УДК 514.174.3

© *П. Д. Лебедев, А. А. Успенский, В. Н. Ушаков*

АЛГОРИТМЫ НАИЛУЧШЕЙ АППРОКСИМАЦИИ ПЛОСКИХ МНОЖЕСТВ ОБЪЕДИНЕНИЯМИ КРУГОВ[1]

Работа посвящена проблеме построения наилучшего аппроксимирующего покрытия ограниченного плоского множества M конечным набором кругов одного радиуса. Проблема считается решенной, если удалось построить наилучшую в смысле хаусдорфовой метрики n-сеть рассматриваемого множества. В работе приведены достаточные условия оптимальности n-сети, предложен алгоритм построения наилучших сетей на основе разбиения M на подмножества и отыскания их чебышевских центров. Эффективность созданного алгоритма показана на примерах множеств с различной геометрией.

Ключевые слова: чебышевский центр, наилучшая n-сеть, покрытие кругами.

Введение

Задача построения аппроксимации множества актуальна, а алгоритмы построения аппроксимирующих множеств с заданными свойствами находят много приложений. Примером отрасли знания, в которой активно применяются алгоритмы аппроксимации множеств, является теория позиционного управления [1]. В динамических задачах управления разрешающие множества (стабильные мосты, интегральные воронки, множества достижимости) имеют, как правило, сложную геометрию и нерегулярную с точки зрения гладкости границу. Точное построение разрешающих множеств представляет трудно разрешимую задачу, которая на практике обходится подменой разрешающего множества другим множеством, чаще всего его аппроксимацией. Естественно, что замена разрешающего множества другим множеством должна быть корректной. В задачах управления такая подмена множеств считается корректной, если вновь построенное множество имеет приемлемый (малый) дефект стабильности [2, 3]. Если при этом сконструированное множество имеет достаточно гладкую границу, то это служит дополнительным побудительным мотивом осуществления такой замены [4, 5], поскольку гладкость границы множества облегчает построение управляющих воздействий. В связи с этим одним из перспективных направлений исследований для нужд теории управления является разработка алгоритмов аппроксимации ограниченных множеств конечными наборами шаров одинакового радиуса [6, 7]. Похожие по постановке задачи об аппроксимации множеств эллипсами рассматривались А. Б. Куржанским [8] и его сотрудниками [9].

Основным элементом для построения покрытия множеств шарами в пространствах конечной размерности является так называемая наилучшая n-сеть, обобщающая понятие чебышевского центра. Условия существования и единственности таких сетей были изучены А. Л. Гаркави [10–13] и Е. Н. Сосовым [14–16].

В работе доказана теорема о достаточных условиях того, что построенная n-сеть является наилучшей. Предложены аналитические и численные методы построения наборов Ξ из n кругов, аппроксимирующих наилучшим образом плоские множества. Критерием оптимальности выбран минимум радиуса кругов (при фиксированном их количестве). В этом случае точки наилучшей n-сети являются центрами кругов из набора Ξ. Приведены примеры численного моделирования.

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 11–01–00427-а, Программы президиума РАН «Математические модели и алгоритмы в управляемых системах с нелинейной динамикой» при финансовой поддержке УрО РАН (проект № 12–П–1–1012) и Программы президиума РАН «Динамические системы и теория управления» при финансовой поддержке Уральского Отделения РАН (проект № 12–П–1–1002).

§ 1. Чебышевский центр множества и его обобщение

Введем основные определения.

Определение 1. Хаусдорфовым отклонением [17] компактного множества $A \subset \mathbb{R}^2$ от компактного множества $B \subset \mathbb{R}^2$ называется число

$$h(A, B) = \max_{\mathbf{a} \in A} \min_{\mathbf{b} \in B} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|.$$

Здесь норма вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ понимается в евклидовой метрике $\|\mathbf{a}\| = \|(a_1, a_2)\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, расстояние между точками $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ считается равным $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$.

Определение 2. Чебышевским центром [10,11] компактного множества $M \subset \mathbb{R}^2$ называется такая точка $\mathbf{c}(M)$, что

$$h(M, \{\mathbf{c}(M)\}) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} h(M, \{\mathbf{x}\}). \tag{1.1}$$

Для любого компактного множества он существует и является единственным [12].

Определение 3. Чебышевским радиусом $r(M)$ компактного множества $M \subset \mathbb{R}^2$ называется величина (1.1).

Понятия чебышевского центра и радиуса широко используются для оценки различных фигур, особенно при построении схем и карт, когда имеющие ненулевые размеры объекты заменяются точками. Различные варианты отыскания $\mathbf{c}(M)$ и $r(M)$ приведены в [6]. Чебышевский центр множества M всегда принадлежит его выпуклой оболочке $\operatorname{co} M$ [12].

Определение 4. На плоскости n-сетью называется непустое множество, состоящее не более чем из n точек в $\mathbb{R}^2$.

Естественно ввести для n-сетей некоторое обобщение понятия чебышевского центра. Обозначим через Σ_n множество всех n-сетей пространства $\mathbb{R}^2$.

Определение 5. Сеть S^* называется наилучшей n-сетью компактного множества $M \subset \mathbb{R}^2$, если выполняется

$$h(M, S^*) = \min_{S \in \Sigma_n} h(M, S). \tag{1.2}$$

Сформулируем задачу о наилучшем покрытии множества.

Задача 1. Рассматриваются ограниченные замкнутые множества $M \subset \mathbb{R}^2$ и наборы кругов $O(\mathbf{s}_1, r), O(\mathbf{s}_2, r), \ldots, O(\mathbf{s}_n, r)$ равного радиуса $r > 0$ с центрами в точках $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n$. Назовем наилучшим набор кругов, который при наименьшем r удовлетворяет включению

$$M \subseteq \bigcup_{i=\overline{1,n}} O(\mathbf{s}_i, r).$$

Требуется найти наилучший набор для заданного множества M.

Основной элемент решения задачи 1 — это построение наилучшей n-сети S множества M. Ее точки являются центрами кругов наилучшего набора. Радиус кругов равен $r = h(M, S)$. Наилучшая сеть для любого ограниченного множества существует, но не всегда единственна (подробнее см. [10, 11]). Далее будем обозначать объединение кругов радиуса r с центрами в точках n-сети S как $\Xi(S, r)$.

§ 2. Аналитические методы построения наилучших сетей

В некоторых случаях для n-сети можно указать, является ли она наилучшей для данного множества M.

Теорема 1. *Пусть задано множество M, $(n+1)$-сеть $V=\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^{n+1}\subseteq M$ и число $R>0$ такие, что*

$$\forall i=\overline{1,n+1},\ \forall j=\overline{1,n+1}\ (i\neq j)\Rightarrow(\|\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_j\|\geqslant R). \tag{2.1}$$

Тогда если для некоторой n-сети S выполняется оценка

$$h(M,S)\leqslant R/2, \tag{2.2}$$

то она является наилучшей n-сетью множества M.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, сеть S не является наилучшей n-сетью множества M. Тогда из (2.2) следует, что существует наилучшая n-сеть $S^*=\{\mathbf{s}_i^*\}_{i=1}^{n}$, для которой $h(M,S^*)=r<R/2$. Поскольку имеет место $V\subseteq M$, то $h(V,S^*)\leqslant r$. Из определения хаусдорфова отклонения вытекает

$$\forall\, i=\overline{1,n+1}\ \ \exists\mathbf{s}_j^*\in S^*:\ \|\mathbf{v}_i-\mathbf{s}_j^*\|\leqslant r.$$

Из (2.1) следует, что одна точка не может находиться на расстоянии, не превышающем $r<R/2$, от двух различных элементов из набора $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^{n+1}$ одновременно. Следовательно, сеть S^* должна содержать точек не меньше, чем V, то есть $n+1$. Получилось противоречие. □

Следствие 1. *Если для некоторого множества M и сетей V и S выполняются условия теоремы* 1, *то относительно их расположения можно сделать два вывода.*

1) *Неравенство* (2.2) *принимает вид строгого равенства*

$$h(M,S)=R/2. \tag{2.3}$$

2) *Найдутся точки $\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\in V$, $\mathbf{s}_k\in S$ такие, что*

$$\|\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_j\|=R \tag{2.4}$$

и

$$\mathbf{s}_k=(\mathbf{v}_i+\mathbf{v}_j)/2. \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При доказательстве теоремы 1 показано, что для любой n-сети S имеет место оценка

$$h(M,S)\geqslant R/2.$$

Это означает, что выполнение условия (2.2) возможно только в случае, если имеет место равенство (2.3).

Поскольку в сети S точек меньше, чем в V, то найдутся минимум две точки $\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\in V$, принадлежащие кругу $O(\mathbf{s}_k,R/2)$ с центром в $\mathbf{s}_k\in S$. Из (2.2) следует оценка $\|\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_j\|\geqslant R$, значит, точки $\mathbf{v}_i$ и $\mathbf{v}_j$ могут быть расположены только на окружности $\partial O(\mathbf{s}_k,R/2)$ на противоположных концах отрезка, проходящего через ее центр $\mathbf{s}_k$. Отсюда вытекают равенства (2.4) и (2.5). □

Теорема 1 и следствие из нее позволяют строить наилучшие сети для некоторых классов плоских множеств.

Пример 1. Задан равносторонний треугольник $M=\triangle\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$. Требуется построить для него наилучшую 2-сеть и решить задачу 1 при $n=2$.

Покажем, что множество M отвечает условиям теоремы 1. Вершины треугольника можно взять в качестве точек $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^3$, а длину его стороны — в качестве параметра R. Сеть S, для которой выполняется оценка (2.2), строится по следующему алгоритму. Обозначим через

$$\mathbf{m}_1=(\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3)/3,\quad \mathbf{m}_2=(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_3)/2,\quad \mathbf{m}_3=(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)/2$$

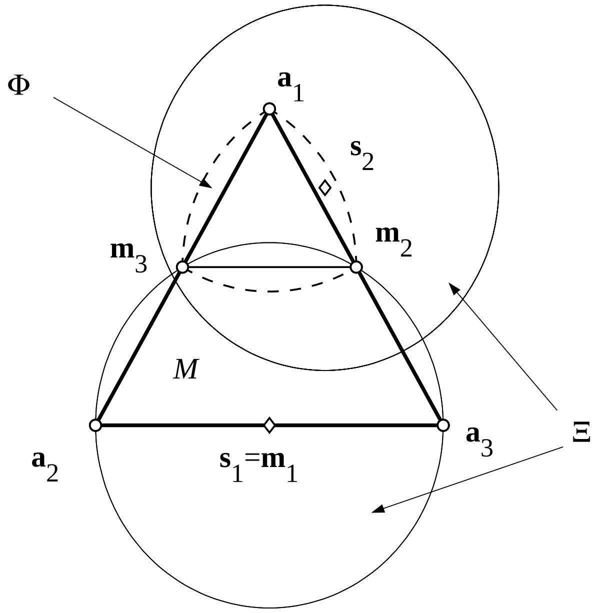

Рис. 1. Правильный треугольник, его наилучшая 2-сеть S и множество $\Xi(S, r)$

середины сторон треугольника M. В качестве точки $\mathbf{s}_1$ возьмем середину одной из сторон, например $\mathbf{m}_1$. А в качестве $\mathbf{s}_2$ можно выбрать любую точку из фигуры Φ, ограниченной тремя дугами окружностей радиуса $R/2$ с центрами в одной из вершин треугольника $\triangle\mathbf{a}_1\mathbf{m}_2\mathbf{m}_3$ и концами в двух других вершинах (см. рис. 1). Иногда Φ называют фигурой Рело [18].

Для сети S выполняется следствие из теоремы 1. Хаусдорфово отклонение треугольника $\triangle\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ от S равно R. Для точек $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ и $\mathbf{s}_1$ справедливы равенства (2.4) и (2.5).

Любой набор кругов $\Xi(S, R/2)$ есть решение задачи 1 в данном примере.

Пример 2. Задан треугольник $M = \triangle\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ с углами при вершинах

$$\alpha_1 = \pi/6, \quad \alpha_2 = 5\pi/12, \quad \alpha_3 = 5\pi/12.$$

Требуется построить для него наилучшую 3-сеть и решить задачу 1 при $n = 3$.

Покажем, что множество M отвечает условиям теоремы 1. В качестве параметра R возьмем радиус окружности, описанной вокруг треугольника $\triangle\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$. Согласно теореме синусов, длины сторон, выраженные через R, равны

$$A_1 = 2R\sin\alpha_1 = 2R\sin\pi/6 = R,$$

$$A_2 = 2R\sin\alpha_2 = 2R\sin(5\pi/12) = \sqrt{2+\sqrt{3}}R,$$

$$A_3 = 2R\sin\alpha_3 = 2R\sin(5\pi/12) = \sqrt{2+\sqrt{3}}R.$$

Естественно в качестве сети V взять набор $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{c}\}$, где $\mathbf{c}$ — центр описанной вокруг треугольника M окружности. Поскольку все углы α_i, $i = \overline{1,3}$, острые, то $\mathbf{c} \in M$. Выражения для длин сторон A_i, $i = \overline{1,3}$, и тот факт, что точка $\mathbf{c}$ удалена от всех вершин на расстояние R, означают, что для заданного набора V выполняется оценка (2.1).

Наилучшая 3-сеть не является единственной.

Одна из них состоит из точек, лежащих на оси симметрии треугольника. А именно, $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\}$, где

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{a}_1 + (2-\sqrt{3})\mathbf{v}, \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{a}_1 + (\sqrt{3}-1)\mathbf{v}, \quad \mathbf{s}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{v} = \mathbf{m}_1.$$

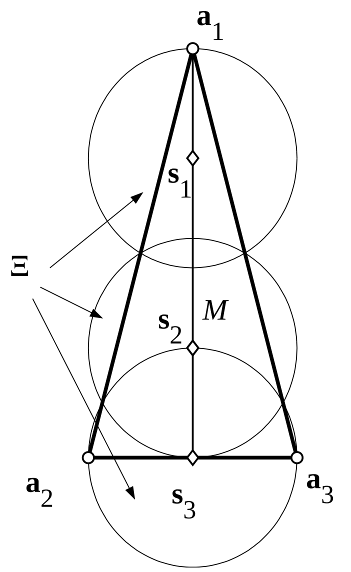

Рис. 2. Равнобедренный треугольник, его наилучшая 3-сеть S и множество $\Xi(S,r)$

Здесь $\mathbf{v}=\mathbf{m}_1-\mathbf{a}_1=(\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3)/2-\mathbf{a}_1$ — вектор с началом в вершине $\mathbf{a}_1$ и концом на середине $\mathbf{m}_1$ стороны A_1.

Другая наилучшая сеть состоит из середин отрезков, соединяющих центр описанной окружности с вершинами треугольника:

$$S^*=\{\mathbf{s}_i^*\}_{i=1}^3=\left\{\frac{\mathbf{a}_i+\mathbf{c}}{2}\right\}_{i=1}^3.$$

Координаты точки $\mathbf{c}$, в свою очередь, можно выразить как

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}_1+2(2-\sqrt{3})\mathbf{v}$$

или

$$\mathbf{c}=\mathbf{m}_1-(2\sqrt{3}-3)\mathbf{v}.$$

Заметим, что для обеих наилучших сетей выполняется следствие из теоремы 1. Для сетей S и S^* имеет место равенство (2.3). Сеть S содержит точку $\mathbf{s}_3$, являющуюся серединой отрезка $[\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]$ длиной $\|\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3\|=R$. Сеть S^* полностью состоит из точек, совпадающих с серединами отрезков $[\mathbf{c},\mathbf{a}_i]$, длина каждого из которых равна R.

Наилучшими наборами кругов, являющимися решениями задачи 1, являются соответственно $\Xi(S,R/2)$ и $\Xi(S^*,R/2)$.

§ 3. Численные методы построения наилучших сетей

Решение задачи 1 в большинстве случаев реализуемо исключительно приближенно. Один из вариантов построения наилучшей сети, предложенный в работе [19], базируется на отыскании такого разбиения множества M на n подмножеств $M_i\subseteq M$, $i=\overline{1,n}$, чтобы чебышевские центры его элементов образовывали бы наилучшую n-сеть.

Теорема 2. *Пусть у множества M есть ровно одна наилучшая n-сеть S. Тогда S содержит ровно n элементов $\mathbf{s}_i$, $i=\overline{1,n}$, и множество M можно представить в виде объединения $M=M_1\cup M_2\cup\ldots\cup M_n$ его подмножеств M_i, для которых имеют место*

$$\mathbf{c}(M_i)=\mathbf{s}_i\quad\forall i=\overline{1,n}\tag{3.1}$$

и

$$r(M_i)=h(M,S)\quad\forall i=\overline{1,n}.\tag{3.2}$$

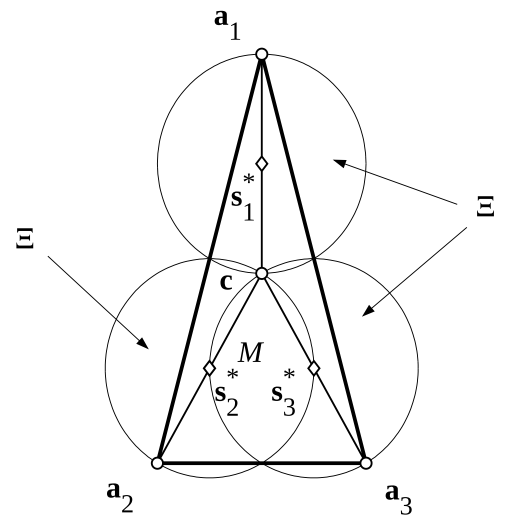

Рис. 3. Равнобедренный треугольник, его наилучшая 3-сеть S^* и множество $\Xi(S^*, r)$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $r = h(M, S)$. По условиям теоремы сеть S является наилучшей и единственной. Следовательно, она содержит ровно n точек, иначе к ней можно было добавить произвольную точку и получить еще одну наилучшую n-сеть. Построим подмножество M_i как геометрическое место точек множества M, удаленных от точки $\mathbf{s}_i$ не более чем от остальных точек сети S:

$$M_i = \left\{\mathbf{m} \in M \colon \forall j = \overline{1,n} \ (\|\mathbf{m} - \mathbf{s}_i\| \leqslant \|\mathbf{m} - \mathbf{s}_j\|)\right\}, \ i = \overline{1,n}. \tag{3.3}$$

Покажем теперь, что имеет место

$$M_i \neq \varnothing \ \ \forall i = \overline{1,n},$$

а значит, для каждого подмножества M_i определен чебышевский центр. Действительно, пусть найдется такое $j \in \overline{1,n}$, что $M_j = \varnothing$. Рассмотрим тогда сеть $\widehat{S} = S \backslash \{\mathbf{s}_j\}$. Из представления (3.3) и пустоты множества M_j следует, что для каждой точки $\mathbf{m} \in M$ найдется такой элемент $\widehat{\mathbf{s}} \in \widehat{S}$ сети $\widehat{S}$, что $\|\mathbf{m} - \widehat{\mathbf{s}}\| \leqslant r$. Значит, $\widehat{S}$ тоже является наилучшей n-сетью множества M, что противоречит условию.

Докажем выполнение равенств (3.1). Действительно, пусть найдется такая точка $\mathbf{s}_j$, которая не совпадает с чебышевским центром подмножества M_j. Рассмотрим тогда n-сеть

$$\widehat{S} = (S \setminus \{\mathbf{s}_j\}) \cup \{\mathbf{c}(M_j)\}.$$

Поскольку из определения чебышевского центра следует, что $h(M_j, \{\mathbf{c}(M_j)\}) \leqslant h(M_j, \{\mathbf{s}_j\})$, и сеть $\widehat{S}$ содержит все точки сети S, кроме $\mathbf{s}_j$, то выполняется неравенство $h(M, \widehat{S}) \leqslant h(M, S)$. Но это невозможно, поскольку в этом случае $\widehat{S}$ была бы наилучшей n-сетью множества M, не совпадающей с S. А по условию теоремы наилучшая n-сеть единственна.

Докажем выполнение равенств (3.2). Допустим, найдется такое подмножество M_j, что $r(M_j) > r$. Тогда найдется точка $\mathbf{m}^* \in M_j$, что $\|\mathbf{m}^* - \mathbf{s}_j\| > r$. А поскольку по построению множества M_j точка $\mathbf{s}_j$ ближайшая к $\mathbf{m}^*$ из сети S и $h(M, S) = r$, то это невозможно.

Предположим, что найдется такое подмножество M_j, что $r(M_j) < r$. Обозначим $\widehat{r} = r(M_j)$. Рассмотрим произвольную точку $\widehat{\mathbf{s}}$ такую, что $\|\widehat{\mathbf{s}} - \mathbf{s}_j\| = r - \widehat{r}$. Для произвольной точки $\mathbf{m} \in M_j$ выполняется оценка

$$\|\mathbf{m} - \widehat{\mathbf{s}}\| \leqslant \|\mathbf{m} - \mathbf{s}_j\| + \|\widehat{\mathbf{s}} - \mathbf{s}_j\| = r$$

в силу неравенства треугольника. Следовательно, сеть $\widehat{S} = (S \setminus \{\mathbf{s}_j\}) \cup \{\widehat{\mathbf{s}}\}$, не совпадающая с S, тоже является наилучшей. Опять получилось противоречие.

Единственное возможное значение чебышевского радиуса $r(M_i) = r$ при $i = \overline{1, n}$, что совпадает с равенствами (3.2). □

В общем случае наилучшая n-сеть множества может быть не единственной, как в примере 1. Однако разбиение, заданное формулой (3.3), может использоваться для построения аппроксимаций наилучших сетей для множеств самого различного вида. Оно позволяет строить на базе некоторой начальной n-сети новые приближения.

Построение аппроксимации наилучшей n-сети для многоугольника с небольшим числом сторон реализовано авторами в виде итерационного алгоритма, аналогичного схемам, использованным в работах [20, 21].

Алгоритм 1

1. *Задание параметров точности.* Задаются параметры точности по хаусдорфовому отклонению δh.

2. *Генерация начального расположения.* Определяются начальные координаты первого приближения сети $S = \{\mathbf{s}_i\}_{i=1}^n$ так, чтобы выполнялось $S \subset M$. Например, в качестве точек $\mathbf{s}_i$ можно взять некоторые вершины многоугольника M, а в случае, если их число меньше, чем n, еще и точки на сторонах многоугольника.

3. *Сегментация многоугольника.* Производится разбиение многоугольника M на n частей с помощью диаграммы Вороного [22]. Для этого сначала плоскость делится на n частей:

$$P_i = \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \colon \forall j = \overline{1, n}\ (\|\mathbf{p} - \mathbf{s}_i\| \leqslant \|\mathbf{p} - \mathbf{s}_j\|)\right\},\ i = \overline{1, n}.$$

P_i есть множество точек плоскости, которые отстоят от $\mathbf{s}_i$ не дальше, чем от других точек сети S. Затем строим множества

$$M_i = P_i \cap M,\ i = \overline{1, n},$$

как в выражениях (3.3). В работе [20] они названы областями Дирихле.

4. *Переопределение координат точек сети.* Определяется новая сеть $S^* = \{\mathbf{s}_i^*\}_{i=1}^n$ по следующему правилу. Если $M_i \neq \varnothing$, то берем в качестве $\mathbf{s}_i^*$ чебышевский центр $\mathbf{c}(M_i)$ множества M_i. Если $M_i = \varnothing$, то полагаем $\mathbf{s}_i^* = \mathbf{s}_i$.

5. *Определение условий окончания.* Проверяем выполнение условий окончания алгоритма

$$|h(M, S) - h(M, S^*)| \leqslant \delta h \tag{3.4}$$

и

$$\max\{\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_i^*\| \colon i = \overline{1, n}\} \leqslant \delta h. \tag{3.5}$$

Если хотя бы одно из неравенств (3.4), (3.5) не выполняется, то берем S^* вместо сети S и переходим к пункту 3.

Если неравенства (3.4) и (3.5) выполняются, то считаем, что S^* — приемлемая аппроксимация наилучшей n-сети. Работа алгоритма заканчивается.

Замечание 1. Алгоритм 1 может давать существенно различные результаты в зависимости от выбора начального расположения точек [21]. Поэтому при решении задачи 1 для конкретных множеств следует использовать его несколько раз с различной начальной n-сетью S. Затем из различных полученных вариантов S^* надо выбрать тот, который дает наименьшее значение $h(M, S^*)$.

Пример 3. Задан квадрат M с вершинами

$$\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^4 = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, 1), (1, -1)\}.$$

Требуется построить для него наилучшую 3-сеть и решить задачу 1 при $n = 3$.

Решение проводится с помощью алгоритма 1. Полученный результат: наилучшая 3-сеть S состоит из точек $\mathbf{s}_1 = (-0.125, 0.5)$, $\mathbf{s}_2 = (-0.125, -0.5)$, $\mathbf{s}_3 = (0.875, 0)$. Точки S образуют

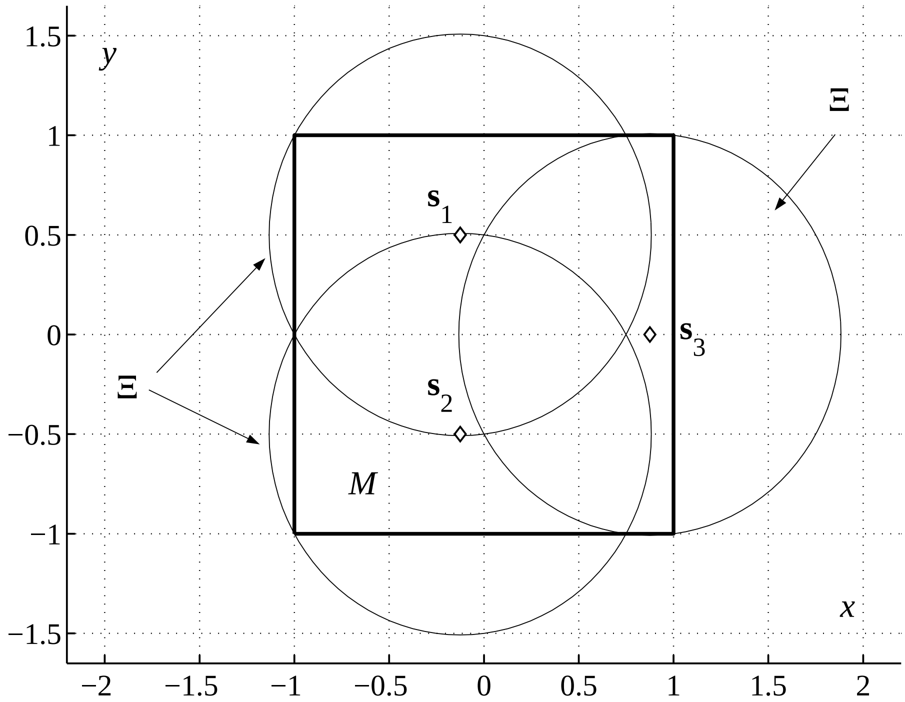

Рис. 4. Квадрат M, его наилучшая 3-сеть S и множество $\Xi(S,r)$ в примере 3

равнобедренный треугольник с высотой, опущенной из $\mathbf{s}_3$, равной длине $\|\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2\|=1$ стороны $[\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2]$. Хаусдорфово отклонение множества от наилучшей сети $r=h(M,S)=\sqrt{1\frac{1}{64}}\approx 1.0078$. Решением задачи 1 является объединение кругов $\Xi(S,r)$. Квадрат M, сеть S и множество $\Xi(S,r)$ представлены на рисунке 4.

Заметим, что в данном примере наилучшая сеть не является единственной. Квадрат M симметричен относительно поворота на $\pi/2$ (с центром в начале координат). Поэтому 3-сети, полученные путем поворота S на углы $\pi/2$, π и $3\pi/2$ вокруг точки $(0,0)$, тоже будут наилучшими.

Пример 4. Задан невыпуклый восьмиугольник M с вершинами

$$\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^{8}=\{(-1,-1.5),(-0.8,-0.5),(-1,1),(-0.25,0.75),(1.3,1),(0.9,0.3),(1,-1),(-0,-0.5)\}.$$

Требуется построить для него наилучшую 5-сеть и решить задачу 1 при $n=5$.

Полученный численно результат: наилучшая 5-сеть S имеет вид

$$S\approx\{(-0.6060,-0.9541),(0.6354,0.8928),(-0.0577,0.113),(0.7407,-0.3788),(-0.8052,0.3556)\}.$$

Хаусдорфово отклонение множества от наилучшей сети $r=h(M,S)\approx 0.6732$. Решением задачи 1 является объединение кругов $\Xi(S,r)$. Восьмиугольник M, сеть S и множество $\Xi(S,r)$ представлены на рисунке 5.

Пример 5. Задан невыпуклый девятиугольник M с вершинами

$$\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^{9}=\{(-2,0),(-1,1.3),(-0.8,-0.5),(0.3,0.6),(1,1),(2,0),(1,-1),(0.7,-0.5),(-1,-1)\}.$$

Требуется построить для него наилучшую 6-сеть и решить задачу 1 при $n=6$.

Полученный численно результат: наилучшая 6-сеть S имеет вид

$$S\approx\{(-0.7393,0.6152),(0.4964,0.488),(0.7622,-0.352),$$

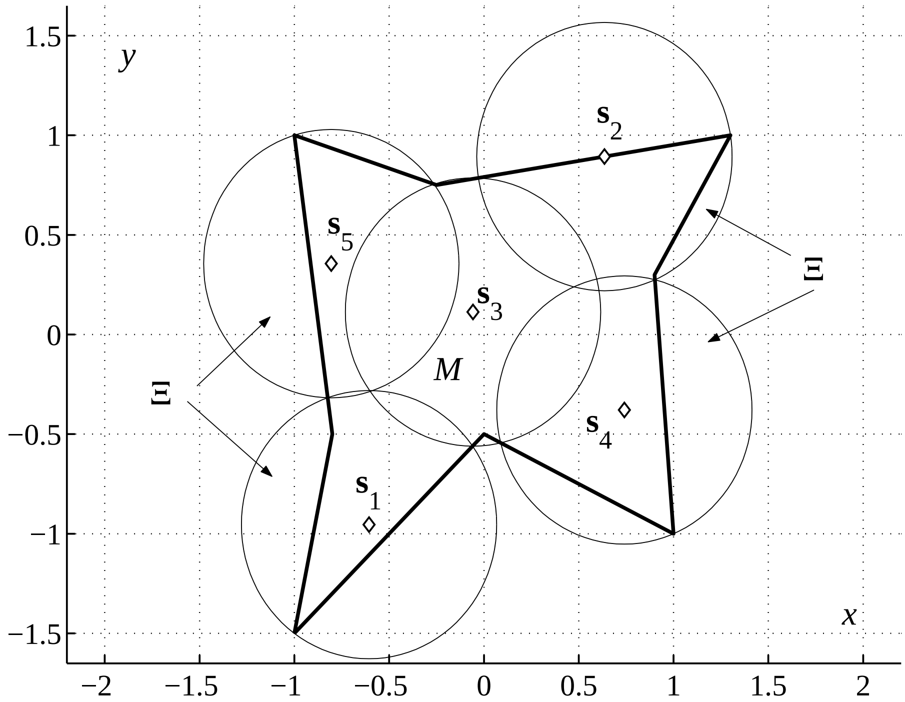

Рис. 5. Восьмиугольник M, его наилучшая 5-сеть S и множество $\Xi(S,r)$ в примере 4

$$(-0.5866,-0.4318),(-1.3557,-0.0325),(1.2906,0.1834)\}.$$

Хаусдорфово отклонение множества от наилучшей сети $r=h(M,S)\approx 0.7327$. Решением задачи 1 является объединение $\Xi(S,r)$ шести кругов радиуса r. Восьмиугольник M, сеть S и множество $\Xi(S,r)$ представлены на рисунке 6. Заметим, что точка $\mathbf{s}_1\in S$ не принадлежит многоугольнику M, но содержится в выпуклой оболочке $\operatorname{co} M$.

В примерах 3–5 аппроксимации наилучших n-сетей S состоят из чебышевских центров некоторых частей M_i заданного множества M. Круги, из которых состоит аппроксимация $\Xi(S,r)$, имеют радиус, равный чебышевскому радиусу этих подмножеств M_i. Расположение точек S кругов при достаточно больших n приближается к относительно равномерному на выпуклой оболочке $\operatorname{co} M$ множества M.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Ушаков В.Н., Латушкин Я.А. Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12. № 2. С. 178–194.
3. Ушаков В.Н., Успенский А.А. Об одном дополнении к свойству стабильности в дифференциальных играх // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2010. Т. 271. С. 299–318.
4. Ушаков В.Н., Успенский А.А., Малев А.Г. Оценка дефекта стабильности множества позиционного поглощения, подвергнутого дискриминантным преобразованиям // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 209–224.
5. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Лебедев П.Д. Дефект стабильности в игровой задаче о сближении в момент // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 87–103.
6. Лебедев П.Д., Ушаков А.В. Аппроксимация множеств на плоскости оптимальными наборами кругов // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 79–90.
7. Лебедев П.Д., Бухаров Д.С. Аппроксимация многоугольников наилучшими наборами кругов // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2013. № 3. С. 72–87.
8. Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhauser, 1997. 220 p.

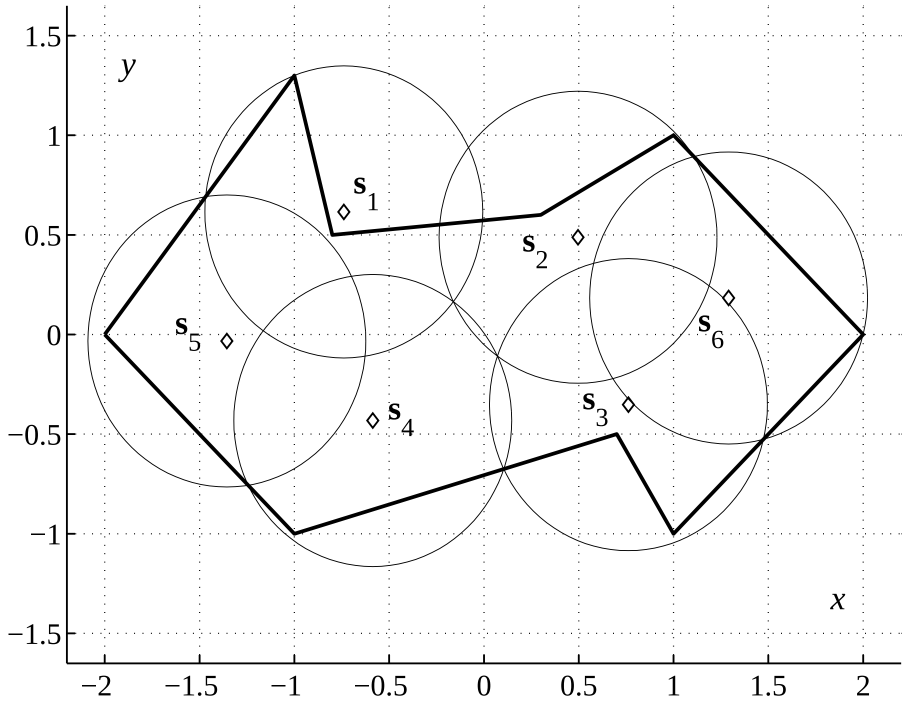

Рис. 6. Девятиугольник M, его наилучшая 6-сеть S и множество $\Xi(S, r)$ в примере 5

9. Гусев М.И. Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 82–94.

10. Гаркави А.Л. О существовании наилучшей сети и наилучшего поперечника множества в банаховом пространстве // Успехи математических наук. 1960. Т. 15. Вып. 2. С. 210–211.

11. Гаркави А.Л. О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1962. Т. 26. № 1. С. 87–106.

12. Гаркави А.Л. О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи математических наук. 1964. Т. 19. Вып. 6. С. 139–145.

13. Гаркави А.Л. О методе циклического спуска в задаче наилучшего приближения // Математические заметки. 1980. Т. 27. № 4. С. 549–558.

14. Сосов Е.Н. Об аппроксимативных свойствах множеств в специальном метрическом пространстве // Известия вузов. Математика. 1999. №. 6. С. 81–84.

15. Сосов Е.Н. Введение в метрическую геометрию. Часть 2. Учебное пособие. Казань: Казанский государственный университет, 2008. 29 с.

16. Сосов Е.Н. Метрическое пространство всех N-сетей геодезического пространства // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия: Физико-математические науки. 2009. Т. 151. Вып. 4. С. 136–149.

17. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.: Комкнига, 2006. 304 с.

18. Яглом И.М., Болтянский В.Г. Выпуклые фигуры. М.–Л.: ГТТИ, 1951. 343 с.

19. Пиявский С.А. Об оптимизации сетей // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. 1968. № 1. С. 68–80.

20. Брусов В.С., Пиявский С.А. Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1971. Т. 11. № 2. С. 304–312.

21. Галиев Ш.И., Карпова М.А. Оптимизация многократного покрытия ограниченного множества кругами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 4. С. 757–769.

22. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. М.: Мир, 1989. 478 с.

Поступила в редакцию 30.10.2013

Лебедев Павел Дмитриевич, к. ф.-м. н., научный сотрудник, Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: pleb@yandex.ru

Успенский Александр Александрович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: uspen@imm.uran.ru

Ушаков Владимир Николаевич, член-корреспондент РАН, Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: ushak@imm.uran.ru

P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii, V. N. Ushakov

Algorithms of the best approximations of the flat sets by the union of circles

Keywords: Chebyshev center, the best net, circle cover.

Mathematical Subject Classifications: 05B40

The article is devoted to the problem of constructing an optimal approximating circle-cover for the bounded flat set by the finite number of circles with equal radius. The problem is solved if the best n-net in meaning of Hausdorff metric is constructed for the considered set. Sufficient conditions of optimality of the n-nets are given. The best net-construction algorithm based on dividing of the set M into subsets and finding their Chebyshev centers is realized. This algorithm is proved to be efficient with the examples of sets with different geometry.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
2. Ushakov V.N., Latushkin Ya.A. The stability defect of sets in game control problems, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2006, vol. 12, no. 2, pp. 178–194.
3. Ushakov V.N., Uspenskii A.A. On a supplement to the stability property in differential games, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 271, issue 1, pp. 286–305.
4. Ushakov V.N., Uspenskii A.A., Malev A.G. Estimate of the stability defect for a positional absorption set subjected to discriminant transformations, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 209–224.
5. Ushakov V.N., Matviychuk A.R., Lebedev P.D. Defect of stability in game-pursuit problem, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 87–103.
6. Lebedev P.D., Ushakov A.V. Approximating sets on a plane with optimal sets of circles, *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, issue 3, pp. 79–90.
7. Lebedev P.D., Bukharov D.S. Approximation of polygons with the best set of circles, *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika*, 2013, no. 3, pp. 72–87.
8. Kurzhanski A.B., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*, Boston: Birkhauser, 1997, 220 p.
9. Gusev M.I. Estimates of reachable sets of multidimensional control systems with nonlinear interconnections, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2009, vol. 15, no. 4, pp. 82–94.
10. Garkavi A.L. Existence of the best net and the best width for set in a Banach space, *Usp. Mat. Nauk*, 1960, vol. 15, issue 2, pp. 210–211.
11. Garkavi A.L. On the optimal net and best cross-section of a set in a normed space, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 1962, vol. 26, no. 1, pp. 87–106.
12. Garkavi A.L. On the Chebyshev center and convex hull of a set, *Usp. Mat. Nauk*, 1964, vol. 19, issue 6, pp. 139–145.
13. Garkavi A.L. Method of cyclic descent in the problem of best approximation, *Mat. Zametki*, 1980, vol. 27, no. 4, pp. 549–558.

14. Sosov E.N. On approximation properties of sets in special metric spaces, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 1999, no. 6, pp. 81–84.

15. Sosov E.N. *Vvedenie v metricheskuyu geometriyu. Chast' 2* (Introduction to metric geometry. Part 2), Kazan: Kazan State University, 2008, 29 p.

16. Sosov E.N. Metric space of all N-nets of a geodesic space, *Uch. Zap. Kazan. Gos. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009, vol. 151, no. 4, pp. 136–149.

17. Hausdorff F. *Teoriya mnozhestv* (Set theory), Moscow: Komkniga, 2006, 304 p.

18. Yaglom I.M., Boltyanskii V.G. *Vypuklye figury* (Convex figures), Moscow–Leningrad: Gostekhteorizdat, 1951, 343 p.

19. Piyavskii S.A. On optimization of nets, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekh. Kibern.*, 1968, no. 1, pp. 68–80.

20. Brusov V.S., Piyavskii S.A. A computational algorithm for optimally covering a plane region, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1971, vol. 11, no. 2, pp. 304–312.

21. Galiev Sh.I., Karpova M.A. Optimization of a multiple covering of a bounded set with circles, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2010, vol. 50, no. 4, pp. 757–769.

22. Preparata F., Shamos M. *Computational geometry*, New York–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1985. Translated under the title *Vychislitel'naya geometriya*, Moscow: Mir, 1989, 478 p.

Received 30.10.2013

Lebedev Pavel Dmitrievich, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: pleb@yandex.ru

Uspenskii Aleksandr Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: uspen@imm.uran.ru

Ushakov Vladimir Nikolaevich, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: ushak@imm.uran.ru