} V\big(\varphi(t, \sigma, x)\big) = 0$$

для всех $\sigma \in \Sigma_0 \cap \widetilde{\Sigma}_0$. Отсюда следует, что $|\varphi(t, \sigma, x)| \to 0$ при $t \to \infty$ с вероятностью единица (это доказано в [12, с. 242–243]).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* 1, 2 *теоремы* 2. *Предположим, что существуют множество* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ *такое, что* $\mu(\Sigma_0) = 1$, *и функции* $V(x)$, $q(\sigma, z)$, $L(z)$ *такие, что* $V(x)$ *является бесконечно большой функцией Ляпунова и для всех* $(\sigma, x) \in \Sigma_0 \times \mathbb{R}^n_+$ *выполнены неравенства* (3.5). *Тогда для любого* $x_* > 0$ *найдется такое* $t_* = t_*(x_*, \sigma)$, *что* $|\varphi(t_*, \sigma, x)| < x_*$ *с вероятностью единица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sigma \in \Sigma_0$, $\varphi(t, \sigma, x)$ — решение управляемой системы (3.1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, \sigma, x) = x$, где $x \in \mathbb{R}^n_+$, $z(t, \sigma)$ — решение уравнения (2.1) с начальным условием $z(0, \sigma) = v(0, \sigma) = V(x)$. Рассмотрим функцию $v(t, \sigma) = V\big(\varphi(t, \sigma, x)\big)$, тогда, как доказано в теореме 4, $v(t, \sigma) \leqslant z(t, \sigma)$ для всех $t \in [0, \infty)$ и решение $\varphi(t, \sigma, x)$ бесконечно продолжаемо вправо. Если выполнены условия 1, 2 теоремы 2, то для любого $z_* > 0$ найдется такое $t_* = t_*(z_*, \sigma)$, что $z(t_*, \sigma) < z_*$ с вероятностью единица. Следовательно,

$$v(t_*, \sigma) = V\big(\varphi(t_*, \sigma, x)\big) \leqslant x(t_*, \sigma) < z_*. \tag{3.6}$$

Пусть $z_* = \inf \widetilde{V}(x) > 0$ при $|x| \geqslant x_* > 0$. Покажем, что из неравенства (3.6) следует, что $|\varphi(t_*, \sigma, x)| < x_*$. Действительно, если $|\varphi(t_*, \sigma, x)| \geqslant x_*$, то

$$z_* > V\big(\varphi(t_*, \sigma, x)\big) \geqslant \widetilde{V}\big(\varphi(t_*, \sigma, x)\big) \geqslant z_*,$$

что невозможно.

3.3. Управление популяцией, приводящее ее к вырождению

В следующих утверждениях получены условия существования управления, приводящего популяцию к вырождению с вероятностью единица (здесь может рассматриваться популяция вредных насекомых, вирусов или бактерий).

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* 1, 2 *теоремы* 1. *Предположим, что существуют множество* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ *такое, что* $\mu(\Sigma_0) = 1$, *и функции* $V(x)$, $q(\sigma, z)$, $L(z)$ *такие, что* $V(x)$ *является бесконечно большой функцией Ляпунова и для всех* $(\sigma, x) \in \Sigma_0 \times \mathbb{R}^n_+$ *выполнены неравенства*

$$V^o_{\min}(\sigma, x) \leqslant q\big(\sigma, V(\sigma, x)\big), \quad \min_{w \in W} V\big(x + g(x, w)\big) \leqslant L\big(V(x)\big). \tag{3.7}$$

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n_+$ *с вероятностью единица существует решение* $\varphi(t, \sigma, x)$ *управляемой системы* (3.1), *удовлетворяющее начальному условию* $\varphi(0, \sigma, x) = x$, *для которого имеет место равенство* $\lim\limits_{t \to \infty} |\varphi(t, \sigma, x)| = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы А.Ф. Филиппова [15, с. 213] и теоремы 2 работы [16] существует решение $\varphi(t, \sigma, x)$ управляемой системы (3.1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, \sigma, x) = x$, такое, что функция $v(t, \sigma) = V\big(\varphi(t, \sigma, x)\big)$ удовлетворяет неравенству $\dot{v}(t, \sigma) \leqslant q(h^t\sigma, v(t, \sigma))$. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 4. $\square$

Аналогично предыдущим утверждениям получаем также следующий результат.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* 1, 2 *теоремы* 2. *Предположим, что существуют множество* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ *такое, что* $\mu(\Sigma_0) = 1$, *и функции* $V(x)$, $q(\sigma, z)$, $L(z)$ *такие, что* $V(x)$ *является бесконечно большой функцией Ляпунова и для всех* $(\sigma, x) \in \Sigma_0 \times \mathbb{R}^n_+$ *выполнены неравенства* (3.7). *Тогда с вероятностью единица существует решение* $\varphi(t, \sigma, x)$ *системы* (3.1) *такое, что для любых* $x_* > 0$ *и* $\sigma \in \Sigma_0$ *найдется* $t_* = t_*(x_*, \sigma)$, *для которого выполнено неравенство* $|\varphi(t_*, \sigma, x)| < x_*$.

МАТЕМАТИКА 2013. Вып. 4

§ 4. Управление численностью двуполой популяции, приводящее ее к вырождению с вероятностью единица

Для исследования динамики изолированной популяции будем использовать вероятностную дискретно-непрерывную модель, которая является обобщением детерминированной модели, описанной в работе [2]. Пусть $x_1(t)$ — численность мужских и $x_2(t)$ — численность женских особей в момент времени t удовлетворяют следующей управляемой системе:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -(a_1+u_1)x_1 - b_1x_1(x_1+\gamma x_2), \quad t \neq \tau_k(\sigma), \\ \dot{x_2} &= -(a_2+u_2)x_2 - b_2x_2(x_1+\gamma x_2), \quad t \neq \tau_k(\sigma), \\ \Delta x_1\big|_{t=\tau_k(\sigma)} &= w_1D - x_1, \quad \Delta x_2\big|_{t=\tau_k(\sigma)} = w_2D - x_2, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где a_1, a_2 — коэффициенты естественной гибели мужских и женских особей, b_1, b_2 — коэффициенты саморегуляции. Коэффициент γ отражает неравнозначность «вклада» особей различных полов в процесс саморегуляции, все указанные выше коэффициенты положительные. Далее, u_1, u_2 — управления, влияющие на коэффициенты естественной гибели и удовлетворяющие ограничениям $u_1 \in [u_1^1, u_1^2]$, $u_2 \in [u_2^1, u_2^2]$, где $u_1^1 + a_1 > 0$, $u_2^1 + a_2 > 0$. Величина

$$D = \min\{x_2(\tau_k), \varepsilon x_1(\tau_k)\}$$

равна численности оплодотворенных самок в момент $\tau_i(\sigma)$, где ε — «коэффициент активности» самцов, который отражает не только их потенциальные возможности, но и характер взаимодействия особей различных полов. В частности, если все особи строго разбиваются на пары, то $\varepsilon = 1$. Величины w_1, w_2 равны среднему числу потомков мужского и женского полов соответственно, порождаемых одной оплодотворенной самкой; будем считать, что этими величинами можно управлять так, что $w_1 \in [w_1^1, w_1^2]$, $w_2 \in [w_2^1, w_2^2]$, где $w_1^1 > 0$, $w_2^1 > 0$. Не уменьшая общности, полагаем $\varepsilon = 1$. Предполагаем, что моменты τ_k зависят от различных погодных и экологических условий, поэтому длины интервалов между моментами появления новой генерации $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$, $k = 2, 3, \ldots$, являются независимыми случайными величинами с распределением $G(t)$, которое сосредоточено на отрезке $[\alpha, \beta]$, где $0 < \alpha < \beta < \infty$. В [2] отмечено, что анализ динамики численности двуполой популяции является важной задачей как с теоретической, так и с практической позиции. Например, существуют различные методы управления численностью вредных видов насекомых, ориентированные на создание определенного дисбаланса в половой структуре популяции, что способствует снижению скорости ее размножения и нередко приводит к вырождению.

В качестве функции Ляпунова возьмем функцию $V(x) = |x_1| + |x_2|$, тогда $V(x) = x_1 + x_2$ при $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Найдем

$$V^o_{\min}(x) = -(a_1+u_1^2)x_1 - b_1x_1(x_1+\gamma x_2) - (a_2+u_2^2)x_2 - b_2x_2(x_1+\gamma x_2),$$

тогда имеет место неравенство

$$V^o_{\min}(x) \leqslant -V(x)\big(aV(x)+b\big),$$

где $a = \min\big(b_1, \gamma b_2, \dfrac{\gamma b_1 + b_2}{2}\big) > 0$, $b = \min(a_1+u_1^2, a_2+u_2^2) > 0$. Далее,

$$\min_{w\in W} V(x+g(x,w)) = \min_{w_1,w_2}(w_1+w_2)D = (w_1^1+w_2^1)\min(x_1,x_2) \leqslant \frac{w_1^1+w_2^1}{2}V(x).$$

Таким образом, неравенства (3.7) выполнены для функций

$$V(x) = x_1+x_2, \quad q(\sigma,z) = -z(az+b), \quad L(z) = cz, \quad \text{где} \quad c = \frac{w_1^1+w_2^1}{2}.$$

По данным функциям составим дифференциальное уравнение

$$\dot{z} = -z(az+b), \quad t \neq \tau_k(\sigma), \quad \Delta z\big|_{t=\tau_k(\sigma)} = (c-1)z, \tag{4.2}$$

параметризованное метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$, построенной в § 1. Несложно посчитать, что если $c \in (0,1]$, то размер популяции, заданной уравнением (4.2) (следовательно, и системой (4.1)), асимптотически стремится к нулю, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $c > 1$.

Предположим, что случайные величины θ_k, $k = 2, 3, \ldots$, имеют равномерное распределение на отрезке $[\alpha, \beta] = \left[\dfrac{\ln c}{2b}, \dfrac{3\ln c}{b}\right]$. На каждом интервале (τ_k, τ_{k+1}) решением уравнения (4.2) является функция

$$z(t) = \frac{bz_k}{az_k(e^{b(t-\tau_k)}-1)+be^{b(t-\tau_k)}},$$

где $z_k = z(\tau_k+) = \lim\limits_{t\to\tau_k+0} z(t)$. Построим функцию

$$H(t,z) = \frac{bcz}{az(e^{bt}-1)+be^{bt}}$$

и найдем решения уравнения $H(t,z) = z$ для различных значений $t \in [\alpha, \beta]$. Уравнение $H(t,z) = z$ имеет решения $z = 0$ и $z = \bar{z} = \dfrac{b(c-e^{bt})}{a(e^{bt}-1)}$, причем $\bar{z} > 0$ при $t < \dfrac{\ln c}{b}$. Непосредственно проверяется, что неравенство $H(t,z) < H'_z(t,0)z$ выполнено для всех $t \in (0,\infty)$ и $z \in (0,\infty)$. Возьмем $\theta^* = \dfrac{3\ln c}{2b}$, тогда $\mu(\theta_k \in [\theta^*, \beta]) = \dfrac{3}{5}$, уравнение $H(\theta^*, z) = z$ не имеет положительных решений, $H'_z(\alpha, 0) = \sqrt{c}$, $H'_z(\theta^*, 0) = \dfrac{1}{\sqrt{c}}$, следовательно, $H'_z(\theta^*,0)H'_z(\alpha,0) = 1$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1 и в силу теоремы 6 с вероятностью единица найдется решение $\varphi(t,\sigma,x)$ системы (4.1) с начальным условием $\varphi(0,\sigma,x) = x$, для которого $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t,\sigma,x) = 0$.

Теперь рассмотрим случайные величины θ_k, равномерно распределенные на отрезке $[\alpha, \beta]$, где $\alpha = \dfrac{\ln c}{2b}$, $\beta = \dfrac{\ln c}{b} + \varepsilon$, ε — любое положительное число. Значение θ^* можно взять любым из интервала (α, β), тогда $\mu(\theta_k \in [\theta^*, \beta]) > 0$, уравнение $H(\theta^*, z) = z$ не имеет положительных решений и $H'_z(\theta^*, 0) < 1$. В силу теоремы 7 с вероятностью единица существует решение $\varphi(t,\sigma,x)$ системы (4.1) такое, что для любых $x_* > 0$ и $\sigma \in \Sigma_0$ найдется $t_* = t_*(x_*, \sigma)$, для которого $|\varphi(t_*, \sigma, x)| < x_*$.

§ 5. Заключение

В работе разработана вероятностная модель, учитывающая влияние случайных изменений внешней среды на изменение численности популяции. Показано, что для данной модели существует больше динамических режимов развития по сравнению с известными детерминированными моделями, исследованы условия вырождения популяции при любых случайных воздействиях и условия вырождения, выполненные с вероятностью единица. Получены условия, при выполнении которых размер популяции может оказаться меньше предельно допустимого уровня, что также приводит к ее исчезновению. Изучаются вопросы существования управления, приводящего популяцию к вырождению.

Результаты работы могут найти применение в задачах эпидемиологии, борьбы с болезнями растений и вредными насекомыми. Отметим также, что можно исследовать подобную вероятностную модель для популяции, подверженной промыслу, когда моменты промысловых заготовок и размеры этих заготовок являются случайными величинами. Для такой модели представляет интерес следующая задача: найти условия, при которых существуют управляющие воздействия, направленные на увеличение размера популяции и сохранение его на определенном уровне.

МАТЕМАТИКА 2013. Вып. 4

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Недорезов Л.В. Курс лекций по математической экологии. Новосибирск: Сибирский хронограф, 1997. 161 с.
2. Недорезов Л.В., Утюпин Ю.В. Дискретно-непрерывная модель динамики численности двуполой популяции // Сибирский математический журнал. 2003. Т. 44. № 3. С. 650–659.
3. Кащенко С.А. Исследование стационарных режимов дифференциально-разностного уравнения динамики популяции насекомых // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19. № 5. С. 18–34.
4. Нагаев С.В., Недорезов Л.В., Вахтель В.И. Вероятностная непрерывно-дискретная модель динамики численности изолированной популяции // Сибирский журнал индустриальной математики. 1999. Т. 2. № 2 (4). С. 147–152.
5. Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций // Проблемы кибернетики. Вып. 25. М.: Наука, 1972. С. 101–106.
6. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. 384 с.
7. Родина Л.И. Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 2 (40). С. 3–164.
8. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 580 с.
9. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984. 529 с.
11. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Математическое моделирование процессов отбора. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского университета, 2007. 324 с.
12. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
13. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.
14. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.
15. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1985. Т. 169. С. 194–252.
16. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288.

Поступила в редакцию 15.10.2013

Родина Людмила Ивановна, д.ф.-м.н., заведующая кафедрой математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: box0589@udmnet.ru

L. I. Rodina
On some probability models of dynamics of population growth

Keywords: probability models of dynamics of population, probability of degeneration of the population, control systems with random coefficients.

Mathematical Subject Classifications: 34A60, 37N35, 49J15, 93B03

The new probability model is developed such that it is applied to the description of dynamics of growth for the isolated population. The conditions of asymptotical degeneration with probability one for the population which development is given by control system with random coefficients are found, and the conditions for the existence of the control leading population to degeneration are obtained, too. We study the dynamic mode of the development for the population which is on the verge of disappearance; it means that with probability one the size of such population will be less than the minimum critical value after which the biological restoration of the population is impossible. The results of the work are illustrated on an example of development of bisexual population.

REFERENCES

1. Nedorezov L.V. *Kurs lektsii po matematicheskoi ekologii* (Course of lectures on mathematical ecology), Novosibirsk: Sibirskii khronograf, 1997, 161 p.

2. Nedorezov L.V., Utyupin Yu.V. A discrete-continuous model for a bisexual population dynamics, *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 2003, vol. 44, no. 3, pp. 650–659.

3. Kaschenko S.A. Stationary states of a delay differentional equation of insect population's dynamics, *Modelirovanie i Analiz Informatsionnykh Sistem*, 2012, vol. 19, no. 5, pp. 18–34.

4. Nagaev S.V., Nedorezov L.V., Vakhtel' V.I. A probabilistic continuous-discrete model of the dynamics of the size of an isolated population, *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*, 1999, vol. 2, no. 2 (4), pp. 147–152.

5. Kolmogorov A.N. Qualitative study of mathematical models of population dynamics, *Problemy Kibernetiki*, issue 25, Moscow: Nauka, 1972, pp. 101–106.

6. Kornfel'd I.P., Sinai Ya.G., Fomin S.V. *Ergodicheskaya teoria* (The ergodic theory), Moscow: Nauka, 1980, 384 p.

7. Rodina L.I. Invariant and statistically weakly invariant sets of control systems, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2012, no. 2 (40), pp. 3–164.

8. Shiryaev A.N. *Veroyatnost'* (Probability), Moscow: Nauka, 1989, 580 p.

9. Korolyuk V.S., Portenko N.I., Skorokhod A.V., Turbin A.F. *Spravochnik po teorii veroyatnostei i matematicheskoi statistike* (Handbook of probability theory and mathematical statistics), Moscow: Nauka, 1985, 640 p.

10. Feller W. *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley, 1971. Translated under the title *Vvedenie v teoriyu veroyatnostei i ee prilozheniya*, vol. 1, Moscow: Mir, 1984, 529 p.

11. Kuzenkov O.A., Ryabova E.A. *Matematicheskoe modelirovanie protsessov otbora* (Mathematical modeling of processes of selection), Nizhnii Novgorod: Nizhnii Novgorod State University, 2007, 324 p.

12. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical theory of stability), Moscow: Nauka, 1967, 472 p.

13. Clarke F. *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley, 1983. Translated under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow: Nauka, 1988, 300 p.

14. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Invariant and stably invariant sets for differential inclusions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 262, issue 1, pp. 194–212.

15. Blagodatskikh V.I., Filippov A.F. Differential inclusions and optimal control, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 1985, vol. 169, pp. 194–252.

16. Rodina L.I., Tonkov E.L. Statistical characteristics of attainable set of controllable system, non-wandering, and minimal attraction center, *Nelineinaya Dinamika*, 2009, vol. 5, no. 2, pp. 265–288.

Received 15.10.2013

Rodina Lyudmila Ivanovna, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: box0589@udmnet.ru