УДК 519.833

© *В. И. Жуковский, Н. Г. Солдатова*

К ЗАДАЧЕ ДИВЕРСИФИКАЦИИ ВКЛАДА ПО ТРЕМ ДЕПОЗИТАМ

Каким образом вкладчику распределить в банке свой вклад между рублевым и двумя валютными депозитами (в долларах и евро), чтобы через год получить наибольший доход? Причем вкладчику, естественно, неизвестен курс каждой из валют в конце года и ориентируется он лишь на коридор изменения такого курса. Ответ на этот вопрос кроется в распределении между депозитами лишь одного рубля. Решению последней задачи для рискофоба и посвящена предлагаемая статья.

Ключевые слова: максимин, стратегия, неопределенность, исход.

Введение

В публикациях по микроэкономике [1, с. 103], [2, с. 5], [3, с. 345] среди ЛПР (лиц, принимающих решения) выделяется многочисленная категория тех, кто ориентируется только на исходы (рискофобы — греч. «phobos» означает «боязнь» (здесь) рисков). В данной статье получено решение для рискофоба задачи о диверсификации (за год) рублевого вклада по трем депозитам: рублевому, в долларах и в евро. Перейдем к математической модели.

Наращенную за год сумму единичного вклада по трем депозитам (рублевому, в долларах и в евро) можно, аналогично [4, с. 58–60], представить в виде

$$f(x,y) = (1+r)(1-x_1-x_2) + \frac{x_1}{K_1}(1+d_1)y_1 + \frac{x_2}{K_2}(1+d_2)y_2, \tag{0.1}$$

где r, d_1 и d_2 — процентные ставки по трем депозитам (рублевому, в долларах и в евро соответственно); K_1 и y_1 — курс доллара в начале и в конце годового периода, K_2 и y_2 — то же для евро; стратегия $x = (x_1, x_2)$ и x_i $(i = 1, 2)$ — дробь, которая определяет пропорцию, по которой из единичного рублевого вклада выделяются доли на депозит в долларах $(i = 1)$ и в евро $(i = 2)$ соответственно.

Согласно (0.1), x_1 есть доля вложения от одного рубля, конвертируемая в доллары x_1/K_1 и помещенная на долларовый депозит, то же самое для x_2, но уже в евро. В конце года с помощью обратной конвертации долларовый вклад по курсу y_1 переводится в рубли. Точно так же x_2 конвертируется в евро x_2/K_2 и в конце года по курсу y_2 переводится в рубли. Итоговая наличность в результате определяется суммой $f(x, y)$ из (0.1).

Для вкладчика требуется определить доли одного рубля x_i $(i = 1, 2)$, при которых итоговая наличность $f(x, y)$ (где $y = (y_1, y_2)$) будет возможно большей. Одновременно следует учесть, что будущие курсы валют y_i $(i = 1, 2)$, как правило, неизвестны. Но они все-таки могут быть заданы коридором возможных значений, а именно $y_i \in [a_i, b_i]$ $(i = 1, 2)$, где постоянные $b_i > a_i > 0$ заданы заранее или выбраны априори (например, на основе экспертных оценок).

Итак, математическую модель задачи о диверсификации вклада по трем депозитам можно представить упорядоченной тройкой

$$\Gamma = \langle X, Y, f(x, y) \rangle,$$

где *критерий* $f(x, y)$ определен в (0.1). Множество X *стратегий* x у ЛПРа есть

$$X = \{x = (x_1, x_2) \,|\, x_1 + x_2 \leqslant 1 \wedge x_i \geqslant 0 \, (i = 1, 2)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Множество *неопределенностей* y тогда

$$Y = \{y = (y_1, y_2) \,|\, y_i \in [a_i, b_i]\,(i = 1, 2)\} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2.$$

$f(x, y)$ — функция полезности вкладчика, конкретное значение которой называем *исходом*. С точки зрения теории исследования операций Γ представляет собой *однокритериальную* задачу при неопределенности. При формализации решения Γ следуем [5].

Определение 1. Пару $(x^g, f^g) \in X \times \mathbb{R}$ называем *гарантированным по исходам* (ГИР) *решением* Γ, если

$$f^g = \min_{y\in Y} f(x^g, y) = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x, y); \tag{0.2}$$

при этом x^g есть *максиминная стратегия* в задаче Γ, а число f^g называется *максимином*.

Отметим, *во-первых*, что из компактности множеств X, Y и непрерывности $f(x, y)$ следует существование ГИР; *во-вторых*, процессу построения ГИР можно предложить следующую «иерархическую интерпретацию», где используются информированные неопределенности.

§ 1. Информированные неопределенности

Приведем некоторые положения теории игр с приоритетом в действиях у управляющего центра, получивших название «иерархические игры Гермейера» [6, с. 8].

Иерархическая игра представляет собой «математическую модель конфликтной ситуации при фиксированной последовательности ходов и обмене информацией участников» [7, с. 477]. Активное развитие теории иерархических игр в России началось со второй половины прошлого века и возглавлялось Юрием Борисовичем Гермейером (см. [6–11] и др.), продолжается его учениками. В игре двух лиц «такие игры описывают взаимодействие между верхним (ведущим) и нижним (ведомым) уровнями управления» [10, с. 103], а именно, задают порядок ходов игроков, то есть очередность выбора стратегий и (возможно) сообщение о таком выборе партнеру.

Основным моментом в иерархических играх является выбор класса используемых стратегий, зависящий от имеющейся у игроков информации. В теории иерархических игр Гермейера сформулировано точное математическое определение информационного расширения игры [7, с. 479], [8, с. 49–51], которое в частном случае приводит к использованию в Γ наряду с чистыми неопределенностями $y \in Y$ так называемых «информированных неопределенностей» — m-вектор-функций $y(x) : X \to Y$. Именно такие стратегии применялись в [11, с. 353] при изучении детерминированного варианта минимаксной антагонистической позиционной игры, в которой игроки наделены различными информационными возможностями. Такие возможности определяют соответствующие виды стратегий, что приводит (см. [6, 8, 10]), в свою очередь, к различным видам иерархических игр (Γ_1, Γ_2 и т. д.).

Наконец, в теории иерархических игр принято выделять *оперирующую сторону* — ЛПР (лицо, принимающее решение), несущего полную ответственность за результаты, и ИО (*исследователя операций*) — консультанта, который готовит аргументированные варианты решений.

При рассмотрении Γ будем считать, что один игрок (у нас ИО) ограничен только чистыми стратегиями $x \in X$, другой же может использовать «любую мыслимую информацию» [11, с. 353]. В частности, он может знать стратегию x (информационная дискриминация ИО) и формировать неопределенность в виде функции $y(x) : X \to Y$. В этом случае критерий в Γ определяется скалярной функцией $f(x, y(x))$, а исходом будет (при выборе ИО конкретной стратегии $x^* \in X$) значение $f(x^*, y(x^*))$. Такие функции $y(\cdot) \in Y^X$ (множеству m-вектор-функций $y(x)$, определенных на X со значениями в Y) в теории дифференциальных игр иногда называют *контрстратегиями*, а задача вида Γ, где в качестве неопределенностей используются контрстратегии $y(x)$, названа в [11, с. 353] *минимаксной игрой*. Повторим, что такие задачи возникают при информационной дискриминации ИО и дополнительной информированности игрока, «ведающего» формированием неопределенностей.

Итак, в статье будет использовано два вида неопределенностей: чистые $y \in Y$ и информированные $y(\cdot) \in Y^X$.

§ 2. Интерпретация максимина «с позиции» двухуровневой иерархической игры двух лиц

Максиминное решение (x^g, f^g) задачи Γ определяется цепочкой равенств (0.2).

Используя «информированные неопределенности», (0.2) можно представить как последовательное «действие» двух операций: *внутреннего минимума* (для игрока нижнего уровня): построение $y(x) : X \to Y$ такого, что

$$\min_{y \in Y} f(x, y) = f(x, y(x)) = f[x] \qquad \forall x \in X; \tag{2.1}$$

предполагая, что вектор-функция $y(x)$ единственна, переходим к операции *внешнего максимума* (для игрока верхнего уровня иерархии):

$$\max_{x \in X} f(x, y(x)) = f(x^g, y(x^g)) = f^g. \tag{2.2}$$

Тогда в иерархической двухуровневой игре с одним игроком на каждом уровне:

первый ход за ИО — игроком верхнего уровня: он передает на нижний уровень «свои» возможные стратегии $x \in X$;

второй ход за игроком нижнего уровня — он аналитически конструирует $y(x)$ согласно (2.1) и, если $y(x)$ единственно, передает $y(x)$ на верхний уровень;

третий ход за игроком верхнего уровня — он находит пару (x^g, f^g) согласно (2.2).

Приведенное «трехходовое понятие» укладывается *полностью* в определение гарантированного результата первого (ведущего) игрока в игре Γ_1 (по Гермейеру), если в [10, с. 104] заменить функцию выигрыша ведомого на $-f(x, y)$. Нетрудно видеть также, что, находясь в рамках игры Γ_1, ведущий игрок, *зная правило поведения ведомого*, может сам вычислить реакцию ведомого и сразу реализовать третий ход. Еще раз подчеркнем, что аналог и модификацию такого «трехходового понятия» удобно применять к построению гарантированного решения с учетом исходов и рисков для бескоалиционного и кооперативного вариантов конфликта.

Замечание 1. Максиминное решение определяется парой (x^g, f^g) по двум причинам:

a) каждой стратегии $x \in X$ (в результате операции *внутреннего минимума* (2.1)) ставится в соответствие гарантия $f[x]$, ибо

$$f[x] \leqslant f(x, y) \qquad \forall y \in Y$$

(так как исход $f[x]$ «обеспечивает себе» ИО при любых $y \in Y$ за счет использования стратегии x);

b) из таких гарантий ЛПР выбирает наибольшую (максимальную), ибо

$$f^g = f[x^g] \geqslant f[x] \qquad \forall x \in X.$$

Итак, ЛПР предлагается применить в (0.2) стратегию x^g, тем самым «обеспечивая себе» наибольшую (максимальную) гарантию $f^g = f[x^g] = f(x^g, y(x^g)) \leqslant f(x^g, y)$ $\forall y \in Y$.

§ 3. Формализация ГИР

Вернемся к задаче Γ, применяя здесь уже определение 1 и иерархическую процедуру принятия решения из раздела 2. Само ГИР будем определять упорядоченной четверкой $(1 - x_1^g - x_2^g, x_1^g, x_2^g, f^g)$, где первые три компоненты $(1 - x_1^g - x_2^g, x_1^g, x_2^g)$ показывают доли единичного вклада, распределяемые вкладчиком на рублевый депозит $(1 - x_1^g - x_2^g)$, на депозит в долларах x_1^g и депозит в евро x_2^g; наконец, f^g — гарантированная вкладчику сумма, наращенная за год от такого распределения одного рубля по трем депозитам.

Определение 2. Четверку $(1 - x_1^g - x_2^g, x_1^g, x_2^g, f^g)$ назовем *гарантированным распределением* в задаче Γ, если

1^o для каждой стратегии $x \in X$ существует «своя» информированная неопределенность $y(x) : X \to Y$, при которой

$$\min_{y \in Y} f(x, y) = f(x, y(x)) = f[x];$$

2^o пара $(x^g = (x_1^g, x_2^g), f^g) \in X \times \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству (0.2):

$$\max_{x \in X} f[x] = f[x^g] = f^g.$$

Для нахождения явного вида ГР в задаче Г будем следовать трем этапам.

Этап I: построение внутреннего минимума $f[x] = \min\limits_{y \in Y} f(x, y) \qquad \forall x \in X$;

Этап II: определение стратегии $x^g = (x_1^g, x_2^g)$, реализующей внешний максимум $f[x^g] = \max\limits_{x \in X} f[x]$;

Этап III: нахождение гарантии $f^g = f[x^g]$.

§ 4. Явный вид ГР

Прежде всего, приведем вспомогательные утверждения.

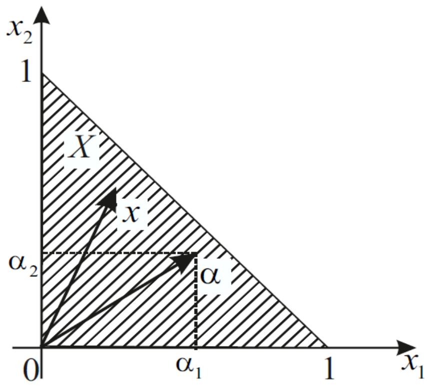

Рис. 1. Множество X

Лемма 1. *Пусть*

$$X = \{x = (x_1, x_2) \,|\, x_1 + x_2 \leqslant 1,\ x_i \geqslant 0 \,(i = 1, 2)\}$$

и задан вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ *такой, что* $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$ *(см. рис. 1).*

Тогда

$$\max_{x \in X} \alpha' x = \alpha_1 x_1^* + \alpha_2 x_2^* = \begin{cases} \alpha_1 & \text{при } \alpha_1 > \alpha_2, \\ \alpha_2 & \text{при } \alpha_1 < \alpha_2, \\ \alpha_i \ (i = 1, 2) & \text{при } \alpha_1 = \alpha_2, \end{cases}$$

где

$$x^* = \begin{cases} (1, 0) & \text{при } \alpha_1 > \alpha_2, \\ (0, 1) & \text{при } \alpha_1 < \alpha_2, \\ \forall (x_1^*, x_2^*) : x_1^* + x_2^* = 1 \wedge x_i^* \geqslant 0 \ (i = 1, 2) & \text{при } \alpha_1 = \alpha_2. \end{cases}$$

Здесь штрих сверху означает операцию транспонирования, а $\wedge$ — знак «и».

Доказательство очевидно, ибо $\max\limits_{x \in X} = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) x_2^*$. □

Лемма 2. *При* $X = \{x = (x_1, x_2) \,|\, x_1 + x_2 \leqslant 1,\ x_i \geqslant 0\,(i = 1, 2)\}$ *и* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = arg \max_{x \in X} \alpha' x = \begin{cases} (0,1) & \text{при} \quad \alpha_1 \leqslant 0,\ \alpha_2 > 0, \\ (1,0) & \text{при} \quad \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 \leqslant 0, \\ (0,0) & \text{при} \quad \alpha_i \leqslant 0\ (i = 1,2)\ \text{и}\ \alpha_1\alpha_2 \neq 0. \end{cases}$$

Лемма сразу следует из вида X (рис. 1), и $\alpha' x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$.

Лемма 3. *При* $x \in X$ *и* $x_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$ *для задачи* Γ *будет*

$$\min_{y \in Y} f(x, y) = f(x, a) = f[x] = (1 + r)(1 - x_1 - x_2) + \frac{x_1}{K_1}(1 + d_1)a_1 + \frac{x_2}{K_2}(1 + d_2)a_2,$$

где $a = (a_1, a_2)$.

Лемма очевидна, так как все параметры из (0.1) положительны.

Далее, с учетом леммы 3 представим $f[x]$ в виде

$$f[x] = (1 + r) + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \tag{4.1}$$

здесь постоянные

$$\alpha_i = \frac{1 + d_i}{K_i}(a_i - \frac{1 + r}{1 + d_i}K_i) \ \ (i = 1, 2). \tag{4.2}$$

Утверждение 1. *Гарантированное распределение в задаче* Γ *имеет вид*

$$(1 - x_1^g - x_2^g, x_1^g, x_2^g, f^g) = \begin{cases} (1, 0, 0, 1 + r) \quad \text{при}\ \ \alpha_i \leqslant 0\ (i = 1, 2), \\ (0, 1, 0, \frac{1+d_1}{K_1}a_1) \ \ \text{при}\ \ \{\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 \leqslant 0\} \vee \{\alpha_1 > \alpha_2 > 0\}, \\ (0, 0, 1, \frac{1+d_2}{K_2}a_2) \ \ \text{при}\ \ \{\alpha_1 \leqslant 0,\ \alpha_2 > 0\} \vee \{\alpha_2 > \alpha_1 > 0\}, \\ (0, x_1^g, 1 - x_1^g, \frac{1+d_i}{K_i}a_i)\ \forall x_1^g \in [0, 1]\ \text{при}\ \ \alpha_1 = \alpha_2 > 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Здесь $\alpha_i = \frac{1+d_i}{K_i}(a_i - \frac{1+r}{1+d_i}K_i)$, знак $\vee$ означает «или».

Справедливость утверждения сразу следует из лемм 1–3, формул (4.1) и (4.2).

Замечание 2. При практическом применении утверждения 1 следует:

во-первых, найти численные значения α_i $(i = 1, 2)$ по формулам (4.2);

во-вторых, в зависимости от знаков чисел α_i выделить соответствующую строку в (4.3) и выписать явный вид гарантированного распределения в Γ.

Пример 1. Вкладчик, имея в наличии 500 000 рублей, желает узнать: каким образом ему распределить данную сумму по трем депозитам (рублевому, в долларах и в евро) так, чтобы итоговая наличность была наибольшей.

Пусть процентные ставки по трем депозитам (рублевому, в долларах и евро) равны соответственно $r = 0,1$, $d_1 = 0,05$ и $d_2 = 0,04$; курс доллара в начале годового периода $K_1 = 33$ (рубля), а курс евро $K_2 = 44$ (рубля). Предположим, что минимальные значения курсов валют в конце годового периода равны их значениям в начале этого периода, то есть $a_1 = K_1$ и $a_2 = K_2$.

Тогда по формулам (4.2) определим, что $\alpha_i \leqslant 0$ $(i = 1, 2)$ и гарантированное распределение в рассматриваемой задаче соответствует первой строке в (4.3), то есть $(1 - x_1^g - x_2^g, x_1^g, x_2^g, f^g) = (1; 0; 0; 1,1)$. Таким образом, итоговая наличность будет наибольшей при вкладе в рублях и составит 550 000 рублей.

Если же в данной задаче процентные ставки по трем депозитам равны $r = 0,075$, $d_1 = 0,08$ и $d_2 = 0,09$, то $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$. Тогда гарантированное распределение $(1 - x_1^g - x_2^g, x_1^g, x_2^g, f^g) = (0; 0; 1; 1,09)$. Поэтому в этом случае итоговая наличность будет наибольшей, если денежные средства положить на депозит в евро, и составит 545 000 рублей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черемных Ю.Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень. М.: ИНФРА, 2008. 843 с.
2. Цветкова Е.В., Арлюкова И.О. Риски в экономической деятельности. СПб.: ИВЭСЭП, 2002. 64 с.
3. Фишер С., Дорнбуш Р., Шмалензи Р. Экономика. М.: Дело, 1998. 829 с.
4. Капитоненко В.В. Финансовая математика и ее приложения. М.: ПРИОР, 2000. 140 с.
5. Wald A. Contribution to the theory of statistical estimation and testing hypothesis // Annals Math. Statist. 1939. Vol. 10. P. 299–326.
6. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1978. 328 с.
7. Ватель И.А., Ерешко Ф.И. Игра с иерархической структурой // Статья в «Математической энциклопедии». М.: Советская энциклопедия, 1979. Т. 2. 1104 с.
8. Кукушкин Н.С., Морозов В.В. Теория неантагонистических игр. М.: МГУ, 1984. 104 с.
9. Ватель И.А., Ерешко Ф.И. Математика конфликта и сотрудничества. М.: Знание, 1974. 123 с.
10. Морозов В.В. Основы теории игр. М.: ВМК МГУ, 2002. 150 с.
11. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

Поступила в редакцию 29.10.2013

Жуковский Владислав Иосифович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра оптимального управления, факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы.
E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Солдатова Наталья Геннадьевна, аспирант, кафедра математики и физики, Московский государственный областной гуманитарный институт, 142611, Россия, Московская область, г. Орехово-Зуево, ул. Зеленая, 22.
E-mail: solnata@pochta.ru

V. I. Zhukovskii, N. G. Soldatova
On the problem of diversification of contribution on the three deposits

Keywords: maximin, strategy, uncertainty, outcome.

Mathematical Subject Classifications: 91A10

In what way the depositor should allocate his deposit in the bank taking into account one-rouble deposit and two currency deposits (in dollars and euro) in order to get the largest income in a year? The rate of exchange in the end of the year is unknown as a rule and the depositor orients himself towards the boundaries of changing of such rate. The allocation between the deposits of one ruble only is the answer of the question. The article which we suggest is devoted to the solution of the latter problem for a riskofob.

REFERENCES

1. Cheremnykh Yu.N. *Mikroekonomika. Prodvinutyi uroven'* (Microeconomics. The advanced level), Moscow: INFRA, 2008, 843 p.

2. Tsvetkova E.V., Arlyukova I.O. *Riski v ekonomicheskoi deyatel'nosti* (Risks in economic activity), Saint-Petersburg: IVESEP, 2002, 64 p.

3. Fisher S., Dornbusch R., Schmalensee R. *Economics*, New York: McGraw-Hill, 1987, 2nd ed. Translated under the title *Ekonomika*, Moscow: Delo, 1998, 829 p.

4. Kapitonenko V.V. *Finansovaya matematika i ee prilozheniya* (Financial mathematics and its applications), Moscow: PRIOR, 2000, 140 p.

5. Wald A. Contribution to the theory of statistical estimation and testing hypothesis, *Annals Math. Statist.*, 1939, vol. 10, pp. 299–326.

6. Germeier Yu.B. *Igry s neprotivopolozhnymi interesami* (Games with non-opposed interests), Moscow: Nauka, 1978, 328 p.

7. Vatel' I.A., Ereshko F.I. Playing with a hierarchical structure, *Mathematical encyclopedia*, Moscow: Soviet Encyclopedia, 1979, vol. 2, 1104 p.

8. Kukushkin N.S., Morozov V.V. *Teoriya neantagonisticheskikh igr* (The theory of non-antagonistic games), Moscow: Lomonosov Moscow State University, 1984, 104 p.

9. Vatel' I.A., Ereshko F.I. *Matematika konflikta i sotrudnichestva* (Mathematics of conflict and cooperation), Moscow: Znanie, 1974, 123 p.

10. Morozov V.V. *Osnovy teorii igr* (Fundamentals of the theory of games), Moscow: Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, 2002, 150 p.

11. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*, New York–Berlin: Springer-Verlag, 1988, 517 p.

Received 29.10.2013

Zhukovskii Vladislav Iosifovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Optimal Control, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Soldatova Natal'ya Gennad'evna, post-graduate student, Department of Mathematics and Physics, Moscow State Regional Institute of Humanities, ul. Zelenaya, 22, Orekhovo-Zuevo, 142611, Russia.
E-mail: solnata@pochta.ru