УДК 517.518

© *Н. В. Латыпова*

ПОГРЕШНОСТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИИ МНОГОЧЛЕНАМИ ШЕСТОЙ СТЕПЕНИ НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Рассматривается биркгофова интерполяция функции двух переменных многочленами шестой степени на треугольнике. Подобные оценки автоматически переносятся на оценки погрешности метода конечных элементов, с которым тесно связаны. Оценки погрешности для предложенных элементов зависят только от диаметра разбиения и не зависят от углов триангуляции. Показана неулучшаемость полученных оценок. Неулучшаемость понимается в том смысле, что существует функция из заданного класса и существуют абсолютные положительные константы, не зависящие от триангуляции, такие, что для любого невырожденного треугольника справедливы оценки снизу.

Ключевые слова: погрешность интерполяции, кусочно-полиномиальная функция, триангуляция, метод конечных элементов.

Введение

Работа продолжает исследования [1–4], в которых рассматривались способы интерполяции типа Биркгофа многочленами (второй, третьей, четвертой и пятой степеней соответственно) на треугольнике, оценки погрешности в которых зависят только от наибольшей стороны треугольника и не зависят от углов триангуляции. Была показана неулучшаемость полученных оценок. Отметим, что построенные кусочно-полиномиальные функции глобально не являются непрерывными. Подобные конечные элементы успешно использовались при решении задач о движении несжимаемой жидкости (уравнения Навье–Стокса).

В настоящей работе предлагаются условия интерполяции типа Биркгофа многочленами шестой степени на треугольнике, оценки погрешности в которых зависят только от наибольшей стороны треугольника и не зависят от углов. Показана неулучшаемость полученных оценок. Неулучшаемость понимается в том смысле, что существует функция из заданного класса и существуют абсолютные положительные константы, не зависящие от триангуляции, такие, что для любого невырожденного треугольника справедливы оценки снизу.

§ 1. Постановка задачи

В силу локальности рассматриваемых интерполяционных условий, на которых построенный интерполяционный многочлен шестой степени будет определяться однозначно, ограничимся рассмотрением лишь одного треугольника. Пусть $\triangle$ — невырожденный треугольник в $\mathbb{R}^2$. При $i = 1, 2, 3$ через a_i будем обозначать вершины треугольника $\triangle$, через n_1 — единичную нормаль к стороне $[a_1, a_2]$, через b_1 — середину стороны $[a_1, a_2]$. Пусть точки b_2 и b_3 делят наибольшую сторону $[a_1, a_2]$ на три равные части, а точки b_i при $i = 4, 5, 6$ делят сторону $[a_1, a_2]$ на четыре равные части.

Далее без ограничения общности будем считать, что вершины треугольника $\triangle$ имеют координаты $a_1 = (b, 0)$, $a_2 = (-a, 0)$, $a_3 = (0, h)$, причем $0 < a \leqslant b$ и длина наибольшей стороны треугольника $\triangle$ равна $a + b = H$. Тогда середина стороны $[a_1, a_2]$ будет иметь координаты $b_1 = \left(\frac{b-a}{2}, 0\right)$, а остальные точки — $b_2 = \left(\frac{b-2a}{3}, 0\right)$, $b_3 = \left(\frac{2b-a}{3}, 0\right)$, $b_4 = \left(\frac{b-3a}{4}, 0\right)$, $b_5 = \left(\frac{b-a}{2}, 0\right)$, $b_6 = \left(\frac{3b-a}{4}, 0\right)$, при этом заметим, что $b_5 = b_1$.

Обозначим через

$$D_\eta f(x,y) = \eta^{(1)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \eta^{(2)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

производную по направлению $\eta=\left(\eta^{(1)},\eta^{(2)}\right)$, $\left(\eta^{(1)}\right)^2+\left(\eta^{(2)}\right)^2=1$, и пусть

$$W^{s+1}M=\Big\{f(x,y): D^{l}_{\eta_1,\ldots,\eta_l}f(x,y)\in\mathbb{C}(\triangle)\quad(0\leqslant l\leqslant s+1)\quad \text{и}$$
$$\forall\,(x,y)\in\triangle,\quad \forall\,\eta_1,\ldots,\eta_{s+1}\quad \left|D^{s+1}_{\eta_1,\ldots,\eta_{s+1}}f(x,y)\right|\leqslant M\Big\},$$

где $\mathbb{C}(\triangle)$ обозначает класс непрерывных функций на треугольнике $\triangle$.

Через $P_6(x,y)=P_6(f;x,y)$ будем обозначать многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит шести, удовлетворяющий интерполяционным условиям:

$$\frac{\partial^m f(a_i)}{\partial x^m}=\frac{\partial^m P_6(a_i)}{\partial x^m},\quad m=0,1,2\quad(i=1,2); \tag{1}$$

$$\frac{\partial^3 f(a_2)}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 P_6(a_2)}{\partial x^3}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial^{k+1} f(a_i)}{\partial x^k\partial y}=\frac{\partial^{k+1} P_6(a_i)}{\partial x^k\partial y},\quad k=0,1,2\quad(i=1,2); \tag{3}$$

$$D^6_{n_1^6}f(b_1)=D^6_{n_1^6}P_6(b_1); \tag{4}$$

$$D^5_{n_1^5}f(b_i)=D^5_{n_1^5}P_6(b_i)\quad(i=2,3); \tag{5}$$

$$D^4_{n_1^4}f(b_i)=D^4_{n_1^4}P_6(b_i)\quad(i=4,5,6); \tag{6}$$

$$\frac{\partial^m f(a_i)}{\partial y^m}=\frac{\partial^m P_6(a_i)}{\partial y^m},\quad m=2,3\quad(i=3); \tag{7}$$

$$\frac{\partial^6 f(a_i)}{\partial x^3\partial y^3}=\frac{\partial^6 P_6(a_i)}{\partial x^3\partial y^3}\quad(i=3); \tag{8}$$

$$\frac{\partial^4 f(a_i)}{\partial x\partial y^3}=\frac{\partial^4 P_6(a_i)}{\partial x\partial y^3}\quad(i=1,2); \tag{9}$$

$$\frac{\partial^{k+2} f(a_i)}{\partial x^k\partial y^2}=\frac{\partial^{k+2} P_6(a_i)}{\partial x^k\partial y^2},\quad k=1,2,3,4\quad(i=3). \tag{10}$$

Положим $e(x,y)=f(x,y)-P_6(x,y),\quad e_{i,j}(x,y)=\dfrac{\partial^{i+j}e(x,y)}{\partial x^i\partial y^j},\quad e_{i,j}=e_{i,j}(0,0).$

§ 2. Оценки погрешности интерполяции

Теорема 1. *Существуют такие абсолютные положительные константы $C_{i,j}$, что для любой функции $f\in W^7M$ и любого невырожденного треугольника $\triangle$, для интерполяционного многочлена $P_6(x,y)$, заданного условиями (1)–(10), имеют место следующие оценки:*

$$\left\|\frac{\partial^s e(x,y)}{\partial x^{s-j}\partial y^j}\right\|_{\mathbb{C}(\triangle)}\leqslant C_{s-j,j}MH^{7-s}\quad(0\leqslant j\leqslant 6,\quad j\leqslant s\leqslant 6). \tag{11}$$

С точностью до констант, не зависящих от триангуляции, на рассматриваемом классе функций оценки погрешности неулучшаемы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши имеем

$$e(x,y)=\sum_{i=0}^{6}\frac{y^i}{i!}\sum_{j=0}^{6-i}\frac{x^j}{j!}e_{j,i}+R(x,y), \tag{12}$$

где $R(x,y)=\displaystyle\int_0^y\frac{(y-t)^6}{6!}\frac{\partial^7 f(0,t)}{\partial t^7}\,dt+\sum_{i=0}^{6}\frac{y^i}{i!}\int_0^x\frac{(x-u)^{6-i}}{(6-i)!}\frac{\partial^7 f(u,0)}{\partial u^{7-i}\partial y^i}\,du.$

Далее через K_i и k_{ij} будем обозначать положительные константы, не обязательно равные, не зависящие от функции f и геометрических характеристик треугольника.

Условия (1)–(2) определяют одномерный многочлен Эрмита, используя остаточный член которого, получаем следующие оценки (см. [5, с. 173]):

$$|e_{0,0}| \leqslant k_{00} M a^4 b^3, \quad |e_{1,0}| \leqslant k_{10} M a^3 b^3, \quad |e_{2,0}| \leqslant k_{20} M a^2 b^3,$$

$$|e_{3,0}| \leqslant k_{30} M a b^3, \quad |e_{4,0}| \leqslant k_{40} M b^3, \quad |e_{5,0}| \leqslant k_{50} M b^2, \quad |e_{6,0}| \leqslant k_{60} M b.$$

Аналогично условия (3) определяют одномерный многочлен Эрмита, используя остаточный член которого, получаем следующие оценки (см. [5, с. 173]):

$$|e_{0,1}| \leqslant k_{01} M a^3 b^3, \quad |e_{1,1}| \leqslant k_{11} M a^2 b^3, \quad |e_{2,1}| \leqslant k_{21} M a b^3,$$

$$|e_{3,1}| \leqslant k_{31} M b^3, \quad |e_{4,1}| \leqslant k_{41} M b^2, \quad |e_{5,1}| \leqslant k_{51} M b.$$

Из условия (4) имеем $e_{0,6}\Big(\dfrac{b-a}{2}, 0\Big) = 0$. Откуда $e_{0,6} = -\dfrac{\partial^6}{\partial y^6} R\Big(\dfrac{b-a}{2}, 0\Big)$, а значит,

$$|e_{0,6}| \leqslant k_{06} M b.$$

Из условия (5) при $i = 2, 3$ получим

$$\begin{cases} e_{0,5} + \dfrac{2b-a}{3} e_{1,5} = -\dfrac{\partial^5}{\partial y^5} R\Big(\dfrac{2b-a}{3}, 0\Big), \\ e_{0,5} + \dfrac{b-2a}{3} e_{1,5} = -\dfrac{\partial^5}{\partial y^5} R\Big(\dfrac{b-2a}{3}, 0\Big). \end{cases}$$

Откуда следует

$$e_{1,5} = \frac{3}{b+a} \left[\frac{\partial^5}{\partial y^5} R\Big(\frac{b-2a}{3}, 0\Big) - \frac{\partial^5}{\partial y^5} R\Big(\frac{2b-a}{3}, 0\Big) \right],$$
$$e_{0,5} = \frac{2b-a}{3} \frac{\partial^5}{\partial y^5} R\Big(\frac{b-2a}{3}, 0\Big) - \frac{b-2a}{3} \frac{\partial^5}{\partial y^5} R\Big(\frac{2b-a}{3}, 0\Big);$$

здесь

$$|e_{0,5}| \leqslant k_{05} M b^2, \quad |e_{1,5}| \leqslant k_{15} M b.$$

Из условия (6) при $i = 4, 5, 6$ получим

$$\begin{cases} e_{0,4} + \dfrac{b-3a}{4} e_{1,4} + \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{b-3a}{4}\Big)^2 e_{2,4} = -\dfrac{\partial^4}{\partial y^4} R\Big(\dfrac{b-3a}{4}, 0\Big), \\ e_{0,4} + \dfrac{b-a}{2} e_{1,4} + \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{b-a}{2}\Big)^2 e_{2,4} = -\dfrac{\partial^4}{\partial y^4} R\Big(\dfrac{b-a}{2}, 0\Big), \\ e_{0,4} + \dfrac{3b-a}{4} e_{1,4} + \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{3b-a}{4}\Big)^2 e_{2,4} = -\dfrac{\partial^4}{\partial y^4} R\Big(\dfrac{3b-a}{4}, 0\Big). \end{cases}$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{b-3a}{4} & \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{b-3a}{4}\Big)^2 \\ 1 & \dfrac{b-a}{2} & \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{b-a}{2}\Big)^2 \\ 1 & \dfrac{3b-a}{4} & \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{3b-a}{4}\Big)^2 \end{vmatrix} = \frac{(b+a)^3}{64} \neq 0.$$

Так как $\left|\dfrac{\partial^4}{\partial y^4}R(b_i)\right| \leqslant KMb^3$ при $i = 4, 5, 6$, то $|\Delta_j| \leqslant KMb^{7-j}$ $(j = 1, 2, 3)$, где Δ_j — это определитель Δ, j-ый столбец которого заменен правой частью системы. Тогда, используя формулы Крамера, имеем $e_{j-1,4} = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, $j = 1, 2, 3$. Откуда следует

$$|e_{0,4}| \leqslant k_{04}Mb^3, \quad |e_{1,4}| \leqslant k_{14}Mb^2, \quad |e_{2,4}| \leqslant k_{24}Mb.$$

Из условий (7) при $m = 3, 2$ получим

$$\begin{cases} e_{0,3} + he_{0,4} + \dfrac{h^2}{2}e_{0,5} + \dfrac{h^3}{6}e_{0,6} = -\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}R\,(0,h)\,, \\ e_{0,2} + he_{0,3} + \dfrac{h^2}{2}e_{0,4} + \dfrac{h^3}{6}e_{0,5} + \dfrac{h^4}{24}e_{0,6} = -\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}R\,(0,h)\,. \end{cases}$$

Откуда

$$e_{0,3} = -he_{0,4} - \frac{h^2}{2}e_{0,5} - \frac{h^3}{6}e_{0,6} - \frac{\partial^3}{\partial y^3}R\,(0,h)\,,$$
$$e_{0,2} = -he_{0,3} - \frac{h^2}{2}e_{0,4} - \frac{h^3}{6}e_{0,5} - \frac{h^4}{24}e_{0,6} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}R\,(0,h)\,.$$

Далее, учитывая оценки, полученные выше для $e_{0,4}$, $e_{0,5}$ и $e_{0,6}$, имеем

$$|e_{0,3}| \leqslant k_{03}Mb^3h, \quad |e_{0,2}| \leqslant k_{02}Mb^3h^2.$$

Из условия (8) имеем $e_{3,3} = -\dfrac{\partial^6}{\partial x^3\partial y^3}R(0,h)$. Откуда $|e_{3,3}| \leqslant k_{33}Mh$.

Используя условия (9) при $i = 1, 2$, получим

$$\begin{cases} e_{1,3} - ae_{2,3} + \dfrac{a^2}{2}e_{3,3} = -\dfrac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}R\,(-a,0) \doteq A_1, \\ e_{1,3} + be_{2,3} + \dfrac{b^2}{2}e_{3,3} = -\dfrac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}R\,(b,0) \doteq A_2, \end{cases}$$

где значок «$\doteq$» означает «по определению». Тогда

$$\begin{cases} e_{1,3} = \dfrac{1}{a+b}(bA_1 + aA_2), \\ e_{2,3} = \dfrac{1}{a+b}(A_2 - A_1). \end{cases}$$

Так как $|A_1| \leqslant K_1Ma^3$, $\quad |A_2| \leqslant K_2Mb^3$, то имеем

$$|e_{1,3}| \leqslant k_{13}Mab^2, \quad |e_{2,3}| \leqslant k_{23}Mb^2.$$

Из условия (10) при $k = 4$ получим $e_{4,2} = -\dfrac{\partial^6}{\partial x^4\partial y^2}R(0,h)$. Тогда $|e_{4,2}| \leqslant k_{42}Mh$.

Из условия (10) при $k = 2, 3$ получим

$$e_{2,2} + he_{2,3} + \frac{h^2}{2}e_{2,4} = -\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}R(0,h), \qquad e_{3,2} + he_{3,3} = -\frac{\partial^5}{\partial x^3\partial y^2}R(0,h).$$

Откуда

$$e_{2,2} = -he_{2,3} - \frac{h^2}{2}e_{2,4} - \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}R(0,h), \qquad e_{3,2} = -he_{3,3} - \frac{\partial^5}{\partial x^3\partial y^2}R(0,h).$$

Далее, учитывая оценки, полученные выше для $e_{2,3}$, $e_{2,4}$ и $e_{3,3}$, имеем

$$|e_{2,2}| \leqslant k_{22}Mb^2h, \quad |e_{3,2}| \leqslant k_{32}Mh^2.$$

Из условия (10) при $k = 1$ получим

$$e_{1,2} + he_{1,3} + \frac{h^2}{2}e_{1,4} + \frac{h^3}{6}e_{1,5} = -\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}R(0,h).$$

Откуда

$$e_{1,2} = -he_{1,3} - \frac{h^2}{2}e_{1,4} - \frac{h^3}{6}e_{1,5} - \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}R(0,h).$$

Далее, учитывая оценки, полученные выше для $e_{1,3}$, $e_{1,4}$ и $e_{1,5}$, имеем $|e_{1,2}| \leqslant k_{12}Mab^2h$.

Подставляя оценки для $e_{i,j}$ в разложение Тейлора (12) и вычисляя частные производные с первого по шестой порядок по переменным x и y, получим справедливость оценок (11) теоремы. И первая часть теоремы доказана.

Замечание 1. Если вместо условия (2) взять условие $\dfrac{\partial^3 f(a_1)}{\partial x^3} = \dfrac{\partial^3 P_6(a_1)}{\partial x^3}$, или $f(c) = P_6(c)$, где $c \in (a_2, a_1)$, то получатся оценки, аналогичные (11).

Замечание 2. Если вместо условия (9) рассмотреть условие $\dfrac{\partial^3 f(a_i)}{\partial y^3} = \dfrac{\partial^3 P_6(a_i)}{\partial y^3}$ при $i = 1, 2$, то вид оценок (11) не изменится.

§ 3. Неулучшаемость оценок

В этом параграфе покажем, что для рассмотренного способа интерполяции существуют такие константы $C^*_{i,j} > 0$ и функция $f^* \in W^7M$, что для $e(x,y) = f^*(x,y) - P_6(f^*;x,y)$ справедливы следующие неравенства:

$$\left\| \frac{\partial^s e(x,y)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\|_{\mathbb{C}(\triangle)} \geqslant C^*_{s-j,j} M H^{7-s} \quad (0 \leqslant j \leqslant 6, \quad j \leqslant s \leqslant 6). \tag{13}$$

Рассмотрим равнобедренный треугольник, положив $a = b = \dfrac{H}{2}$. В качестве функции возьмем

$$\begin{aligned} f^*_1(x,y) = M(b+x)^4(b-x)^3 + M(b+x)^3(b-x)^3 y + \\ + M(b+x)^2(b-x)y^4 + M(b+x)(b-x)y^5 + M(b+x)y^6 \end{aligned} \tag{14}$$

и построим соответствующий интерполяционный многочлен:

$$\begin{aligned} P_6(f^*_1;x,y) = p_{0,0} + p_{1,0}x + p_{2,0}x^2 + p_{3,0}x^3 + p_{4,0}x^4 + p_{5,0}x^5 + p_{6,0}x^6 + p_{0,1}y + p_{1,1}xy + p_{2,1}x^2y + \\ + p_{3,1}x^3y + p_{4,1}x^4y + p_{5,1}x^5y + p_{0,2}y^2 + p_{1,2}xy^2 + p_{2,2}x^2y^2 + p_{3,2}x^3y^2 + p_{4,2}x^4y^2 + p_{0,3}y^3 + \\ + p_{1,3}xy^3 + p_{2,3}x^2y^3 + p_{3,3}x^3y^3 + p_{0,4}y^4 + p_{1,4}xy^4 + p_{2,4}x^2y^4 + p_{0,5}y^5 + p_{1,5}xy^5 + p_{0,6}y^6. \end{aligned}$$

Коэффициенты $p_{i,j}$ найдем из условий интерполяции.

Из условий (1)–(2) имеем однородную систему

$$\begin{cases} p_{0,0} + bp_{1,0} + b^2p_{2,0} + b^3p_{3,0} + b^4p_{4,0} + b^5p_{5,0} + b^6p_{6,0} = 0, \\ p_{0,0} - bp_{1,0} + b^2p_{2,0} - b^3p_{3,0} + b^4p_{4,0} - b^5p_{5,0} + b^6p_{6,0} = 0, \\ p_{1,0} + 2bp_{2,0} + 3b^2p_{3,0} + 4b^3p_{4,0} + 5b^4p_{5,0} + 6b^5p_{6,0} = 0, \\ p_{1,0} - 2bp_{2,0} + 3b^2p_{3,0} - 4b^3p_{4,0} + 5b^4p_{5,0} - 6b^5p_{6,0} = 0, \\ 2p_{2,0} + 6bp_{3,0} + 12b^2p_{4,0} + 20b^3p_{5,0} + 30b^4p_{6,0} = 0, \\ 2p_{2,0} - 6bp_{3,0} + 12b^2p_{4,0} - 20b^3p_{5,0} + 30b^4p_{6,0} = 0, \\ 6p_{3,0} - 24bp_{4,0} + 60b^2p_{5,0} - 120b^3p_{6,0} = 0, \end{cases}$$

определитель которой отличен от нуля. Следовательно, система имеет только нулевое решение:

$$p_{0,0} = p_{1,0} = p_{2,0} = p_{3,0} = p_{4,0} = p_{5,0} = p_{6,0} = 0. \tag{15}$$

Аналогичным образом из условий (3) получаем следующую однородную систему:

$$\begin{cases} p_{0,1} + bp_{1,1} + b^2 p_{2,1} + b^3 p_{3,1} + b^4 p_{4,1} + b^5 p_{5,1} = 0, \\ p_{0,1} - bp_{1,1} + b^2 p_{2,1} - b^3 p_{3,1} + b^4 p_{4,1} - b^5 p_{5,1} = 0, \\ p_{1,1} + 2bp_{2,1} + 3b^2 p_{3,1} + 4b^3 p_{4,1} + 5b^4 p_{5,1} = 0, \\ p_{1,1} - 2bp_{2,1} + 3b^2 p_{3,1} - 4b^3 p_{4,1} + 5b^4 p_{5,1} = 0, \\ 2p_{2,1} + 6bp_{3,1} + 12b^2 p_{4,1} + 20b^3 p_{5,1} = 0, \\ 2p_{2,1} - 6bp_{3,1} + 12b^2 p_{4,1} - 20b^3 p_{5,1} = 0, \end{cases}$$

определитель которой отличен от нуля. Следовательно, система имеет только нулевое решение:

$$p_{0,1} = p_{1,1} = p_{2,1} = p_{3,1} = p_{4,1} = p_{5,1} = 0. \tag{16}$$

Из условия (4), учитывая, что $b_1 = \dfrac{b-a}{2} = 0$, имеем $p_{0,6} = Mb$.

Из условия (5) при $i = 2, 3$ получим

$$\begin{cases} p_{0,5} + \dfrac{b}{3} p_{1,5} = \dfrac{8}{9} Mb^2, \\ p_{0,5} - \dfrac{b}{3} p_{1,5} = \dfrac{8}{9} Mb^2, \end{cases}$$

откуда следует $p_{0,5} = \dfrac{8}{9} Mb^2, \quad p_{1,5} = 0$.

Из условия (6) при $i = 4, 5, 6$ получим

$$\begin{cases} p_{0,4} - \dfrac{b}{2} p_{1,4} + \dfrac{b^2}{4} p_{2,4} = \dfrac{75}{64} Mb^3, \\ p_{0,4} = Mb^3, \\ p_{0,4} + \dfrac{b}{2} p_{1,4} + \dfrac{b^2}{4} p_{2,4} = \dfrac{45}{64} Mb^3. \end{cases}$$

Определитель системы $\Delta = \dfrac{b^3}{4} \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение:

$$p_{0,4} = Mb^3, \quad p_{1,4} = \frac{15}{16} Mb^2, \quad p_{2,4} = -Mb.$$

Из условий (7) получим

$$\begin{cases} 2p_{0,2} + 6hp_{0,3} + 12h^2 p_{0,4} + 20h^3 p_{0,5} + 30h^4 p_{0,6} = 30Mbh^4 + 20Mb^2h^3 + 12Mb^3h^2, \\ 6p_{0,3} + 24hp_{0,4} + 60h^2 p_{0,5} + 120h^3 p_{0,6} = 120Mbh^3 + 60Mb^2h^2 + 24Mb^3h. \end{cases}$$

Откуда, учитывая найденные значения $p_{0,j}$ при $j = 4, 5, 6$, получаем

$$p_{0,2} = -\frac{50}{9} Mb^2h^3, \quad p_{0,3} = \frac{10}{9} Mb^2h^2.$$

Из условия (8) сразу найдем коэффициент $p_{3,3} = -4Mh$.

Из условия (9) получим систему

$$\begin{cases} p_{1,3} - 2bp_{2,3} + 3b^2 p_{3,3} = 0, \\ p_{1,3} + 2bp_{2,3} + 3b^2 p_{3,3} = 0. \end{cases}$$

Используя найденное значение $p_{3,3}$, имеем $p_{2,3} = 0$, $\quad p_{1,3} = 12Mb^2h$.

Из условия (10) при $k = 4$ получим, что $p_{4,2} = -Mb$. Из условия (10) при $k = 1, 2, 3$ получим

$$2p_{1,2} + 6hp_{1,3} + 12h^2p_{1,4} + 20h^3p1,5 = 30Mh^4 + 12Mb^2h^2,$$
$$2p_{2,2} + 6hp_{2,3} + 12h^2p_{2,4} = -20Mh^3 - 12Mbh^2,$$
$$2p_{3,2} + 6hp_{3,3} = -12Mh^2.$$

Откуда, учитывая уже найденные значения, имеем

$$p_{1,2} = -\frac{285}{8}Mb^2h^2 + 15Mh^4, \quad p_{2,2} = -10Mh^3, \quad p_{3,2} = 6Mh^2.$$

Подставив найденные коэффициенты в $P_6(f_1^*; x, y)$, преобразуем функцию

$$e(x, y) = f_1^*(x, y) - P_6(f_1^*; x, y).$$

Оценим значение функции $e(x, y)$ и ее частных производных:

$$\|e(x,y)\| \geqslant |e\,(0,0)| = Mb^7, \qquad \left\|\frac{\partial^6 e(x,y)}{\partial x^5 \partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^6 e}{\partial x^5 \partial y}\Big(\frac{b}{2},0\Big)\right| = 360Mb,$$
$$\left\|\frac{\partial e(x,y)}{\partial x}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial e}{\partial x}(0,0)\right| = Mb^6, \qquad \left\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial y^2}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^2 e}{\partial y^2}\,(b,0)\right| \geqslant 2Mb^5,$$
$$\left\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial x^2}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}\,(0,0)\right| = 6Mb^5, \qquad \left\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial x \partial y^2}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^3 e}{\partial x \partial y^2}(b,0)\right| \geqslant 8Mb^4,$$
$$\left\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial x^3}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^3 e}{\partial x^3}(0,0)\right| = 16Mb^4, \qquad \left\|\frac{\partial^4 e(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^4 e}{\partial x^2 \partial y^2}(b,0)\right| \geqslant 24Mb^3,$$
$$\left\|\frac{\partial^4 e(x,y)}{\partial x^4}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^4 e}{\partial x^4}\,(b,0)\right| = 352Mb^3, \qquad \left\|\frac{\partial^5 e(x,y)}{\partial x^3 \partial y^2}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^5 e}{\partial x^3 \partial y^2}(b,0)\right| \geqslant 24Mb^2,$$
$$\left\|\frac{\partial^5 e(x,y)}{\partial x^5}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^5 e}{\partial x^5}(0,0)\right| = 68Mb^2, \qquad \left\|\frac{\partial^6 e(x,y)}{\partial x^4 \partial y^2}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^6 e}{\partial x^4 \partial y^2}(0,0)\right| = 24Mb,$$
$$\left\|\frac{\partial^6 e(x,y)}{\partial x^6}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^6 e}{\partial x^6}(0,0)\right| = 336Mb, \qquad \left\|\frac{\partial^4 e(x,y)}{\partial y^4}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^4 e}{\partial y^4}(b,0)\right| = \frac{45}{2}Mb^3,$$
$$\left\|\frac{\partial e(x,y)}{\partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial e}{\partial y}(0,0)\right| = Mb^6, \qquad \left\|\frac{\partial^5 e(x,y)}{\partial x \partial y^4}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^5 e}{\partial x \partial y^4}(0,0)\right| \geqslant \frac{3}{2}Mb^2,$$
$$\left\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial x \partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^2 e}{\partial x \partial y}\Big(\frac{b}{2},0\Big)\right| = \frac{27}{16}Mb^5, \qquad \left\|\frac{\partial^6 e(x,y)}{\partial x^2 \partial y^4}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^6 e}{\partial x^2 \partial y^4}(-b,0)\right| \geqslant 144Mb,$$
$$\left\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial x^2 \partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^3 e}{\partial x^2 \partial y}(0,0)\right| = 6Mb^4, \qquad \left\|\frac{\partial^5 e(x,y)}{\partial y^5}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^5 e}{\partial y^5}(b,0)\right| = \frac{320}{3}Mb^2,$$
$$\left\|\frac{\partial^4 e(x,y)}{\partial x^3 \partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^4 e}{\partial x^3 \partial y}\Big(\frac{b}{2},0\Big)\right| = 21Mb^3, \qquad \left\|\frac{\partial^6 e(x,y)}{\partial x \partial y^5}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^6 e}{\partial x \partial y^5}\Big(\frac{b}{2},0\Big)\right| = 12Mb,$$
$$\left\|\frac{\partial^5 e(x,y)}{\partial x^4 \partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^5 e}{\partial x^4 \partial y}(0,0)\right| = 72Mb^2, \qquad \left\|\frac{\partial^6 e(x,y)}{\partial y^6}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^6 e}{\partial y^6}\Big(\frac{b}{2},y\Big)\right| = 360Mb.$$

Заметим, что здесь отсутствуют оценки для $\left\|\dfrac{\partial^{k+3} e(x,y)}{\partial x^k \partial y^3}\right\|$ при $0 \leqslant k \leqslant 3$. Чтобы их получить, рассмотрим другую функцию:

$$f_2^*(x, y) = My^3(b + x)^4 + My^2(b - x)^2(b + x)^3; \tag{17}$$

построим соответствующий интерполяционный многочлен $P_6(f_2^*; x, y)$.

Из условий (1)–(2) аналогичным образом получим выполнение (15), а из условия (3) имеем выполнение (16).

Из условия (4) имеем $p_{0,6} = 0$.

Из условия (5) при $i = 2, 3$ получим

$$\begin{cases} p_{0,5} + \dfrac{b}{3} p_{1,5} = 0, \\ p_{0,5} - \dfrac{b}{3} p_{1,5} = 0, \end{cases}$$

откуда следует $p_{0,5} = p_{1,5} = 0$.

Из условия (6) при $i = 4, 5, 6$ получим

$$\begin{cases} p_{0,4} - \dfrac{b}{2} p_{1,4} + \dfrac{b^2}{4} p_{2,4} = 0, \\ p_{0,4} = 0, \\ p_{0,4} + \dfrac{b}{2} p_{1,4} + \dfrac{b^2}{4} p_{2,4} = 0. \end{cases}$$

Определитель системы $\Delta = \dfrac{b^3}{4} \neq 0$. А значит, система имеет нулевое решение:

$$p_{0,4} = p_{1,4} = p_{2,4} = 0.$$

Из условий (7) получим

$$\begin{cases} 2p_{0,2} + 6hp_{0,3} + 12h^2 p_{0,4} + 20h^3 p_{0,5} + 30h^4 p_{0,6} = 2Mb^5 + 6Mb^4 h, \\ 6p_{0,3} + 24hp_{0,4} + 60h^2 p_{0,5} + 120h^3 p_{0,6} = 6Mb^4. \end{cases}$$

Откуда, учитывая найденные значения $p_{0,j} = 0$ при $j = 4, 5, 6$, получаем

$$p_{0,2} = Mb^5, \quad p_{0,3} = Mb^4.$$

Из условия (8) найдем коэффициент $p_{3,3} = 4Mb$.

Из условия (9) получим систему

$$\begin{cases} p_{1,3} - 2bp_{2,3} + 3b^2 p_{3,3} = 32Mb^3, \\ p_{1,3} + 2bp_{2,3} + 3b^2 p_{3,3} = 0. \end{cases}$$

Используя найденное значение $p_{3,3}$, имеем $p_{2,3} = 8Mb^2, \quad p_{1,3} = 4Mb^3$.

Из условия (10) при $k = 4$ получим, что $p_{4,2} = M(b + h)$. Из условия (10) при $k = 1, 2, 3$ получим

$$2p_{1,2} + 6hp_{1,3} + 12h^2 p_{1,4} + 20h^3 p1,5 = 24Mhb^3 + 2Mb^4,$$
$$2p_{2,2} + 6hp_{2,3} + 12h^2 p_{2,4} = -4Mb^3 + 36Mhb^2,$$
$$2p_{3,2} + 6hp_{3,3} = -4Mb^2 + 24Mbh.$$

Откуда, учитывая уже найденные значения, имеем

$$p_{1,2} = Mb^4, \quad p_{2,2} = -Mb^3 - 6Mb^2 h, \quad p_{3,2} = 2Mb^2.$$

Подставив найденные коэффициенты в $P_6(f_2^*; x, y)$, оценим недостающие значения частных производных функции $e(x, y)$. Итак,

$$\left\| \frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial y^3} \right\| \geqslant \left| \frac{\partial^3 e}{\partial y^3}(-b, y) \right| = 6Mb^4, \qquad \left\| \frac{\partial^5 e(x,y)}{\partial x^2 \partial y^3} \right\| \geqslant \left| \frac{\partial^5 e}{\partial x^2 \partial y^3}(0, y) \right| = 120Mb^2,$$
$$\left\| \frac{\partial^4 e(x,y)}{\partial x \partial y^3} \right\| \geqslant \left| \frac{\partial^4 e}{\partial x \partial y^3}\Big(-\frac{b}{2}, y\Big) \right| = 9Mb^3, \quad \left\| \frac{\partial^6 e(x,y)}{\partial x^3 \partial y^3} \right\| \geqslant \left| \frac{\partial^5 6}{\partial x^3 \partial y^3}\Big(\frac{b}{2}, y\Big) \right| = 72Mb.$$

Объединяя полученные результаты и делая замену $b = \dfrac{H}{2}$, получаем оценки снизу, которые имеют вид (13) и совпадают с оценками сверху. Таким образом, теорема полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Латыпова Н.В. Погрешность кусочно-параболической интерполяции на треугольнике // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 91–97.
2. Латыпова Н.В. Независимость оценок погрешности интерполяции кубическими многочленами от углов треугольника // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 3. С. 233–241.
3. Латыпова Н.В. Независимость оценок погрешности интерполяции многочленами четвертой степени от углов треугольника // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 3. С. 64–74.
4. Латыпова Н.В. Независимость оценок погрешности интерполяции многочленами пятой степени от углов треугольника // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 53–64.
5. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962. 464 с.

Поступила в редакцию 19.10.2013

Латыпова Наталья Владимировна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: nlatypova@udm.ru

N. V. Latypova
Error of interpolation by sixth-degree polynomials on a triangle

Keywords: error of interpolation, piecewise polynomial function, triangulation, finite element method.

Mathematical Subject Classifications: 41A05

The paper considers Birkhoff-type triangle-based interpolation to a two-variable function by sixth-degree polynomials. Similar estimates are automatically transferred to error estimates of related finite element method. The error estimates for the given elements depend only on the decomposition diameter, and do not depend on triangulation angles. We show that the estimates obtained are unimprovable. Unimprovability is understood in a following sense: there exists function from the given class and there exist absolute positive constants independent of triangulation such that estimates from below are valid for any nondegenerate triangle.

REFERENCES

1. Latypova N.V. Error of interpolation by a piecewise parabolic polynomial on a triangle, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 3, pp. 91–97.
2. Latypova N.V. Independence of error estimates of interpolation by cubic polynomials from the angles of a triangle, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 3, pp. 233–241.
3. Latypova N.V. Independence of interpolation error estimates by fourth-degree polynomials on angles in a triangle, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 3, pp. 64–74.
4. Latypova N.V. Independence of interpolation error estimates by fifth-degree polynomials on angles in a triangle, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 53–64.
5. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Metody vychislenii* (Computing Methods), vol. 1, Moscow: Fizmatgiz, 1962, 464 p.

Received 19.10.2013

Latypova Natal'ya Vladimirovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: nlatypova@udm.ru