

УДК 519.63

© А. С. Караваев, С. П. Копысов

**ПЕРЕСТРОЕНИЕ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ
ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ И СМЕШАННЫХ СЕТОК ¹**

В статье рассматриваются методы перестроения неструктурированных четырехугольных и смешанных сеток. Описываются варианты определения шаблонов перестроения «на девять ячеек» в случае неструктурированной четырехугольной сетки, обеспечивающие выпуклость ячеек конечной сетки. Для контроля максимально допустимого угла сетки предложены шаблоны перестроения ячеек плохого качества. Разработан алгоритм перестроения неструктурированной смешанной сетки, приведены примеры работы алгоритма, показывающие улучшение качества сетки в сравнении с известными методами.

Ключевые слова: неструктурированные сетки, смешанные сетки, перестроение сеток, шаблоны перестроений, геометрически адаптивные сетки.

Введение

Перестроение сетки используется для уточнения границы (геометрически адаптивные сетки) или искомого решения на определенной подобласти, в некоторых случаях их можно рассматривать как один из способов построения новой расчетной сетки. Необходимыми условиями такой операции являются конформность сетки (согласованность узлов в соседних ячейках) и сохранение выпуклости ячеек после перестроения. Важным условием является также постоянство максимальных и минимальных величин углов в ячейках при перестроении.

Как правило, в методе конечных элементов для задач на плоскости используется деление области на треугольные и четырехугольные ячейки. При этом расчетные сетки содержат ячейки одного типа, однако применение смешанных сеток, состоящих из ячеек обоих типов, находит всё большее применение. Последние могут возникать в результате работы непрямых методов построения четырехугольных сеток, а также путем перестроения начальной сетки, содержащей ячейки только одного вида. Соответственно, алгоритмы перестроения сеток можно разделить на две группы. К первой относятся методы, генерирующие полностью треугольную или четырехугольную сетку, они являются основными и наиболее часто используются в расчетах. Вторая группа — это алгоритмы, в результате работы которых получается сетка, состоящая из треугольных и четырехугольных ячеек. Такие способы перестроения применяются в приложениях, где использование смешанных сеток является допустимым; как правило с помощью таких перестроений улучшают качество ячеек исходной сетки.

Для методов перестроения треугольных сеток [1–3] существует два основных варианта или шаблона перестроения: бисекция — деление на два треугольника (по «большой» стороне или «новому» узлу) и регулярное перестроение — на четыре треугольника. В отношении четырехугольных сеток известно несколько схем перестроения, удовлетворяющих отмеченным выше требованиям. Однако, данные методы ориентированы на структурированные сетки, когда узлы и ячейки сетки строго упорядочены, размер и форма четырехугольников близки к идеальным показателям. Среди способов перестроения неструктурированной четырехугольной сетки основными можно считать перестроения на четыре и девять ячеек, предложенные Р. Шнейдером [4]. Используя идеи Шнейдера, сходную методику перестроения по шаблонам предложил Р. Гаримелла [5]. Также можно отметить работу М. Эбейды, Д. Оуэнса и др. [6] по модифицированию перестроения на четыре ячейки Шнейдера для случая неструктурированных сеток. Способы перестроения смешанных сеток на данный момент практически не изучены.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 13-01-00101, 12-07-31114).

Далее будут рассмотрены основные алгоритмы и предлагаемые модификации для перестроения неструктурированных четырехугольных и смешанных сеток. Работа имеет следующую структуру: сначала вводятся некоторые определения и понятия, относящиеся к сеткам; в § 3 рассматриваются методы перестроения неструктурированных четырехугольных сеток и предлагается модифицированная версия алгоритма перестроения Гаримелла; § 4 посвящен перестроению смешанных сеток, описывается разработанный алгоритм перестроения неструктурированной смешанной сетки; в § 5 рассматриваются шаблоны для перестроения четырехугольных ячеек с ограничениями и приводятся практические результаты работы.

§ 1. Перестроение неструктурированных сеток

Методы перестроения неструктурированных сеток можно разделить на следующие группы: уменьшение шага сетки и увеличение шага сетки (огрубления). В данной работе методы увеличения шага сетки не рассматриваются. Уменьшение шага сетки достигается путем деления ячеек, а также движением узлов сетки к границе области.

Обозначим через \mathcal{T} неструктурированную сетку, которая состоит из множества ее узлов $\mathcal{N} = \bigcup_{i=1}^N n_i$, множества ребер $\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^E e_i$ и множества ячеек $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^M m_i$. Максимальный и минимальный углы ячеек сетки определим через Θ_{max} , Θ_{min} соответственно.

Определение 1. Ячейка m называется неконформной, если существует ребро $e \in m$, $e = [n_1, n_2]$, и существует узел n , лежащий на данном ребре, такой, что $n \neq n_1$, $n \neq n_2$.

Определение 2. Неструктурированная сетка \mathcal{T} является согласованной (конформной), если любые две различные соединенные ячейки сетки пересекаются только в одном узле либо ребре, то есть \mathcal{T} не содержит неконформные ячейки.

Согласованная сетка является необходимым условием проведения дальнейших расчетов в методе конечных элементов. Практически все способы деления ячеек изменяют конформность сетки, и операция перестроения содержит два этапа: деление уточняемых ячеек (*уточняющее перестроение*) и деление ячеек для обеспечения конформности сетки (*согласующее перестроение*). После разделения каждой уточняемой ячейки делаются появившиеся неконформные ячейки. Деление неконформных ячеек завершается на этапе согласующего перестроения. Перестроение является конформным, когда обеспечивается конформность результирующей сетки после перестроения.

Необходимым параметром операции перестроения является уровень деления каждой выбранной ячейки.

Определение 3. Уровнем деления ячейки (ребра) s назовем число итераций деления данной ячейки (ребра) в процессе перестроения сетки.

Каждая уточняемая ячейка будет иметь уровень деления $s > 0$. На рисунке 1 приведены примеры перестроения четырехугольной сетки. В обоих случаях нижней ячейке был присвоен уровень деления $s = 2$, в результате она была разбита на 27 новых четырехугольников. Верхняя ячейка имела уровень деления, равный нулю, но была перестроена для обеспечения конформности сетки. Отметим, что как для первого, так и для второго случая в качестве ячеек согласующего перестроения были использованы только соседние четырехугольники, то есть область согласующего перестроения не зависела от уровня деления уточняемой ячейки.

Одной из характеристик алгоритмов по перестроению сетки является независимость максимального и минимального углов сетки от уровней деления ее ячеек (см. рис. 1).

Определение 4. Перестроение является устойчивым, если минимальный угол $\Theta_{min}^{(s)}$ перестроенной сетки не зависит от уровня деления s и больше определенного порогового значения Θ^* : $\Theta_{min}^{(s)} \geq \Theta^*$, $s \rightarrow \infty$.

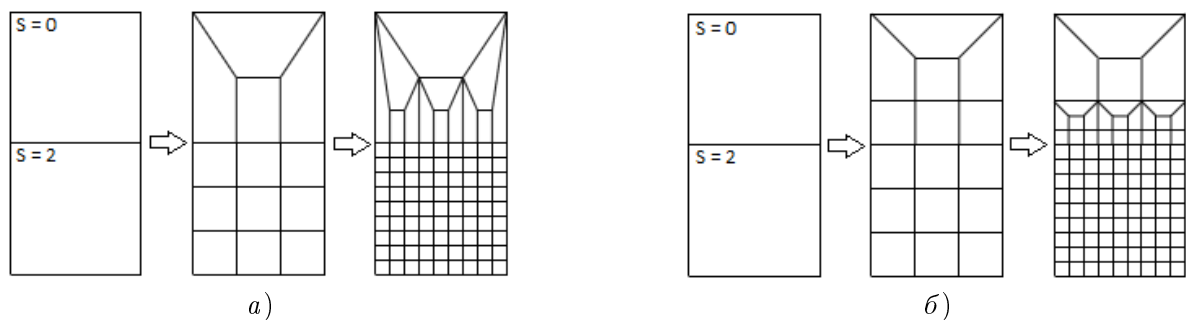


Рис. 1. Перестроение сеток: а) неустойчивое; б) устойчивое

Устойчивость перестроения во многом определяет характеристики качества результирующей сетки, что особенно проявляется в случаях многократного деления выбранной области (для уровней деления $s \geq 2$). Погрешность вычисления на расчетных сетках зависит от изменения характеристик качества сетки во время процесса перестроения, контроль данных показателей является необходимым условием эффективной работы любого алгоритма перестроения.

§ 2. Меры качества сеток

Как правило, для задач на плоскости меры качества сеток основываются на геометрических свойствах ее ячеек [7]. При этом для работы со смешанной сеткой необходимым является условие применимости меры как для треугольной, так и для четырехугольной ячейки.

В рассматриваемых сетках выражение для меры скошенности оценивалось как отклонение от идеального угла α_n ячейки и имело следующий вид:

$$q_s = \max [(\alpha_{max} - \alpha_n)/\alpha_n, (\alpha_n - \alpha_{min})/\alpha_n],$$

где $\alpha_{max}, \alpha_{min}$ — максимальный и минимальный углы ячейки, $\alpha_n = 60^\circ, \alpha_n = 90^\circ$ — для треугольной и четырехугольной ячеек соответственно. Скошенность сетки определяется как максимальное значение скошенности ее ячеек: $Q_s = \max_{i=1}^M q_s^i$. Хорошими считаются сетки, имеющие величину скошенности 0.25–0.5, допустимыми — 0.5–0.8; плохими сетками — 0.8–0.95. На практике для четырехугольных и треугольных сеток эта мера не должна превышать 0.85. Мера гладкости характеризует изменение размера соседних ячеек в сетке. Допустимым считается изменение гладкости в пределах двадцати. Вычисление гладкости ячейки определялось как $q_e = \max_{i=1}^m S/S_i$, где S — площадь ячейки, S_i — площадь соседних ячеек, m — число соседних ячеек. Гладкость сетки определялась следующим образом: $Q_e = \max_{i=1}^M q_e^i$. Аспектное соотношение — это отношение наибольшего ребра к наименьшему. Идеальное аспектное соотношение равняется единице. Данный параметр очень часто встречается в литературе и является широко используемым на практике. Аспектное соотношение $q_a = l_{max}/l_{min}$, l_{max}, l_{min} — максимальная и минимальная длины ребер ячейки. Параметр аспектного соотношения сетки в целом $Q_a = \max_{i=1}^M q_a^i$.

Не менее эффективным является использование мер, основанных на угловых характеристиках ячеек. Часто процесс построения сетки связан с контролем минимального угла ячейки. В данном случае, если угол четырехугольника больше (меньше) определенного порогового значения Θ , проводятся топологические операции для удаления данного угла. К примеру, максимальной угол сетки может увеличиться после уточнения границы области перестроения. Некоторые методы используют принцип гарантированного обеспечения диапазона значений углов ячеек до и после операций над сеткой. Пусть $\Theta_{min}, \Theta_{max}$ — значения минимального и максимального углов сетки до ее перестроения, $\Theta_{min}^{(s)}, \Theta_{max}^{(s)}$ — после перестроения. Тогда для перестроенной сетки должно выполняться следующее условие: $\Theta_{min}^{(s)} \geq \Theta_{min}, \Theta_{max}^{(s)} \leq \Theta_{max}$.

Наиболее часто используемая мера качества узлов — валентность. Под валентностью v внутреннего узла сетки понимается число ребер, сходящихся в нем. Для треугольной сетки

идеальная валентность равна шести, для четырехугольной — четырем. В любом случае валентность узла должна превышать единицу. Величина валентности внутреннего узла сетки косвенно влияет на размер и форму ячеек. Как правило, к узлам с высокой валентностью прилегают ячейки, имеющие самые низкие характеристики качества.

Использование мер качества является необходимым этапом как в построении, так и в перестроении расчетной сетки.

§ 3. Перестроение четырехугольных сеток

Простейшим методом перестроения четырехугольной сетки, относящимся к первой группе, является алгоритм пошагового деления каждой ячейки на пять новых посредством вставки меньшего по размеру четырехугольника в ее центр. Четыре остальных четырехугольника достраиваются путем соединения узлов центральной ячейки с вершинами исходной. При этом ребра исходной ячейки не изменяются, а качество сетки существенно ухудшается. Более эффективными в данном случае являются алгоритмы, использующие ячейки согласующего перестроения, такие как перестроение Шнейдера и перестроение Гаримелла.

3.1. Перестроение Шнейдера

Рассмотрим метод перестроения Шнейдера [4]. Существует два варианта перестроения в зависимости от вида шаблонов разбиения ячеек. Перестроенная сетка является согласованной и состоит полностью из четырехугольных ячеек.

Пусть $\mathcal{E}^{(s)} \subset \mathcal{E}$, $\mathcal{M}^{(s)} \subset \mathcal{M}$ — ребра и ячейки четырехугольной сетки \mathcal{T} , которым присвоен уровень деления $s > 0$.

Определение 5. Будем говорить, что над сеткой \mathcal{T} осуществляется операция «Перестроение на четыре ячейки» Шнейдера, если любой четырехугольник $m \in \mathcal{M}^{(s)} \subset \mathcal{M}$ будет разделен на 4^s четырехугольников и любое ребро $e \in \mathcal{E}^{(s)} \subset \mathcal{E}$ будет разделено на 2^s ребер.

Определение 6. Будем говорить, что над сеткой \mathcal{T} осуществляется операция «Перестроение на девять ячеек» Шнейдера, если любой четырехугольник $m \in \mathcal{M}^{(s)} \subset \mathcal{M}$ будет разделен на 9^s четырехугольников и любое ребро $e \in \mathcal{E}^{(s)} \subset \mathcal{E}$ будет разделено на 3^s ребер.

Метод перестроения на девять ячеек, в отличие от перестроения на четыре ячейки, является устойчивым, что дает ему существенное преимущество. Кроме того, в перестроении на девять ячеек выбор шаблона однозначно определяется числом и расположением помеченных узлов ячейки, что делает алгоритм более быстрым и легко реализуемым.

Очевидно, что способ разбиения каждой конкретной ячейки зависит не только от ее уровня деления, но и от уровней деления всех окружающих ее ячеек и ребер. Уровень деления узла вычисляется как максимум среди всех уровней деления прилежащих к нему ячеек и ребер. Узлы, принадлежащие четырехугольникам с уровнем деления больше нуля, являются «помеченными». «Помеченные» узлы однозначно определяют перестроение каждого выбранного четырехугольника. Существует пять шаблонов перестроения четырехугольника в зависимости от того, сколько помеченных узлов он имеет (см. рис. 2).

После того как ячейка $m = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ один раз перестроена, новый уровень перестроения s' определяется с помощью его узлов n_i и ребер e_i : $s'(n_i) = \max_{i=1,4} [s(n_i) - 1, 0]$, где s — предыдущий уровень деления узла, $s'(e_i) = \max [s'(n_a), s'(n_b)]$, $e = (n_a, n_b)$, $s'(m) = \max_{i=1,4} [s'(n_i)]$.

Уровни перестроения вновь введенных узлов определяются следующим образом: $s'(n) = s'(e)$, если узел n вставлен на ребро e ; $s'(n) = s'(m)$, если узел n находится внутри четырехугольника m .

Для неструктурированных сеток частой является ситуация, когда четырехугольная ячейка может иметь неправильную форму, очень малые и очень большие углы, сильно различающиеся длины ребер. В этих случаях требуется задание расположения узлов внутри четырехугольника

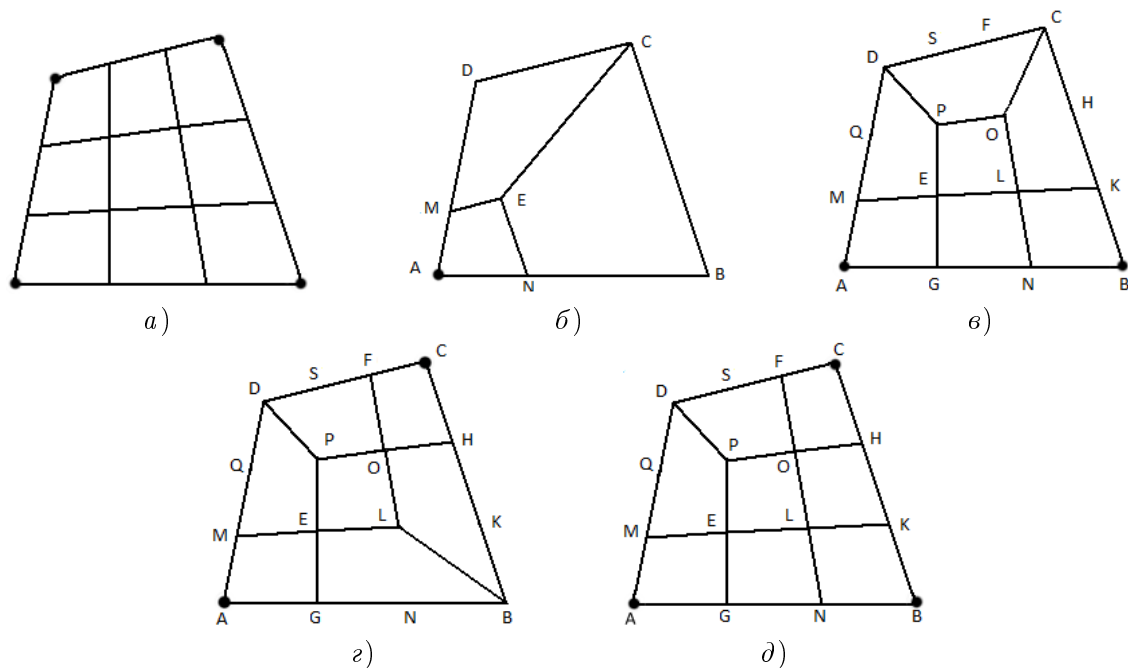


Рис. 2. Варианты шаблонов перестроения на девять ячеек Шнейдера для неструктурированных сеток с четырехугольными ячейками

для сохранения выпуклости и недопущения пересечения ребер. Рассмотрим варианты шаблонов перестроения помеченных и согласующих ячеек с гарантируемым сохранением выпуклости вновь образованных ячеек для неструктурированных сеток.

Шаблон перестроения помеченных ячеек. На рисунке 2, а представлен стандартный шаблон разбиения ячейки, помеченной для перестроения, при использовании метода Шнейдера. Все узлы, лежащие на ребрах четырехугольника, разбивают исходные ребра на три равные части.

Шаблон 1 согласующего перестроения. Этот вид шаблона используется в случае, если ячейка имеет одну общую с помеченным для перестроения четырехугольником вершину A (см. рис. 2, б). Тогда в качестве новой внутренней точки E выбирается точка пересечения прямых ME и EN , при этом $NE \parallel DC$ и $EN \parallel CB$. В этом случае четырехугольник $ANEM$ подобен четырехугольнику $ABCD$, а значит, является выпуклым. Четырехугольники $MECD$, $NECB$ выпуклы как трапеции.

Шаблон 2 согласующего перестроения. В случае двух общих вершин A, B возможны варианты перестроения, приведенные на рисунках 2, в, г. Если ячейка имеет три общие вершины A, B, C с перестроенными четырехугольниками, то согласующее перестроение выполняется так, как показано на рисунке 2, д.

Рассмотрим упрощенный вариант реализации перестроения на девять ячеек Шнейдера, в котором, в отличие от базового метода, понятие уровня деления ребер и узлов не используется (в исходном варианте от этого зависит вычисление уровня перестроения четырехугольника). Предлагаемый метод представим следующим образом (**алгоритм 1**):

Шаг 1. Определение области перестроения. Задается соответствующий уровень деления s каждой ячейки. Все ячейки с уровнем $s > 1$ далее будут разделены на 9 и более частей.

Шаг 2. Формирование списка ячеек для перестроения. В список ячеек для перестроения включаются все четырехугольники с $s > 1$, а также все соседние ячейки.

Шаг 3. Определение помеченных узлов. Каждый узел, принадлежащий хотя бы одной ячейке с $s > 1$, считается «помеченным». По числу «помеченных» узлов четырехугольника

выбирается шаблон его перестроения (см. рис. 2).

Шаг 4. Перестроение выбранных ячеек. Разбиваются все ячейки из списка перестроения. Уровень деления вновь образованных ячеек устанавливается следующим образом: если s — начальный уровень деления ячейки, тогда $s - 1$ — уровень деления ячеек, образованных при ее разбиении.

Шаг 5. Проверка уровня деления вновь образованных ячеек. Для ячеек с уровнем $s > 1$ осуществляется переход на шаг 2.

Шаг 6. Выполнение сглаживания и топологической оптимизации. Операция сглаживания заключается в движении внутренних узлов сетки с целью улучшения характеристик качества ее ячеек. Для увеличения числа узлов с валентностью $v = 4$ применяются топологические операции, например подход, основанный на обработке ячеек, образующих замкнутый шестиреберный контур [8].

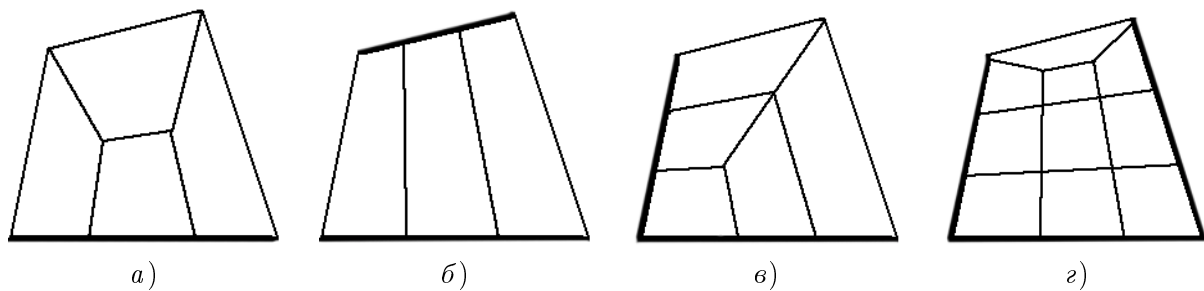


Рис. 3. Шаблоны перестроений Гаримелла

3.2. Перестроение Гаримелла

Метод перестроения Гаримелла [5] во многом аналогичен перестроению на девять ячеек Шнейдера (см. рис. 3). В данном алгоритме ребро является «помеченным», если к нему прилежит хотя бы один четырехугольник с уровнем деления $s > 0$.

Основные отличия шаблонов перестроения для этих методов следующие.

1. В методе Шнейдера выбор шаблона зависит от числа «помеченных» узлов перестраиваемого четырехугольника, в методе Гаримелла — от числа «помеченных» ребер.
2. Область согласующего перестроения Гаримелла содержит меньшее число ячеек, получающихся в результате деления по шаблонам. Как показывает практика, однократное перестроение неструктурированной сетки методом Гаримелла более эффективно с точки зрения мер качества перестроенных ячеек сетки. Однако, метод перестроения Гаримелла, в отличие от перестроения на девять ячеек Шнейдера, не является устойчивым, поэтому на сетках с уровнем деления ячеек больше единицы предпочтительней использовать перестроение на девять ячеек.
3. В методе Гаримелла отсутствует понятие уровня деления ребра и узла, что обеспечивает более простую программную реализацию метода.

На рисунке 4 представлен тестовый пример работы алгоритмов Гаримелла и перестроения на девять ячеек Шнейдера. Каждый раз в область для перестроения попадали ячейки, пересекающие окружность (см. рис. 4, а) с центром в точке пересечения диагоналей квадрата и радиусом, равным половине длины его стороны, при этом уровень перестроения s равнялся четырем. Устойчивость метода Шнейдера позволяет сохранять углы в диапазоне $[45^\circ, 135^\circ]$, параметры меры скошенности, равной 0.5, и аспектного соотношения $Q_a = 3$ постоянными в отличие от мер для метода Гаримелла, ухудшающихся с каждым уровнем. Так, параметр аспектного соотношения увеличился в три раза, скошенность — на 65%, максимальный угол

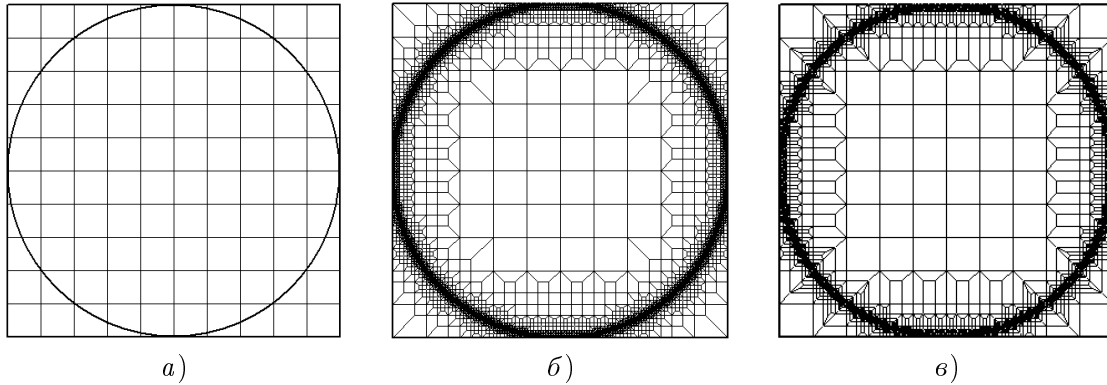


Рис. 4. Сравнение алгоритмов перестроения: *а)* исходная область для перестроения; *б)* результат перестроения алгоритмом на девять ячеек Шнейдера; *в)* результат перестроения алгоритмом Гаримелла

сетки достиг 165° , значение минимального угла — 15° . Кроме того, в сетке Гаримелла присутствуют узлы с валентностью семь и восемь. При большом числе уровней перестроения сетки использование алгоритма Шнейдера является более предпочтительным.

При перестроении неструктурированных сеток часто наблюдается ухудшение качества ячеек согласующего перестроения, возникающее при построении замыкающих шаблонов, изображенных на рисунках 3, *а*, *в*, *г*. После перестроения исходной сетки, содержащей две вытянутые ячейки (обозначены темным, см. рис. 5, *а*) в замыкающих шаблонах появляются четырехугольники с нежелательной мерой скошенности больше 0.8 (выделены темным, см. рис. 5, *б*).

Для исключения появления таких четырехугольников рассмотрим модифицированный алгоритм перестроения Гаримелла.

(А) Если замыкание по шаблонам, изображенным на рисунках 3, *а*, *в*, *г*, ведет к значительному ухудшению качества ячейки (см. рис. 5 *б*), необходимо разбивать четырехугольник по переходным шаблонам (см. рис. 3, *б*, 2, *а*). (В) Для случая ячейки с одним «помеченным» ребром используется шаблон, приведенный на рисунке 3, *б*, в противном случае — шаблон деления на девять ячеек (см. рис. 2, *а*). Разбиение ячейки по этим шаблонам практически не изменяет ее угловые характеристики, а также скошенность.

Такая модификация приводит к незначительному разрастанию области согласующего перестроения и позволяет поддерживать качество сетки на допустимом уровне.

Используя представление алгоритма Шнейдера для модифицированного перестроения Гаримелла (алгоритм 2), операции, выполняемые на шаге 3, разбиваются на два подшага.

Шаг 3.1. Определение помеченных ребер. Каждое ребро, принадлежащее хотя бы одной ячейке с $s > 1$, считается «помеченным». По числу «помеченных» ребер четырехугольника выбирается шаблон его перестроения (см. рис. 3).

Шаг 3.2. Проверка ячеек на возможность перестроения. Все ячейки, образующие после перестроения четырехугольники плохого качества, необходимо разбить по переходным шаблонам (см. рис. 3, *б*, 2, *а*) и обновить список помеченных ребер, выполнив переход на шаг 3.1.

Использование переходных шаблонов позволяет сохранить максимальный угол перестроенной сетки (см. рис. 5, *в*) в пределах 162° , а значение скошенности — не превысить допустимого предела в 0.8. Так, шесть верхних ячеек, выделенных темным, были получены в результате разбиения по переходному шаблону деления на три ячейки, их скошенность меньше порогового значения в 0.8. При этом два следующих четырехугольника были разбиты по замыкающему шаблону (см. рис. 3, *а*), так как качество вновь полученных ячеек является приемлемым (две выделенные трапециевидные ячейки имеют параметр $q_s < 0.8$). Использование модифицированного перестроения Гаримелла позволяет сохранить скошенность и угловые характеристики постоянными до и после перестроения сетки.

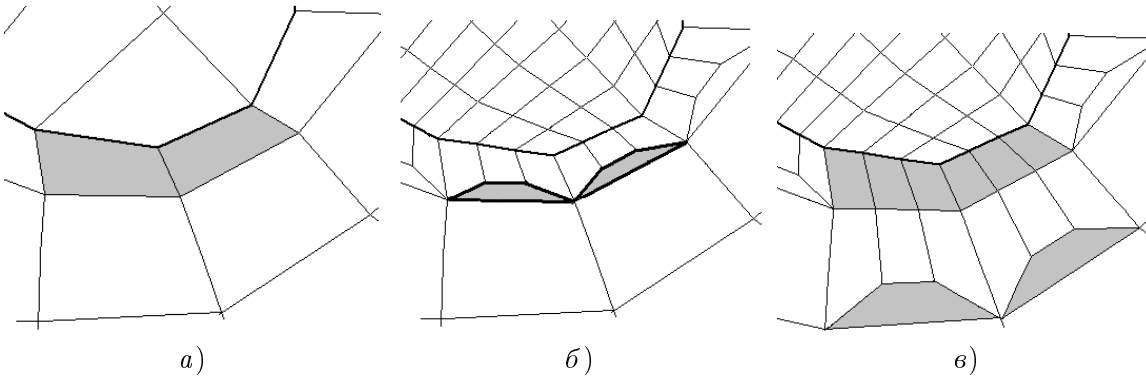


Рис. 5. Пример использования шаблонов перестроения Гаримелла: а) фрагмент исходной сетки; б) перестроение Гаримелла; в) модифицированное перестроение Гаримелла

§ 4. Перестроение смешанных сеток

Рассмотрим шаблоны перестроения треугольников, в результате которых в сетке появляются четырехугольные ячейки [9]. Шаблон, изображенный на рисунке 6, а, используется в алгоритме пошагового преобразования каждой треугольной ячейки в четырехугольную путем деления исходной на три новых четырехугольника. В случае локального перестроения результатом будет смешанная сетка, состоящая из треугольных и четырехугольных ячеек. При перестроении всей области такой алгоритм одновременно является непрямым методом построения четырехугольной сетки. Для случая регулярной сетки исходный равносторонний треугольник обладает скошенностью, равной нулю, и аспектным соотношением, равным единице. После перестроения ячейка будет иметь параметр скошенности $Q_s = 0.33$ и аспектного соотношения $Q_a = 1.73$, максимальный угол увеличится до 120° .

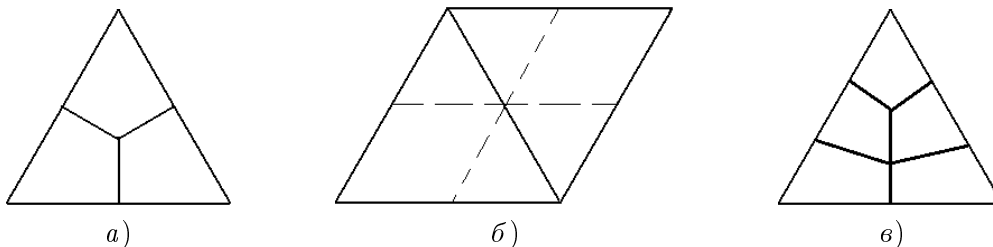


Рис. 6. Варианты перестроения треугольных ячеек: а) на три четырехугольника; б) комбинированное на четыре ячейки; в) на пять четырехугольников

Второй способ заключается в объединении двух соседних треугольников с последующим делением на четыре четырехугольные ячейки (см. рис. 6, б). Новые вершины выбираются на серединах сторон исходных треугольников. После деления равносторонних треугольников скошенность равняется 0.66, величина аспектного соотношения остается прежней, $Q_a = 1$. Отметим, что значения мер качества для более общего случая неструктурированной сетки будут гораздо хуже. Шаблон, изображенный на рисунке 6, в, можно рассматривать как переходной шаблон, связывающий перестроения на четыре/девять ячеек, и как шаблон для перестроения четырехугольника, имеющего два больших противоположных угла (см. рис. 13, б).

Наряду с перестроением треугольников в четырехугольники рассмотрим операцию деления четырехугольной ячейки, в результате которой в сетке появляются треугольники. Характерным примером служит операция разбиения всех невыпуклых четырехугольных ячеек на два треугольника, она гарантирует получение сетки с выпуклыми ячейками при любых граничных условиях. Ячейка разбивается на два треугольника диагональю, проведенной через вершину вывернутого угла (см. рис. 7, а).

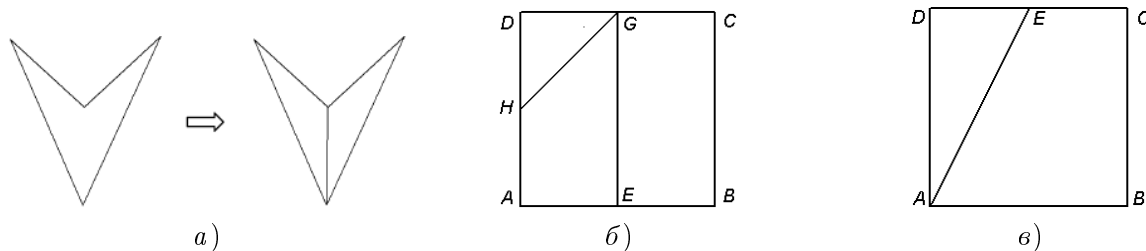


Рис. 7. Варианты перестроения четырехугольных ячеек: а) невыпуклого четырехугольника; б), в) деления на треугольные и четырехугольные ячейки

Для удаления больших углов четырехугольной сетки можно использовать разделение ячейки на треугольник и четырехугольник (см. рис. 7, в). Вершина, расположенная на ребре четырехугольника, делит данную сторону пополам. В работе [9] показано, что для шаблона на рисунке 7, в, при условии, что четырехугольник $ABCD$ выпуклый, выполняется соотношение $q_m(ABCE) \geq 3/7q_m(ABCD)$, а для примера на рисунке 7, б выполняется соотношение $q_m(AEGH) \geq 3/7q_m(ABCD)$, где q_m — мера среднего отношения выбранного четырехугольника. Вариантов шаблонов перестроения для смешанных сеток существует большое количество, однако не все они могут обеспечить конформность перестраиваемой сетки. В связи с этим их применение на практике является весьма ограниченным.

Рассмотрим модифицированный алгоритм перестроения Гаримелла для случая смешанных сеток с преобладанием ячеек четырехугольной формы. Выбор шаблона перестроения треугольной ячейки также зависит от числа «помеченных» ребер (см. рис. 8), при этом операции алгоритма остаются такими же, как и в случае четырехугольной сетки. Если треугольник имеет одно «помеченное ребро», ячейка разбивается по шаблону а, если два ребра — используется шаблон б, а шаблон в применяется в случае трех «помеченных» ребер.

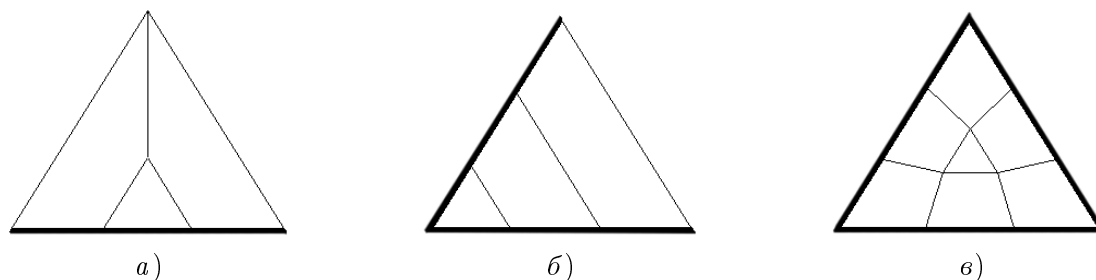


Рис. 8. Шаблоны разбиения треугольных ячеек при перестроении Гаримелла смешанной сетки

Важно отметить, что в каждом шаблоне после обработки остается одна треугольная ячейка, то есть данная операция не уменьшает числа треугольных ячеек сетки. Треугольные ячейки не появляются после разбиения по шаблону на рисунке 6, а, однако в этом случае не всегда возможно замкнуть область согласующего перестроения.

Рассматриваемый алгоритм для случая смешанных сеток можно представить следующим образом (алгоритм 3).

Шаг 1. Определение области перестроения.

Шаг 2. Формирование списка ячеек для перестроения. В список ячеек для перестроения включаются все треугольники и четырехугольники с $s > 1$, а также все соседние ячейки.

Шаг 3.1. Определение помеченных ребер. Каждое ребро, принадлежащее хотя бы одной ячейке с $s > 1$, считается «помеченным». По числу «помеченных» ребер ячейки выбирается

шаблон его перестроения (см. рис. 3 и рис. 8).

Шаг 3.2. Проверка ячеек на возможность перестроения. Все ячейки, образующие после перестроения четырехугольники плохого качества, необходимо разбивать по переходным шаблонам (см. рис. 3, б, рис. 2, а). В случае наличия таких ячеек необходимо обновить список помеченных ребер, выполнив переход на **шаг 3**.

Шаги 4–6. Выполняются аналогично **алгоритму 1**.

Применение **алгоритма 3** рассмотрим на примерах сеток $\mathcal{T}(A)$ и $\mathcal{T}(B)$, изображенных на рисунке 9. Каждая из сеток содержит как треугольные, так и четырехугольные ячейки. При этом для сетки $\mathcal{T}(A)$ форма ячеек сетки близка к идеальной, в то время как сетка $\mathcal{T}(B)$ имеет треугольники со скошенностью $q_s = 0.7$ и минимальным углом, равным 18° .

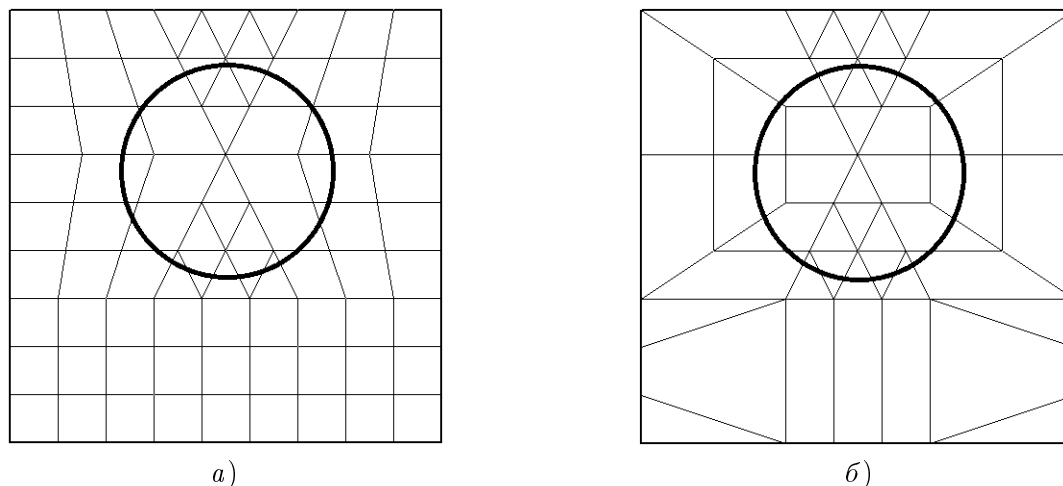


Рис. 9. Примеры смешанных сеток: а) $\mathcal{T}(A)$; б) $\mathcal{T}(B)$

На рисунках 10, а, б приведены случаи, когда областью перестроения являлись все ячейки сеток $\mathcal{T}(A)$ и $\mathcal{T}(B)$. Здесь каждый треугольник был перестроен по шаблону, изображенному на рисунке 8, а, а все четырехугольные ячейки были разбиты на девять новых (см. рис. 2, а).

Сетка $\mathcal{T}(A)$ до перестроения обладала хорошими мерами качества: скошенность $Q_s = 0.3$, аспектное соотношение $Q_a = 1.5$, параметр сглаженности равнялся 2.8. После перестроения $\mathcal{T}(A)$ (см. рис. 10, а) данные показатели несколько снизились: скошенность стала равняться 0.44, аспектное соотношение — 2, сглаженность — $Q_e = 5.7$.

Аналогичная ситуация наблюдается и для сетки $\mathcal{T}(B)$. После полного перестроения $\mathcal{T}(B)$ (см. рис. 10, б) параметр скошенности увеличился на 0.1, сглаженность достигла величины 4.7, аспектное соотношение изменилось с 3.1 до 6.

Представленные на рисунках 11, а, б сетки были получены путем перестроения всех ячеек, пересекающих окружности, изображенные на рисунках 9 а, б, с последующим применением блока сглаживания [8].

После перестроения мера качества для сетки $\mathcal{T}(A)$ стала иметь значение $Q_s \approx 0.8$, для сетки $\mathcal{T}(B)$ — значение $Q_s = 0.87$ и существенно вырос параметр сглаженности для сетки $\mathcal{T}(B)$, который стал равным 16. Применение процедуры сглаживания позволило уменьшить параметр скошенности как для первой, так и для второй сетки: его значение стало равно ≈ 0.79 , что меньше допустимого предела в 0.8. Сглаженность сетки $\mathcal{T}(B)$ также улучшилась и стала равной $Q_e = 10.6$. Таким образом, во многих случаях постобработка сетки после процедуры перестроения является необходимым условием.

Как и в случае четырехугольных сеток, шаблон перестроения ячейки определяется числом «помеченных» ребер, которое она имеет, что обеспечивает высокую надежность метода, а также относительно простую его реализацию. Отметим, что для смешанных сеток использование алгоритма «перестроения на 4 ячейки» Шнейдера приводит к случаям, когда замыкание области согласующего перестроения не достижимо.

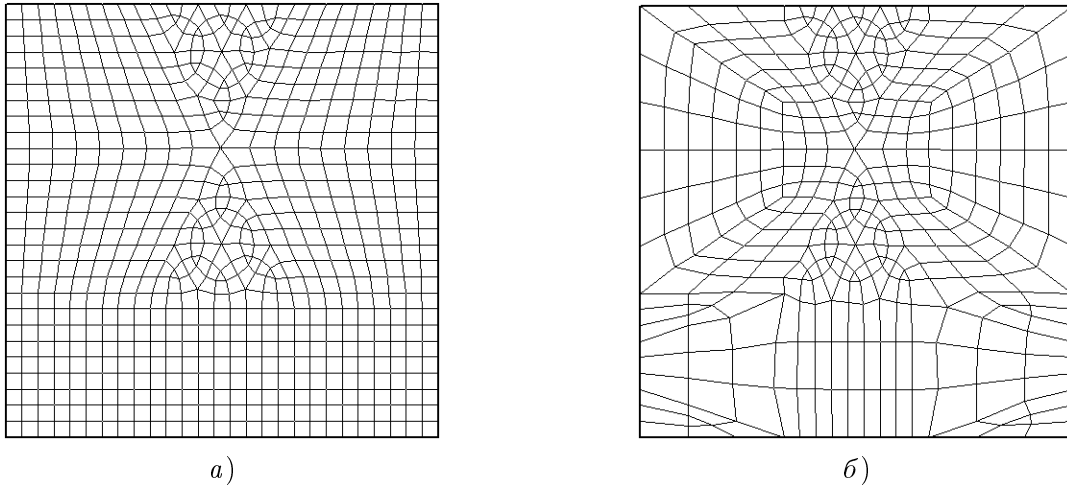


Рис. 10. Полное перестроение области: а) для сетки $\mathcal{T}(A)$; б) для сетки $\mathcal{T}(B)$

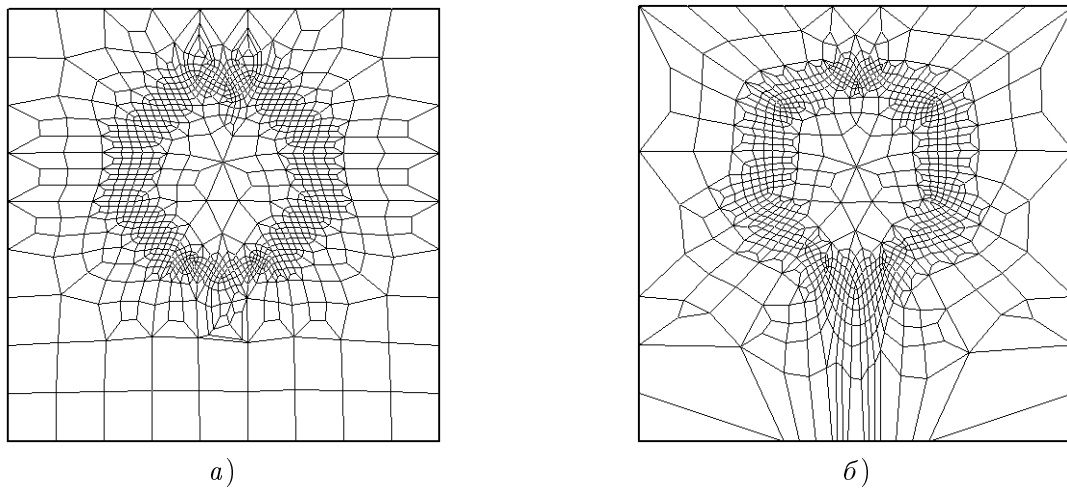


Рис. 11. Сетки после перестроения ячеек вдоль окружности и применения процедуры сглаживания:
а) $\mathcal{T}(A)$; б) $\mathcal{T}(B)$

§ 5. Перестроение с учетом ограничений

Во многих случаях перестроение проводится для уточнения границы расчетной области. Корректироваться может как граница, так и замкнутые и открытые ограничения, заданные внутри области [8]. Операция уточнения границы после перестроения существенно влияет на качество сетки. Характерный пример, когда четырехугольник имеет два граничных или структурных ребра (см. рис. 16, б). В таких случаях необходимо использовать локальное перестроение ячеек плохого качества.

На тестовой четырехугольной сетке $\mathcal{T}(C)$, содержащей 94 замкнутых ограничения (см. рис. 12, а), было проведено сравнение трех разработанных шаблонов перестроения ячеек плохого качества в комбинации с модифицированным перестроением Гаримелла для конформного замыкания области. Рассматриваемые шаблоны позволяют улучшить угловые характеристики сетки, а также параметр скошенности.

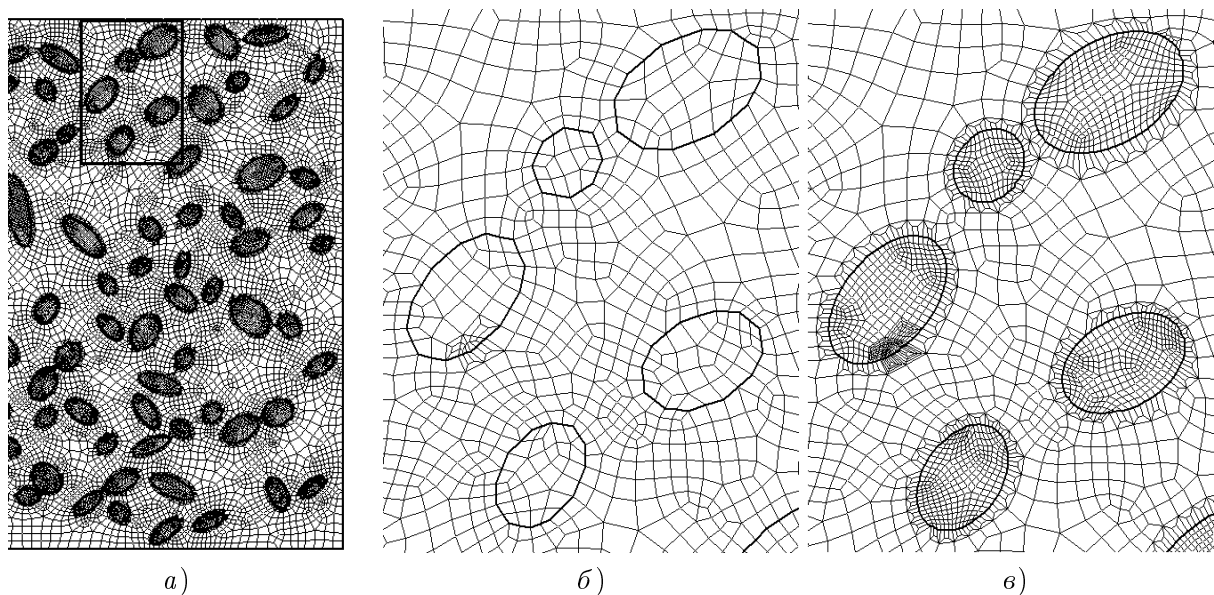


Рис. 12. Часть четырехугольной сетки $\mathcal{T}(C)$ после перестроения (а), увеличенный фрагмент сетки $\mathcal{T}(C)$ до (б) и после (в) перестроения

Шаблон 1. Если два наибольших угла четырехугольника противоположные ($\angle B$ и $\angle D$, см. рис. 13) и нет стороны, сильно отличающейся по длине с двумя своими соседями, то расположение внутренних точек выбирается так, чтобы все четырехугольники были выпуклыми; после перестроения используется локальное сглаживание.

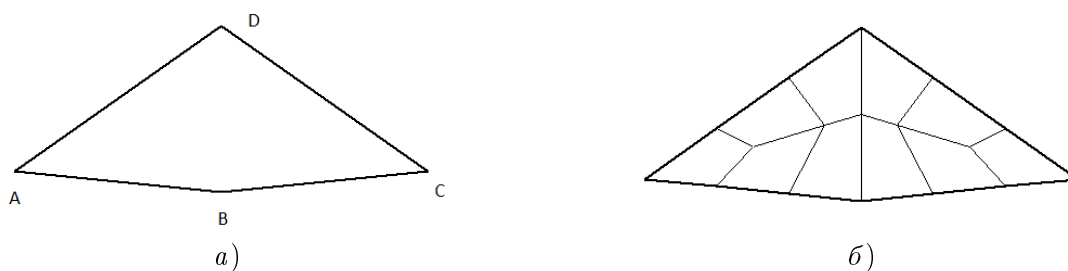


Рис. 13. Шаблон 1: а) исходный четырехугольник; б) четырехугольник после перестроения

Шаблон 2. Используется в случае, если два наибольших угла четырехугольника противоположные ($\angle B$ и $\angle D$, см. рис. 14) и есть сторона, значительно превышающая по длине своих

соседей ($l_1/l_2 > 2.5$). Например, на рисунке 14 $\frac{BC}{AB} \geq 2.5$, $\frac{BC}{DC} \geq 2.5$ и $\frac{AD}{AB} \geq 2.5$, $\frac{AD}{DC} \geq 2.5$.



Рис. 14. Шаблон 2: а) исходный четырехугольник; б) четырехугольник после перестроения

Шаблон 3. Используется в случае, если два наибольших угла четырехугольника ($\angle C$ и $\angle D$, см. рис. 15) принадлежат одной стороне.



Рис. 15. Шаблон 3: а) исходный четырехугольник; б) четырехугольник после перестроения

На рисунке 16 показан пример работы **шаблона 1** в комбинации с модифицированным перестроением Гаримелла. Область сетки $\mathcal{T}(C)$ после перестроения имела параметр скошенности менее 0.8 и максимальный угол, не превышающий 160° (см. рис. 16, а). После уточнения границы появился четырехугольник с углом, близким к развернутому (выделен темным на рис. 16, б). Для исключения данного угла был использован **шаблон 1** перестроения ячеек плохого качества, согласующие четырехугольники были построены по **алгоритму 2**. Максимальный угол, а также параметр скошенности сетки восстановили начальные значения до операции уточнения границы (см. рис. 16, в).

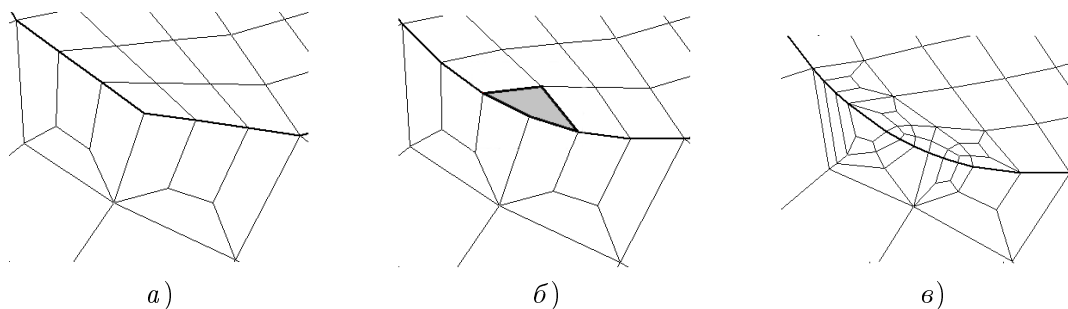


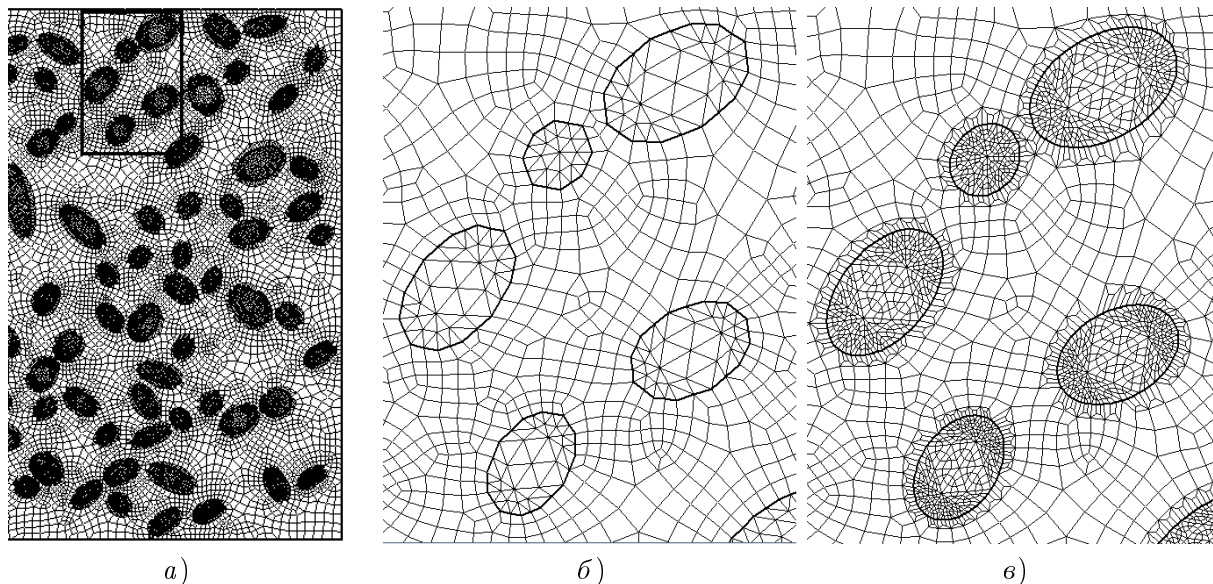
Рис. 16. Фрагмент сетки $\mathcal{T}(C)$ после перестроения (а), уточнения границы (б), использования **шаблона 1** улучшения качества ячейки (в)

Рисунок 12, а демонстрирует часть перестроенной области $\mathcal{T}(C)$ с включениями. В данном случае были перестроены все четырехугольники, находящиеся в областях с более высоким коэффициентом жесткости материала. На рисунках 12, б, в показан увеличенный фрагмент области до и после перестроения сетки.

Перестроение сетки $\mathcal{T}(C)$ осуществлялось тремя алгоритмами: перестроением на девять ячеек Шнейдера, перестроением по шаблонам Гаримелла, модифицированным перестроением Гаримелла с использованием переходных шаблонов согласующего перестроения. Границы включений адаптивно уточнялись при реализации **алгоритма 2**, при этом для сохранения показателя скошенности и угловых характеристик применялись шаблоны перестроения ячеек плохого качества, а также шаблоны перестроения Гаримелла.

Таблица 1. Характеристики перестроенной четырехугольной сетки $\mathcal{T}(C)$

Мера	Исходная сетка $\mathcal{T}(C)$	Перестроенная сетка $\mathcal{T}(C)$		
		Шнейдер \ Гаримелла	Гаримелла модифиц.	После уточнения границы
N	14897	52159 \ 45299	54293	57016
M	14739	52003 \ 45143	54135	56858
Θ_{max}	161°	$176^\circ \setminus 173^\circ$	161°	162°
Θ_{min}	18°	$7.8^\circ \setminus 7.7^\circ$	18°	18°
Q_s	0.8	0.95 \ 0.92	0.8	0.8
Q_a	5.9	8.68 \ 7.84	14	26
Q_e	11.4	25 \ 23	25	49.8
v (число ячеек) ≥ 7	7(5)	7(183) \ 7(173), 8(15) \ 8(12), 9(9) \ 9(9)	7(243), 8(18), 9(15) 10(4)	7(266), 8(26), 9(14), 10(5)

Рис. 17. Часть смешанной сетки $\mathcal{T}(D)$ после перестроения (а), увеличенный фрагмент сетки $\mathcal{T}(D)$ до (б) и после (в) перестроения

Метод Гаримелла показывает несколько лучшие результаты в сравнении с **алгоритмом 1** (см. таблицу 1). Как в первом, так и во втором случае параметр скошенности превысил допустимую величину 0.8. Сетка, полученная при помощи **алгоритма 2**, сохранила угловые характеристики и скошенность на прежнем уровне, так как от этих мер качества зависит выбор шаблона перестроения ячейки. В случае если параметры скошенности и угловых характеристик ячеек после перестроения являлись неудовлетворительными, исходный четырехугольник разбивался по переходным шаблонам. Аспектное соотношение увеличилось в 2.4 раза, что связано с использованием шаблонов согласующего перестроения. Так, шаблон, изображенный на рисунке 3, б, во всех случаях увеличивает параметр аспектного соотношения и сглаженности, так как перестроенные четырехугольники имеют две стороны, в три раза меньшие, чем сторона исходной ячейки. Применение шаблонов улучшения качества в областях ячеек, имевших величину скошенности более 0.8 (см. рис.16, в), объясняет высокие показатели аспектного соотношения и сглаженности $\mathcal{T}(C)$ после уточнения границы включений.

Таблица 2. Характеристики перестроенных сеток $\mathcal{T}(C)$ и $\mathcal{T}(D)$.

Мера	Исходная сетка $\mathcal{T}(D)$	Перестроенная сетка $\mathcal{T}(D)$	Перестроенная сетка $\mathcal{T}(C)$
N	10431	40142	57016
M	12316	41990	56858
Θ_{max}	159°	160°	162°
Θ_{min}	31°	18.8°	18°
Q_s	0.77	0.79	0.8
Q_a	2.76	8.29	26
Q_e	7.02	13.85	49.8
ν (число ячеек) ≥ 7	7(28), 8(62)	7(171), 8(69), 9(2)	7(266), 8(26), 9(14), 10(5)

На рисунке 17, а приведена часть перестроенной по **алгоритму 3** области с включениями для смешанной сетки $\mathcal{T}(D)$, содержащей треугольные ячейки для включений (см. рис. 17, б). Как и в случае $\mathcal{T}(C)$, перестраивались все ячейки, находящиеся в областях с более высоким коэффициентом жесткости материала. После перестроения сетка для включений содержит ячейки обоих типов (см. рис. 17, в). Характеристики смешанной сетки $\mathcal{T}(D)$ до и после перестроения сведены в таблицу 2.

Отметим некоторое ухудшение минимального угла сетки $\mathcal{T}(D)$, обусловленное уточнением границ включений после перестроения, в то же время использование переходных шаблонов **алгоритма 2** для $\mathcal{T}(C)$ и $\mathcal{T}(D)$ позволило контролировать скошенность ячеек в пределах допустимых значений.

Сетка $\mathcal{T}(C)$ имеет параметры сглаженности и аспектного соотношения значительно выше, чем $\mathcal{T}(D)$, так как для нее реализовывались шаблоны перестроения ячеек плохого качества (см. рис. 15, в). Кроме того, смешанная сетка $\mathcal{T}(D)$ обладает лучшей валентностью, в ней отсутствуют узлы с числом ребер $\nu = 10$.

В работе рассмотрены основные алгоритмы перестроения неструктурированных четырехугольных сеток. Предложена модифицированная реализация алгоритма перестроения на девять ячеек Шнейдера (**алгоритм 1**). Разработаны модифицированные алгоритмы перестроения Гаримелла (**алгоритм 2**, **алгоритм 3**), позволяющие перестраивать смешанную сетку и сохранять значения угловых характеристик и параметр скошенности ячеек после перестроения. Рассмотрены шаблоны разбиения ячеек плохого качества при перестроении сеток с ограничениями. Алгоритмы реализованы в модуле расчетных сеток конечно-элементного программного комплекса FESstudio [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копысов С.П., Новиков А.К. Метод декомпозиции для параллельного адаптивного конечно-элементного алгоритма // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. № 3. С. 141–154.
2. Копысов С.П., Новиков А.К. Параллельные алгоритмы адаптивного перестроения и разделения неструктурированных сеток // Математическое моделирование. 2002. Т. 14. № 9. С. 91–96.
3. Копысов С.П., Новиков А.К. Анализ способов перестроения треугольных конечно-элементных сеток // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 20. Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач. Казань, 2003. С. 170–180.
4. Schneiders R. Refining quadrilateral and hexahedral element meshes // 5th International Conference on Grid Generation in Computational Field Simulations. 1996. P. 679–688.
5. Garimella R. Conformal refinement of unstructured quadrilateral meshes // 18th International Meshing Roundtable. Springer-Verlag, 2009. P. 31–44.
6. Ebeida M.S., Patney A., Owens J.D., Mestreau E. Isotropic conforming refinement of quadrilateral and hexahedral meshes using two-refinement templates // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2011. P. 974–985.
7. Knupp P. Algebraic mesh quality metrics // SIAM J. Sci. Comput. 2001. Vol. 23. № 1. P. 193–218.
8. Караваев А.С., Копысов С.П., Пономарёв А.Б. Алгоритмы построения и перестроения неструктурированных четырехугольных сеток в многосвязных областях // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5. № 2. С. 144–150.
9. Joe B. Refinement of quadrilateral meshes // Technical Report ZCS2008-05. URL: <http://members.shaw.ca/bjoe/techrep/zcs08-05.pdf>
10. Копысов С.П., Новиков А.К., Пономарёв А.Б., Рычков В.Н., Сагдеева Ю.А. Программная среда построения расчетных моделей метода конечных элементов для параллельных распределенных вычислений // Информационные технологии. 2008. № 3. С. 75–82.

Поступила в редакцию 25.10.2013

Караваев Александр Сергеевич, аспирант, Институт механики УрО РАН,
426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
E-mail: karavaev-alexander@yandex.ru

Копысов Сергей Петрович, д. ф.-м. н., профессор, Институт механики УрО РАН,
426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
E-mail: s.kopysov@gmail.com

A. S. Karavaev, S. P. Kopysov

A refinement of unstructured quadrilateral and mixed meshes

Keywords: unstructured meshes, mixed meshes, meshes refinement, refinement templates, geometry adaptive meshes.

Mathematical Subject Classifications: 65M50, 65M60

This paper studies the refinement of unstructured quadrilateral and mixed meshes. We propose the variations for the definition of refinement templates “in nine cells” for the case if there is an unstructured quadrilateral mesh, which ensures cell’s convexity of the result mesh. To control the maximum permissible mesh angle, we use the templates of refining the cells of bad quality. In addition, this paper presents a new unstructured mixed mesh refinement algorithm; also, we give several demonstration examples of the algorithm that show the considerable improvement of mesh quality, as compared with the well-known methods.

REFERENCES

1. Kopysov S.P., Novikov A.K. Domain decomposition for parallel adaptive finite element algorithm, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 141–154.
2. Kopysov S.P., Novikov A.K. Parallel algorithms of adaptive refinement and partitioning of unstructured grids, *Matematicheskoe Modelirovanie*, 2002, vol. 14, no. 9, pp. 91–96.
3. Kopysov S.P., Novikov A.K. The review of refinement of triangular meshes, *Tr. Mat. Tsentra im. N. I. Lobachevskogo*, “Chislennyye metody resheniya lineinykh i nelineinykh kraevykh zadach” (Numerical methods for solving linear and nonlinear boundary value problems), vol. 20, Kazan, 2003, pp. 170–180.
4. Schneiders R. Refining quadrilateral and hexahedral element meshes, *5th International Conference on Grid Generation in Computational Field Simulations*, 1996, pp. 679–688.
5. Garimella R. Conformal refinement of unstructured quadrilateral meshes, *18th International Meshing Roundtable*, Springer-Verlag, 2009, pp. 31–44.
6. Ebeida M.S., Patney A., Owens J.D., Mestreau E. Isotropic conforming refinement of quadrilateral and hexahedral meshes using two-refinement templates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, pp. 974–985.
7. Knupp P. Algebraic mesh quality metrics, *SIAM J. Sci. Comput.*, 2001, vol. 23, no. 1, pp. 193–218.
8. Karavaev A.S., Kopysov S.P., Ponomarev A.B. Algorithms for construction and refinement of unstructured quadrangle meshes on multiconnected domain, *Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 144–150.
9. Joe B. Refinement of quadrilateral meshes, *Technical Report ZCS2008-05*. <http://members.shaw.ca/bjoe/techrep/zcs08-05.pdf>
10. Kopysov S.P., Novikov A.K., Ponomarev A.B., Rychkov V.N., Sagdeeva Yu.A. A program environment for construction of computational models for parallel distributed computing, *Informatsionnye Tekhnologii*, 2008, no. 3, pp. 75–82.

Received 25.10.2013

Karavaev Aleksandr Sergeevich, Post-graduate student, Institute of the Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.
E-mail: karavaev-alexander@yandex.ru

Kopysov Sergei Petrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of the Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.
E-mail: s.kopysov@gmail.com