УДК 517.977

© *В. В. Лукьянов*

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДОКРИТИЧНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ [1]

Рассматривается линейная управляемая система с векторным управлением и непрерывными коэффициентами. Для такой системы получено эффективное достаточное условие докритичности в предположении достаточной гладкости параметров системы. Для автономной управляемой системы получено необходимое условие докритичности. В работе также изучается связь докритических и вполне управляемых линейных систем. Доказано, что линейная система вполне управляема на отрезке, если она является докритической хотя бы в одной внутренней точке этого отрезка. Доказано также, что вполне управляемая автономная линейная система со скалярным управлением является докритической.

Ключевые слова: линейные управляемые системы, докритические системы, условия докритичности.

Введение

В работе [1] рассматривалась оптимальная по быстродействию линейная управляемая система с векторным управлением. На такую систему было распространено понятие докритической системы, известное ранее для линейных управляемых систем со скалярным управлением (см., например, [2]). В указанной работе подробно изучены структура оптимальных в смысле быстродействия управлений, структура множества управляемости и структура границы множества управляемости докритических систем, а также дано оптимальное в смысле быстродействия программное управление для любой начальной фазовой точки, принадлежащей докритическому множеству управляемости системы.

Настоящая работа продолжает исследования [1]. Здесь получено эффективное (выраженное через исходные параметры системы) достаточное условие докритичности для линейной неавтономной управляемой системы при условии достаточной гладкости ее параметров. Для линейной автономной системы получено необходимое условие докритичности. Изучена связь докритических и вполне управляемых систем.

Ниже приведены используемые в этой работе обозначения:
$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
$\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел;
$\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности n, элементы пространства $\mathbb{R}^n$ представляют собой векторы-столбцы;
$\mathbb{R}^{n*}$ — пространство, сопряженное к $\mathbb{R}^n$; элементы $\mathbb{R}^{n*}$ представляют собой векторы-строки;
$|x|$ — евклидова норма элемента x в пространстве $\mathbb{R}^n$;
$\mathbb{M}(n,m)$ — пространство непрерывных линейных операторов из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, далее элементы $\mathbb{M}(n,m)$ отождествляются с их матрицами относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$;
A^{T} — матрица, транспонированная к матрице A;
$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ — сфера размерности $n-1$.

§ 1. Условия докритичности

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12–01–00195).

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, функции $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n,n)$ и $B\colon \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n,r)$ предполагаются непрерывными.

Зафиксируем некоторую фундаментальную систему решений

$$\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t) \tag{1.2}$$

сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\psi A(t) \tag{1.3}$$

и определим семейство функций

$$\xi_i^j(t) = \psi_i(t) b^j(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{1.4}$$

где $b^j(t)$ — столбец матрицы $B(t)$ с номером j.

Определение 1 (см. [1, с. 102]). Будем говорить, что двухпараметрическое семейство непрерывных функций (1.4) образует *двухпараметрическую T-систему* (или, короче, *TA-систему*) на промежутке I, если для любого ненулевого вектора $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ общее количество геометрически различных (то есть без учета кратностей) нулей на I всех линейных комбинаций

$$\xi^j(t; c) = c_1 \xi_1^j(t) + \ldots + c_n \xi_n^j(t), \quad j = 1, \ldots, r, \tag{1.5}$$

не больше $n-1$. В дальнейшем будем использовать обозначение (1.5), где $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

Для каждого $t \in \mathbb{R}$ обозначим через $\boldsymbol{\sigma}(t)$ точную верхнюю грань таких $\sigma > 0$, что на интервале $I_t = (t, t+\sigma)$ семейство функций (1.4) образует TA-систему (определение 1). Если эти функции не образуют TA-систему ни на каком интервале I_t, то положим $\boldsymbol{\sigma}(t) = 0$. Так определена функция $\boldsymbol{\sigma}\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

В работе [1] подробно изучены свойства TA-систем и приведены некоторые свойства функции $\boldsymbol{\sigma}(\cdot)$; в частности, показано, что функция $\boldsymbol{\sigma}(t; A, B) = \boldsymbol{\sigma}(t)$ для системы (1.1) определена корректно, то есть не зависит от выбора фундаментальной системы решений (1.2) сопряженной системы (1.3).

Определение 2 (см. [1, с. 119]). Система (1.1) называется *докритической* в точке $t_0 \in \mathbb{R}$, если $\boldsymbol{\sigma}(t_0; A, B) > 0$.

Предполагая функции $t \mapsto A(t)$ и $t \mapsto B(t)$ достаточно гладкими, построим семейство матриц

$$L_0(t) = B(t), \quad L_i(t) = -A(t) L_{i-1}(t) + \frac{dL_{i-1}(t)}{dt}, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{1.6}$$

Символом l_i^j мы будем обозначать столбец матрицы L_i с номером j.

Теорема 1. *Пусть в некоторой окрестности точки t_0 функция $t \mapsto A(t)$ имеет непрерывную производную порядка $n-2$, а функция $t \mapsto B(t)$ имеет непрерывную производную порядка $n-1$. Если для любого набора целых неотрицательных чисел $n_1, \ldots, n_r$ таких, что $n_1 + \ldots + n_r = n$, семейство векторов*

$$l_0^1(t_0), \ldots, l_{n_1-1}^1(t_0), \ldots, l_0^r(t_0), \ldots, l_{n_r-1}^r(t_0) \tag{1.7}$$

линейно независимо, то система (1.1) *докритическая в точке t_0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что выполнены условия теоремы, но система (1.1) не является докритической в точке t_0, то есть $\boldsymbol{\sigma}(t_0) = 0$. Выберем произвольную строго убывающую числовую последовательность

$$\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad \varepsilon_k > \varepsilon_{k+1}, \quad \lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0,$$

так, чтобы $(t_0,\, t_0+\varepsilon_1) \subset O(t_0)$, где $O(t_0)$ — окрестность точки t_0, в которой функции $A(t)$ и $B(t)$ обладают заданной по условию гладкостью. Семейство функций (1.4) не образует ТА-систему ни на одном из интервалов $(t_0,\, t_0+\varepsilon_k)$, $k \in \mathbb{N}$, поэтому для каждого $k \in \mathbb{N}$ существуют такой вектор $c^k \in S^{n-1}$ и такой набор целых неотрицательных чисел $n_1^k, \ldots, n_r^k$, $n_1^k + \ldots + n_r^k = n$, что каждая функция $\xi^j(t; c^k)$, $j = 1, \ldots, r$, имеет не менее n_j^k геометрически различных нулей на интервале $I_k = (t_0,\, t_0+\varepsilon_k)$.

При каждом $k \in \mathbb{N}$ вектор $(n_1^k, \ldots, n_r^k)$ является элементом конечного множества

$$\mathfrak{N}_n = \{(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}_+^r : n_1 + \ldots + n_r = n\},$$

поэтому существует подпоследовательность $\{c^{k_s}\}_{s=1}^{\infty}$ и существует вектор $(n_1, \ldots, n_r) \in \mathfrak{N}_n$ такие, что при каждом натуральном s каждая функция $\xi^j(t; c^{k_s})$, $j = 1, \ldots, r$, имеет не менее n_j геометрически различных нулей на интервале $I_k = (t_0,\, t_0+\varepsilon_k)$. Выделим такую подпоследовательность и для упрощения обозначений снова обозначим ее $\{c^k\}_{k=1}^{\infty}$. Теперь в силу компактности S^{n-1} из последовательности $\{c^k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую мы снова обозначим $\{c^k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty} c^k = \widehat{c} \in S^{n-1}$. Итак, полученная последовательность $\{c^k\}_{k=1}^{\infty} \subset S^{n-1}$ обладает тем свойством, что при каждом натуральном k и каждом $j = 1, \ldots, r$ функция $\xi^j(t; c^k)$ имеет не менее n_j геометрически различных нулей на интервале $I_k = (t_0,\, t_0+\varepsilon_k)$, причем $n_1 + \ldots + n_r = n$.

Из условий гладкости функций $t \mapsto A(t)$ и $t \mapsto B(t)$ следует, что функции $t \mapsto \xi^j(t; c^k)$ имеют непрерывные производные порядка $n-1$ в окрестности $O(t_0)$ точки t_0, а следовательно, и на любом интервале $(t_0, t_0+\varepsilon_k)$ в силу выбора последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$. Для тех значений j, для которых $n_j > 0$, функция $t \mapsto \xi^j(t; c^k)$ при любом натуральном k имеет по крайней мере один нуль $\tau_{0,k}^j$ на интервале $(t_0,\, t_0+\varepsilon_k)$. Если $n_j > 1$, то производная $t \mapsto \dfrac{d\xi^j(t; c^k)}{dt}$ имеет по крайней мере один нуль $\tau_{1,k}^j$ на интервале $(t_0,\, t_0+\varepsilon_k)$. Вообще, производная $t \mapsto \dfrac{d^i\xi^j(t; c^k)}{dt^i}$ имеет по крайней мере один нуль $\tau_{i,k}^j$ на интервале $(t_0,\, t_0+\varepsilon_k)$, если $i < n_j$, то есть

$$\left.\frac{d^i\xi^j(t; c^k)}{dt^i}\right|_{t=\tau_{i,k}^j} = 0, \qquad t_0 < \tau_{i,k}^j < t_0+\varepsilon_k, \quad i = 0, \ldots, n_j - 1, \quad j = 1, \ldots, r, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

В силу выбора последовательности $\{\varepsilon_k\}$ имеем $\tau_{i,k}^j \to t_0$ при $k \to \infty$. Сходимость $c^k \to \widehat{c}$ влечет сходимость $\xi^j(\cdot; c^k) \to \xi^j(\cdot; \widehat{c})$ в пространстве $C^{n-1}J$ для любого отрезка $J \subset O(t_0)$. Заключая точку t_0 внутрь такого отрезка J и переходя в равенстве (1.8) к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\left.\frac{d^i\xi^j(t; \widehat{c})}{dt^i}\right|_{t=t_0} = 0, \qquad i = 0, \ldots, n_j - 1, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{1.9}$$

В равенствах (1.8) и (1.9) предполагается, что $\dfrac{d^0\xi^j(t; \widehat{c})}{dt^0} = \xi^j(t; \widehat{c})$ и соотношения для $\xi^j(t; \widehat{c})$ имеют место только для тех j, для которых $n_j > 0$.

Далее для каждого $j = 1, \ldots, r$ имеем

$$\xi^j(t; \widehat{c}) = \widehat{c}_1\xi_1^j(t) + \ldots + \widehat{c}_n\xi_n^j(t) = \bigl(\widehat{c}_1\psi_1(t) + \ldots + \widehat{c}_n\psi_n(t)\bigr)b^j(t) = \widehat{\psi}(t)b^j(t) = \widehat{\psi}(t)l_0^j(t). \tag{1.10}$$

Дифференцируя (1.10) в окрестности $O(t_0)$ точки t_0 и учитывая обозначения (1.6), получаем (существование производных обеспечено условиями гладкости функций $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$)

$$\frac{d\xi^j(t; \widehat{c})}{dt} = \frac{d}{dt}\bigl(\widehat{\psi}(t)l_0^j(t)\bigr) = \frac{d\widehat{\psi}(t)}{dt}l_0^j(t) + \widehat{\psi}(t)\frac{dl_0^j(t)}{dt} =$$
$$= -\widehat{\psi}(t)A(t)l_0^j(t) + \widehat{\psi}(t)\frac{dl_0^j(t)}{dt} = \widehat{\psi}(t)l_1^j(t), \tag{1.11}$$

. . . .

$$\frac{d^{n-1}\xi^j(t;\widehat{c})}{dt^{n-1}} = \frac{d}{dt}\big(\widehat{\psi}(t)l^j_{n-2}(t)\big) = -\widehat{\psi}(t)A(t)l^j_{n-2}(t) + \widehat{\psi}(t)\frac{dl^j_{n-2}(t)}{dt} = \widehat{\psi}(t)l^j_{n-1}(t). \tag{1.12}$$

Подставив (1.10)–(1.12) в (1.9), будем иметь

$$\widehat{\psi}(t_0)l^j_i(t_0) = 0, \qquad i = 0,\ldots,n_j-1, \quad j = 1,\ldots,r. \tag{1.13}$$

По построению $\widehat{c} \in S^{n-1}$, поэтому решение $\widehat{\psi}(t) = \widehat{c}_1\psi_1(t) + \ldots + \widehat{c}_n\psi_n(t)$ ненулевое, в частности $\widehat{\psi}(t_0) \neq 0$. Из соотношения (1.13) следует, что ненулевой вектор $\widehat{\psi}(t_0)$ ортогонален всем векторам семейства (1.7), которое по условию теоремы линейно независимо и состоит из n векторов, что невозможно. Следовательно, система (1.1) является докритической в точке t_0. □

В теореме 1 сформулировано достаточное условие докритичности системы (1.1) в некоторой точке. Из нее легко получить достаточное условие докритичности на некотором интервале.

Следствие 1. *Пусть на некотором интервале J функция $t \mapsto A(t)$ имеет непрерывную производную порядка $n-2$, а функция $t \mapsto B(t)$ имеет непрерывную производную порядка $n-1$. Если для любого набора целых неотрицательных чисел $n_1,\ldots,n_r$ таких, что $n_1+\ldots+n_r = n$, семейство векторов*

$$l^1_0(t),\ldots,l^1_{n_1-1}(t),\ldots,l^r_0(t),\ldots,l^r_{n_r-1}(t)$$

линейно независимо в каждой точке интервала J, то система (1.1) является докритической на интервале J.

Следующий пример показывает, что достаточное условие докритичности системы (1.1), сформулированное в теореме 1, не является необходимым даже для систем со скалярным управлением ($r = 1$) и аналитическими функциями $t \mapsto A(t)$ и $t \mapsto B(t)$.

Пример 1. Рассмотрим неавтономную управляемую систему со скалярным управлением:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = t^2x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \tag{1.14}$$

В качестве фундаментальной системы решений сопряженной системы (1.3) возьмем вектор-функции $\psi_1(t) = (-3,\, t^3)$, $\psi_2(t) = (0,\, 1)$. В соответствии с равенством (1.4) имеем $\xi_1(t) = t^3$, $\xi_2(t) = 1$. Легко видеть, что функция $\xi(t;c) = c_1t^3 + c_2$ имеет не более одного нуля (без учета кратности) на всем множестве вещественных чисел при любых не равных нулю одновременно c_1 и c_2. Поэтому $\boldsymbol{\sigma}(t;A,B) = +\infty$ при любом $t \in \mathbb{R}$ и система (1.14) по определению докритическая на всем множестве вещественных чисел. Однако семейство векторов

$$\big\{l_0(t_0), l_1(t_0)\big\} = \big\{b(t_0), -A(t_0)b(t_0)\big\} = \big\{(0,1)^{\mathrm{T}}, (-t_0^2, 0)^{\mathrm{T}}\big\}$$

линейно зависимо в точке $t_0 = 0$.

Рассмотрим линейную автономную управляемую систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1.15}$$

где $A \in \mathbb{M}(n,n)$, $B \in \mathbb{M}(n,r)$.

Для автономной системы (1.15) функция $t \mapsto \boldsymbol{\sigma}(t)$ является постоянной [1, утверждение 7], то есть $\boldsymbol{\sigma}(t) = \sigma$ для любого $t \in \mathbb{R}$, поэтому система (1.15) либо является докритической во всех вещественных точках, либо не является докритической ни в одной точке. Матрицы (1.6), построенные для автономной системы, являются постоянными: $L_0 = B$, $L_i = (-1)^iA^iB$, $i \geqslant 1$. Из теоремы 1 следует формулировка достаточного условия докритичности автономной системы.

Следствие 2. *Если для любого набора целых неотрицательных чисел* $n_1, \dots, n_r$ *таких, что* $n_1 + \ldots + n_r = n$, *семейство векторов* $b^1, \dots, A^{n_1-1}b^1, \dots, b^r, \dots, A^{n_r-1}b^r$ *линейно независимо, то автономная система* (1.15) *докритическая.*

Теперь приведем необходимое условие докритичности для автономной системы (1.15).

Теорема 2. *Если автономная линейная система* (1.15) *докритическая, то*

1) *любое семейство векторов*

$$b^{j_1}, b^{j_2}, \dots, b^{j_s}, \quad 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_s \leqslant r, \tag{1.16}$$

содержащее не более n *векторов, линейно независимо;*

2) *семейство векторов*

$$b^j, Ab^j, \dots, A^{n-1}b^j \tag{1.17}$$

линейно независимо при каждом $j = 1, \dots, r$.

Доказательство. Для доказательства первого пункта теоремы предположим, что система (1.15) докритическая, $\boldsymbol{\sigma}(t) = \sigma > 0$, но некоторое семейство векторов (1.16), где $s \leqslant n$, линейно зависимо. Если $s = 1$, то $b^{j_1} = 0$, что противоречит докритичности системы (1.15). Пусть $s > 1$. Тогда в семействе (1.16) найдется вектор b^{j_k}, который представляется в виде линейной комбинации остальных векторов семейства:

$$b^{j_k} = q_1 b^{j_1} + \ldots + q_{k-1} b^{j_{k-1}} + q_{k+1} b^{j_{k+1}} + \ldots + q_s b^{j_s}. \tag{1.18}$$

Зафиксируем произвольную точку $t_0 \in \mathbb{R}$. Если $s < n$, то на интервале $(t_0,\, t_0 + \sigma/2)$ выберем произвольным образом попарно различные точки $\tau_1, \dots, \tau_{n-s}$. По утверждению 2 работы [1] существует такой ненулевой вектор $\widehat{c} \in \mathbb{R}^n$, что $\xi^j(t_0; \widehat{c}) = 0$, $j = j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_s$, и если $s < n$, то $\xi^{j_k}(\tau_i; \widehat{c}) = 0$, $i = 1, \dots, n-s$. Положим

$$\widehat{\psi}(t) = \widehat{c}_1 \psi_1(t) + \ldots + \widehat{c}_n \psi_n(t),$$

где $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ — фиксированная ранее система функций (1.2). Далее $\xi^j(t; \widehat{c}) = \widehat{\psi}(t) b^j$ и с учетом (1.18) получаем

$$\begin{aligned} \xi^{j_k}(t_0; \widehat{c}) = \widehat{\psi}(t_0) b^{j_k} = q_1 \widehat{\psi}(t_0) b^{j_1} + \ldots + q_{k-1} \widehat{\psi}(t_0) b^{j_{k-1}} + q_{k+1} \widehat{\psi}(t_0) b^{j_{k+1}} + \ldots + q_s \widehat{\psi}(t_0) b^{j_s} = \\ = q_1 \xi^{j_1}(t_0; \widehat{c}) + \ldots + q_{k-1} \xi^{j_{k-1}}(t_0; \widehat{c}) + q_{k+1} \xi^{j_{k+1}}(t_0; \widehat{c}) + \ldots + q_s \xi^{j_s}(t_0; \widehat{c}) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, линейные комбинации $\xi^j(t; \widehat{c})$, $j = 1, \dots, r$, имеют на интервале $(t_0 - \sigma/2,\, t_0 + \sigma/2)$ в совокупности не менее n геометрически различных нулей, хотя семейство функций (1.4) образует на этом интервале ТА-систему. Противоречие доказывает первый пункт теоремы.

Для доказательства второго пункта теоремы предположим, что система (1.15) докритическая, но семейство векторов (1.17) линейно зависимо при некотором $\widehat{\jmath} \in \{1, \dots, r\}$. Тогда существует ненулевой вектор $\widehat{\psi}_0 \in \mathbb{R}^{n*}$, ортогональный всем векторам семейства $b^{\widehat{\jmath}}, Ab^{\widehat{\jmath}}, \dots, A^{n-1}b^{\widehat{\jmath}}$.

Зафиксируем произвольный момент времени $t_0 \in \mathbb{R}$ и обозначим через $t \mapsto \widehat{\psi}(t)$ решение сопряженной системы (1.3) с начальным условием $\psi(t_0) = \widehat{\psi}_0$. Это решение ненулевое, и существует такой ненулевой вектор $\widehat{c} \in \mathbb{R}^n$, что для функции $\widehat{\psi}(t)$ имеет место разложение $\widehat{\psi}(t) = \widehat{c}_1 \psi_1(t) + \ldots + \widehat{c}_n \psi_n(t)$, где $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ — фиксированная ранее система функций (1.2).

Далее имеем

$$\xi^{\widehat{\jmath}}(t_0; \widehat{c}) = \widehat{\psi}(t_0) b^{\widehat{\jmath}} = \widehat{\psi}_0 b^{\widehat{\jmath}} = 0, \tag{1.19}$$

$$\left. \frac{d^i \xi^{\widehat{\jmath}}(t; \widehat{c})}{dt^i} \right|_{t=t_0} = (-1)^i \widehat{\psi}_0 A^i b^{\widehat{\jmath}} = 0, \qquad i = 1, \dots, n-1. \tag{1.20}$$

Пусть среди векторов $b^{\widehat{\jmath}}, Ab^{\widehat{\jmath}}, \ldots, A^{n-1}b^{\widehat{\jmath}}$ имеется ровно k $(k < n)$ линейно независимых. В силу докритичности системы (1.15) имеем $b^{\widehat{\jmath}} \neq 0$, поэтому $k > 0$. По лемме 19.1 монографии [3] линейно независимыми являются обязательно первые k векторов $b^{\widehat{\jmath}}, Ab^{\widehat{\jmath}}, \ldots, A^{k-1}b^{\widehat{\jmath}}$ и любой вектор $A^s b^{\widehat{\jmath}}$ при $s \geqslant k$ представляется в виде линейной комбинации векторов $b^{\widehat{\jmath}}, Ab^{\widehat{\jmath}}, \ldots, A^{k-1}b^{\widehat{\jmath}}$. Поэтому из равенств (1.19), (1.20) следует, что значение функции $t \mapsto \xi^{\widehat{\jmath}}(t;\widehat{c})$ и всех ее производных в точке $t = t_0$ равно нулю. Последнее в силу аналитичности функции $t \mapsto \xi^{\widehat{\jmath}}(t;\widehat{c})$ означает, что $\xi^{\widehat{\jmath}}(t;\widehat{c}) = 0$ при любом $t \in \mathbb{R}$, а это противоречит докритичности системы (1.15), поскольку вектор $\widehat{c}$ ненулевой. □

Пример ниже показывает, что необходимое условие докритичности для автономной системы, сформулированное в теореме 2, не является достаточным.

Пример 2. Рассмотрим автономную линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_2 + u_3. \end{cases} \tag{1.21}$$

В качестве фундаментальной системы решений системы (1.3) возьмем вектор-функции

$$\psi_1(t) = (1,1,1)\exp(-t),$$
$$\psi_2(t) = \Bigl(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,t,\ -\cos\Bigl(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,t\Bigr),\ \cos\Bigl(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,t\Bigr)\Bigr)\exp\frac{t}{2},$$
$$\psi_3(t) = \Bigl(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\,t,\ -\sin\Bigl(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,t\Bigr),\ \sin\Bigl(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,t\Bigr)\Bigr)\exp\frac{t}{2}.$$

В соответствии с равенством (1.4) определим функции $\xi_i^j(t)$. Линейные комбинации $\xi^j(t;c)$ имеют вид

$$\xi^1(t;c) = c_1\exp(-t) + c_2\cos\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\exp\frac{t}{2} + c_3\sin\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\exp\frac{t}{2},$$
$$\xi^2(t;c) = c_1\exp(-t) - c_2\cos\Bigl(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}\,t}{2}\Bigr)\exp\frac{t}{2} - c_3\sin\Bigl(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}\,t}{2}\Bigr)\exp\frac{t}{2},$$
$$\xi^3(t;c) = c_1\exp(-t) + c_2\cos\Bigl(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}\,t}{2}\Bigr)\exp\frac{t}{2} + c_3\sin\Bigl(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}\,t}{2}\Bigr)\exp\frac{t}{2}.$$

Для произвольного малого $\varepsilon > 0$ положим

$$c_1^\varepsilon = (1-\varepsilon)/3, \quad c_2^\varepsilon = -(2\varepsilon+1)/3, \quad c_3^\varepsilon = \sqrt{3}/3$$

и, проведя необходимые вычисления, убедимся, что

$$\xi^1(0;c^\varepsilon) = c_1^\varepsilon + c_2^\varepsilon = -\varepsilon,$$
$$\dot{\xi}^1(0;c^\varepsilon) = -\xi^2(0;c^\varepsilon) = -c_1^\varepsilon + c_2^\varepsilon/2 + c_3^\varepsilon\sqrt{3}/2 = 0,$$
$$\ddot{\xi}^1(0;c^\varepsilon) = \xi^3(0;c^\varepsilon) = c_1^\varepsilon - c_2^\varepsilon/2 + c_3^\varepsilon\sqrt{3}/2 = 1.$$

Из этих равенств следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция $\xi^1(t;c^\varepsilon)$ будет иметь по крайней мере два нуля на сколь угодно малом интервале $(-\varepsilon',\varepsilon')$, а функция $\xi^2(t;c^\varepsilon)$ будет иметь нуль в точке $t = 0$. Поэтому семейство функций (1.4) не образует ТА-систему ни на каком интервале $(-\varepsilon',\varepsilon')$ и, следовательно, в силу автономности системы (1.21) ни на каком интервале положительной меры.

Таким образом, система (1.21) не является докритической, хотя семейство векторов $\{b^1, b^2, b^3\}$ и каждое семейство векторов $\{b^j, Ab^j, A^2b^j\}$ при $j = 1,2,3$ представляют собой некоторую перестановку столбцов единичной $(3{\times}3)$-матрицы и являются линейно независимыми (по отдельности).

§ 2. Докритичность и полная управляемость

Теорема 3. *Если линейная управляемая система* (1.1) *является докритической хотя бы в одной точке полуинтервала* $[t_0, t_1)$, *то система* (1.1) *вполне управляема на отрезке* $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Располагая функции (1.2) построчно, составим матрицу $\Psi(\cdot)$. Положим $H(t,s) = \Psi^{-1}(t)\Psi(s)B(s)$, $h^i(t,s)$ — строка матрицы $H(t,s)$ с номером i. Пусть для некоторого вектора-строки $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n*}$ равенство

$$c_1 h^1(t_1, s) + \ldots + c_n h^n(t_1, s) = cH(t_1, s) = c'\Psi(s)B(s) = (\xi^1(s, c'), \ldots, \xi^r(s, c')) = 0, \qquad (2.1)$$

где $c' = c\Psi^{-1}(t_1)$, имеет место для любого $s \in [t_0, t_1]$. По условию теоремы система (1.1) докритическая в некоторой точке $t' \in [t_0, t_1)$. Тогда семейство функций (1.4) образует ТА-систему на непустом интервале $I = (t_0, t_1) \cap (t', t' + \boldsymbol{\sigma}(t'))$. Равенство (2.1) при любом $s \in I \subseteq (t_0, t_1)$ возможно только при $c = c' = 0$. Следовательно, функции $s \mapsto h^i(t_1, s)$, $i = 1, \ldots, n$, линейно независимы на отрезке $[t_0, t_1]$ и по теореме 9.1 монографии [3] система (1.1) вполне управляема на отрезке $[t_0, t_1]$. □

Обратное утверждение неверно даже для автономных систем (см. пример ниже).

Утверждение 1. *Автономная докритическая линейная система* (1.15) *вполне управляема. Автономная вполне управляемая линейная система* (1.15) *со скалярным управлением является докритической.*

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы 3. Если автономная линейная система (1.15) со скалярным управлением ($r = 1$) вполне управляема, то

$$\operatorname{rank}\bigl(B, AB, \ldots, A^{n-1}B\bigr) = \operatorname{rank}\bigl(b^1, Ab^1, \ldots, A^{n-1}b^1\bigr) = n.$$

Тогда по следствию 2 система (1.15) является докритической. □

Ниже приведен пример вполне управляемой, но не докритической автономной системы с векторным управлением.

Пример 3. Рассмотрим автономную линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases} \qquad (2.2)$$

В качестве фундаментальной системы решений сопряженной системы (1.3) возьмем вектор-функции $\psi_1(t) = (0,\, 1)$, $\psi_2(t) = (1,\, -t)$ и в соответствии с равенством (1.4) определим функции

$$\xi_1^1(t) = 0, \quad \xi_2^1(t) = 1, \quad \xi_1^2(t) = 1, \quad \xi_2^2(t) = -t.$$

Семейство функций $\xi_i^j(t)$, очевидно, не образует ТА-систему ни на каком интервале положительной меры, но система (2.2) вполне управляема.

§ 3. Пример

Рассмотрим линейную неавтономную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{2x_1}{1 + t^2} + u_2. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Здесь $n = r = 2$, функция $t \mapsto A(t)$ бесконечно дифференцируема, а матрица $B(t)$ является единичной. В соответствии с равенством (1.6) строим матрицы

$$L_0(t) = B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_1(t) = -A(t)L_0(t) + \frac{dL_0(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{2}{1+t^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы $\big(L_0(t), L_1(t)\big) \in \mathbb{M}(2,4)$ равен $n = 2$ при любом $t \in \mathbb{R}$, поэтому по теореме 20.1 монографии [3, гл. 6] система (3.1) вполне управляема на любом отрезке вещественной прямой. Проверим для этой системы достаточное условие докритичности, сформулированное в теореме 1. Число $n = 2$ можно представить в виде упорядоченной суммы двух неотрицательных целых чисел тремя способами: $2 = 2+0 = 1+1 = 0+2$. Для каждого способа такого представления составляем соответствующее семейство векторов

$$\big\{l_0^1(t), l_1^1(t)\big\} = \big\{(1,\ 0)^{\mathrm{T}}, \big(0,\ -2/(1+t^2)\big)^{\mathrm{T}}\big\}, \tag{3.2}$$

$$\big\{l_0^1(t), l_0^2(t)\big\} = \big\{(1,\ 0)^{\mathrm{T}}, (0,\ 1)^{\mathrm{T}}\big\}, \tag{3.3}$$

$$\big\{l_0^2(t), l_1^2(t)\big\} = \big\{(0,\ 1)^{\mathrm{T}}, (-1,\ 0)^{\mathrm{T}}\big\}. \tag{3.4}$$

Легко видеть, что каждое семейство векторов (3.2)–(3.4) линейно независимо при любом $t \in \mathbb{R}$. По теореме 1 система (3.1) является докритической на всем множестве вещественных чисел.

Теперь найдем функцию $\boldsymbol{\sigma}(\cdot)$ для системы (3.1) непосредственно по определению. Легко проверить, что вектор-функции

$$\psi_1(t) = (-2t,\ 1+t^2), \quad \psi_2(t) = \big(-2-2t\operatorname{arctg} t,\ t+(1+t^2)\operatorname{arctg} t\big)$$

образуют фундаментальную систему решений сопряженной системы (1.3). В соответствии с равенством (1.4) определим семейство функций

$$\begin{pmatrix} \xi_1^1(t) & \xi_1^2(t) \\ \xi_2^1(t) & \xi_2^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t & 1+t^2 \\ -2-2t\operatorname{arctg} t & t+(1+t^2)\operatorname{arctg} t \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

и составим линейные комбинации

$$\xi^1(t;c) = -2(c_1 t + c_2 + c_2 t\operatorname{arctg} t),$$
$$\xi^2(t;c) = c_1(1+t^2) + c_2 t + c_2(1+t^2)\operatorname{arctg} t.$$

Рассмотрим функцию $g(t;c) = \xi^1(t;c)\xi^2(t;c)$. Дифференцируя ее по переменной t, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dg(t;c)}{dt} &= \frac{d}{dt}\big(\xi^1(t;c)\xi^2(t;c)\big) = \frac{d\xi^1(t;c)}{dt}\xi^2(t;c) + \xi^1(t;c)\frac{d\xi^2(t;c)}{dt} = \\ &= -2\Big(c_1 + c_2\operatorname{arctg} t + \frac{c_2 t}{1+t^2}\Big)\big(c_1(1+t^2) + c_2 t + c_2(1+t^2)\operatorname{arctg} t\big) - \\ &\qquad - 2(c_1 t + c_2 + c_2 t\operatorname{arctg} t)\cdot 2(c_1 t + c_2 + c_2 t\operatorname{arctg} t) = \\ &= -\frac{2\big(c_1(1+t^2) + c_2 t + c_2(1+t^2)\operatorname{arctg} t\big)^2}{1+t^2} - 4(c_1 t + c_2 + c_2 t\operatorname{arctg} t)^2 \leqslant 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

причем равенство $dg(t;c)/dt = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} c_1(1+t^2) + c_2 t + c_2(1+t^2)\operatorname{arctg} t = 0, \\ c_1 t + c_2 + c_2 t\operatorname{arctg} t = 0. \end{cases}$$

Ее определитель $\Delta = (1+t^2)(1+t\operatorname{arctg} t) - t(t+(1+t^2)\operatorname{arctg} t) = 1$, поэтому эта система имеет только нулевое решение $c_1 = c_2 = 0$. Таким образом, при любом ненулевом $c \in \mathbb{R}^2$ неравенство (3.6) будет строгим при любом $t \in \mathbb{R}$, следовательно, функция $t \mapsto g(t;c)$ монотонно строго убывает на множестве $\mathbb{R}$ и имеет на нем не более одного нуля, который обязательно будет простым (не кратным). Отсюда следует, что либо обе функции $\xi^1(t;c)$, $\xi^2(t;c)$ не имеют нулей на множестве $\mathbb{R}$, либо ровно одна из них имеет единственный нуль на множестве $\mathbb{R}$ (случай общего нуля этих функций невозможен в силу того, что функция $g(t,c)$ не может иметь кратных нулей). По определению семейство функций (3.5) образует ТА-систему на множестве $\mathbb{R}$ и $\boldsymbol{\sigma}(t) = +\infty$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукьянов В.В. Двухпараметрические Т-системы функций и их применение для исследования оптимальных по быстродействию линейных нестационарных управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 1. С. 101–130.
2. Николаев С.Ф., Тонков Е.Л. Структура множества управляемости линейной докритической системы // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 107–115.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

Поступила в редакцию 30.10.2013

Лукьянов Владимир Викторович, старший преподаватель, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: lkv-2010@mail.ru

V. V. Lukyanov
Necessary and sufficient conditions of the subcriticality for linear control systems

Keywords: linear control systems, subcritical systems, conditions of subcriticality.

Mathematical Subject Classifications: 34H05

A linear control system with continuous coefficients is considered. We obtain a sufficient condition of the subcriticality for such system. The necessary condition of the subcriticality for a linear time-invariant system is obtained. The link between subcritical linear systems and completely controllable linear systems is studied. It is proved that a linear system is completely controllable on closed interval if the system is subcritical at some point in the interior of this interval. It is proved that a completely controllable linear time-invariant system with one-dimensional control is subcritical.

REFERENCES

1. Lukyanov V.V. Two-dimensional T-systems of functions and their application for research of time optimal linear nonstationary control systems, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 1, pp. 101–130.
2. Nikolaev S.F., Tonkov E.L. The structure of the controllability set of a linear subcritical system, *Differ. Uravn.*, 1999, vol. 35, no. 1, pp. 107–115.
3. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of motion control), Moscow: Nauka, 1968, 476 p.

Received 30.10.2013

Lukyanov Vladimir Viktorovich, Senior Lecturer, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: lkv-2010@mail.ru