УДК 517.518.6

© *Л. И. Данилов*

РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕКУРРЕНТНЫХ И ПОЧТИ РЕКУРРЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ [1]

Рассматриваются классы функций $f : \mathbb{R} \to U$ со значениями в метрическом пространстве (U, ρ), преобразования Бохнера которых являются рекуррентными и почти рекуррентными функциями. Улучшены полученные ранее результаты о равномерной аппроксимации функций из рассматриваемых классов элементарными функциями из этих же классов. Эти результаты находят применение в исследовании вопроса о существовании удовлетворяющих ряду дополнительных условий почти рекуррентных сечений многозначных отображений. В последней части работы доказан вариант теоремы Лузина для рекуррентных функций.

Ключевые слова: рекуррентная функция, сечение, многозначное отображение, теорема Лузина.

Введение

В работе рассматриваются функции $f : \mathbb{R} \to U$ со значениями в полном метрическом пространстве (U, ρ), для которых преобразования Бохнера $\mathbb{R} \ni t \to \{[-l, l] \ni \tau \mapsto f(t + \tau)\}$, $l > 0$, со значениями в пространствах измеримых функций, определенных на отрезках $[-l, l]$, с метрикой, сходимость в которой эквивалентна сходимости по мере Лебега, и в пространствах $L^p([-l, l], U)$, $p \geqslant 1$, являются рекуррентными и почти рекуррентными функциями. В первом случае функции f называются (почти) M-рекуррентными; а во втором — (почти) L^p_{loc}-рекуррентными. В статье усилены и дополнены результаты из [1] (см. также [2]). В частности, приведен более сильный вариант теоремы о равномерной аппроксимации почти M-рекуррентных и почти L^p_{loc}-рекуррентных функций элементарными функциями из соответствующих пространств почти M-рекуррентных и почти L^p_{loc}-рекуррентных функций (см. теорему 2). Теорема 2 позволяет доказать усиленный вариант утверждения (сформулированного в виде теоремы 7) о существовании удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям почти M-рекуррентных (почти L^p_{loc}-рекуррентных) сечений многозначных почти M-рекуррентных (почти L^p_{loc}-рекуррентных) отображений. Равномерная аппроксимация измеримых функций элементарными функциями естественно используется при доказательстве существования измеримых сечений многозначных измеримых отображений (что было сделано еще в статье Рохлина [3]). При этом для многозначных отображений из разных классов (многозначных измеримых) функций вопрос о существовании у них сечений из соответствующих классов функций может быть сведен к вопросу о существовании равномерной аппроксимации функций из рассматриваемых классов элементарными функциями из этих же классов. Таким методом можно доказать существование почти периодических (п. п.) по Степанову сечений многозначных п. п. по Степанову отображений [4–8] (впервые существование таких сечений было доказано в [9] на основе результатов Фришковского [10]). Предложенный метод использовался в [11–13] и [14] для доказательства существования п. п. по Вейлю и п. п. по Безиковичу сечений многозначных п. п. (по Вейлю и по Безиковичу соответственно) отображений. В статье также на основе теоремы о равномерной аппроксимации M-рекуррентных и L^p_{loc}-рекуррентных функций элементарными функциями из этих же пространств доказан вариант теоремы Лузина для рекуррентных функций (сформулированный в виде теоремы 10).

В § 1 приведены необходимые определения, а также некоторые утверждения о (почти) рекуррентных функциях. Основные свойства (почти) рекуррентных функций изложены в [15,16].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №12–01–00195).

Более подробное изложение используемых здесь понятий и результатов о (почти) рекуррентных функциях содержится в [1]. В § 2 сформулированы и доказаны теоремы 2 и 7, которые (вместе с теоремой 10 из § 3) являются основными результатами работы. В § 3 доказан вариант теоремы Лузина для рекуррентных функций.

§ 1. Обозначения, определения и некоторые утверждения

Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство, *mes* — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Функция $f:\mathbb{R}\to U$ называется *элементарной*, если существуют точки $x_j\in U$ и попарно непересекающиеся измеримые по Лебегу множества $T_j\subseteq\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$, такие, что $\operatorname{mes}\,\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_j T_j=0$ и $f(t)=x_j$ при $t\in T_j$. Такую функцию будем обозначать через

$$\sum_j x_j\,\chi_{T_j}(\cdot)\,, \tag{1.1}$$

где χ_T — характеристическая функция множества $T\subseteq\mathbb{R}$. Элементарная функция может принимать конечное множество значений (например, если $\{x_j : j\in\mathbb{N}\}$ — конечное множество или $T_j=\varnothing$ для всех достаточно больших j). Для произвольных функций $f_j:\mathbb{R}\to U$, $j\in\mathbb{N}$, через

$$\sum_j f_j(\cdot)\,\chi_{T_j}(\cdot) \tag{1.2}$$

обозначается функция, совпадающая с $f_j(\cdot)$ на множествах T_j. (Введенные обозначения (1.1) и (1.2) формально некорректны, так как метрическое пространство U не обязательно является линейным. Однако никаких линейных операций над такими функциями производиться не будет.)

Функция $f:\mathbb{R}\to U$ (сильно) *измерима*, если для любого $\varepsilon>0$ существует элементарная функция $f_\varepsilon:\mathbb{R}\to U$ такая, что $\rho(f(t),f_\varepsilon(t))<\varepsilon$ при почти всех (п. в.) $t\in\mathbb{R}$. Для измеримого множества $T\subseteq\mathbb{R}$ (для которого $\operatorname{mes}\,T\neq 0$) функция $f:T\to U$ *измерима*, если она является сужением некоторой измеримой функции $\widetilde{f}:\mathbb{R}\to U$ на множество T. Пусть $M(\mathbb{R},U)$ — множество измеримых функций $f:\mathbb{R}\to U$, при этом функции, совпадающие при п. в. $t\in\mathbb{R}$, отождествляются (поэтому измеримые функции и в том числе функции (1.1) и (1.2) (с измеримыми функциями f_j) могут не определяться на множествах нулевой меры Лебега).

Пусть $L^\infty(\mathbb{R},U)$ — метрическое пространство в существенном ограниченных измеримых функций $f:\mathbb{R}\to U$ с метрикой

$$D^{(\rho)}_\infty(f,g)=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\,\rho(f(t),g(t))\,.$$

Через $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$ обозначается множество измеримых функций $f:\mathbb{R}\to U$ таких, что для любого $l>0$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in[-l,l]}\,\rho(f(\tau),x_0)<+\infty$$

для некоторого (и, следовательно, для всех) $x_0\in U$. На $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$ определяются псевдометрики

$$D^{(\rho)}_{\infty,l}(f,g)=\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in[-l,l]}\,\rho(f(\tau),g(\tau))\,,\quad l>0\,,$$

и метрика

$$d_\infty(f,g)=\sum_{l=1}^{+\infty}2^{-l}\,\frac{D^{(\rho)}_{\infty,l}(f,g)}{1+D^{(\rho)}_{\infty,l}(f,g)}\,.$$

В дальнейшем будет рассматриваться подпространство $(C(\mathbb{R},U),d_\infty)$ метрического пространства $(L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U),d_\infty)$, состоящее из непрерывных функций $f:\mathbb{R}\to U$.

Пусть $L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$, где $p\geqslant 1$, — множество измеримых функций $f:\mathbb{R}\to U$ таких, что для любого $l>0$

$$\int_{-l}^{l}\rho^p(f(\tau),x_0)\,d\tau<+\infty$$

для некоторого (и, следовательно, для всех) $x_0\in U$ (то есть $f(\cdot|_{[-l,l]})\in L^p([-l,l],U)$). На $L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$ также определяются псевдометрики

$$D^{(\rho)}_{p,\,l}\,(f,g)=\left(\frac{1}{2l}\,\int_{-l}^{l}\rho^p(f(\tau),g(\tau))\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$

(являющиеся метриками на $L^p([-l,l],U)$) и метрика

$$d_p(f,g)=\sum_{l=1}^{+\infty}2^{-l}\,\frac{D^{(\rho)}_{p,\,l}\,(f,g)}{1+D^{(\rho)}_{p,\,l}\,(f,g)}\,.$$

На метрическом пространстве (U,ρ) будем рассматривать также метрику

$$\rho'(x,y)=\min\left\{1,\rho(x,y)\right\},\quad x,y\in U.$$

Метрическое пространство (U,ρ') полное. Совокупности замкнутых и компактных подмножеств метрического пространства (U,ρ) не меняются при переходе к метрике ρ'.

Функции $f\in M(\mathbb{R},U)$ принадлежат пространству $L^\infty(\mathbb{R},(U,\rho'))$, поэтому на $M(\mathbb{R},U)$ можно ввести псевдометрики $D^{(\rho')}_{1,\,l}\,(f,g)$, $l>0$, и метрику

$$d(f,g)=\sum_{l=1}^{+\infty}2^{-l}\,\frac{D^{(\rho')}_{1,\,l}\,(f,g)}{1+D^{(\rho')}_{1,\,l}\,(f,g)}\,.$$

Метрические пространства $(C(\mathbb{R},U),d_\infty)$, $(L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U),d_p)$ и $(M(\mathbb{R},U),d)$ являются полными. На этих пространствах определим динамические системы сдвигов: $g^tf(\cdot)=f(\cdot+t)$, $t\in\mathbb{R}$ [15]. Рекуррентные и почти рекуррентные функции $f(\cdot)$ (из этих пространств) определяются в зависимости от того, будут ли движения $t\mapsto g^tf(\cdot)=f(\cdot+t)$ рекуррентными или почти рекуррентными [15, 16] (для принятых здесь обозначений см. также [1]).

Определение 1. Функция $f\in C(\mathbb{R},U)$ называется *почти рекуррентной* (соответственно *рекуррентной*), если $t\mapsto g^tf(\cdot)=f(\cdot+t)$ — почти рекуррентное (соответственно рекуррентное) движение в $(C(\mathbb{R},U),d_\infty)$.

Определение 2. Функция $f\in L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$, $p\geqslant 1$, называется *почти $L^p_{\rm loc}$-рекуррентной* (соответственно *$L^p_{\rm loc}$-рекуррентной*), если $t\mapsto g^tf(\cdot)=f(\cdot+t)$ — почти рекуррентное (соответственно рекуррентное) движение в $(L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U),d_p)$.

Определение 3. Функция $f\in M(\mathbb{R},U)$ называется *почти M-рекуррентной* (соответственно *M-рекуррентной*), если $t\mapsto g^tf(\cdot)=f(\cdot+t)$ — почти рекуррентное (соответственно рекуррентное) движение в $(M(\mathbb{R},U),d)$.

Пространства почти рекуррентных, почти $L^p_{\rm loc}$-рекуррентных и почти M-рекуррентных функций $f:\mathbb{R}\to U$ обозначим через $\mathcal{R}^{(C)}(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ соответственно. Пусть $\mathcal{R}^{\,(C),\,{\rm comp}}\,(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^{\,p,\,{\rm comp}}\,(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{R}^{\,{\rm comp}}\,(\mathbb{R},U)$ — пространства рекуррентных, $L^p_{\rm loc}$-рекуррентных и M-рекуррентных функций. Через $C^{\,{\rm comp}}\,(\mathbb{R},U)$, $L^{p,\,{\rm comp}}_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$, $p\geqslant 1$, и $M^{\,{\rm comp}}\,(\mathbb{R},U)$ обозначим подпространства функций $f:\mathbb{R}\to U$, принадлежащих пространствам $C(\mathbb{R},U)$, $L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$ и $M(\mathbb{R},U)$ соответственно, для которых движения $t\mapsto g^tf(\cdot)=f(\cdot+t)$ устойчивы по Лагранжу (см. [15]). Справедливы равенства

$$\mathcal{R}^{(C),\,{\rm comp}}\,(\mathbb{R},U)=\mathcal{R}^{(C)}(\mathbb{R},U)\bigcap C^{\,{\rm comp}}\,(\mathbb{R},U),$$

$$\mathcal{R}^{p,\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)=\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)\bigcap L^{p,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U),\quad p\geqslant 1,$$

$$\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)=\mathcal{R}(\mathbb{R},U)\bigcap M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U).$$

Частично упорядоченное множество $\mathcal{A}=(\mathcal{A},\geqslant)$ называется *направленным* множеством, если для любых элементов α_1, $\alpha_2\in\mathcal{A}$ существует элемент $\alpha\in\mathcal{A}$ такой, что $\alpha\geqslant\alpha_1$ и $\alpha\geqslant\alpha_2$.

Если $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — частично упорядоченные множества, то через $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ обозначается частично упорядоченное декартово произведение множеств $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ (если $(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ и $(\alpha_1',\alpha_2')\in\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$, то $(\alpha_1,\alpha_2)\leqslant(\alpha_1',\alpha_2')$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1\leqslant\alpha_1'$ и $\alpha_2\leqslant\alpha_2'$). Если $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ — направленные множества, то $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ — также направленное множество.

Если $t\in\mathbb{R}$ и $\varnothing\neq T$, T_1, $T_2\subseteq\mathbb{R}$, то будем использовать обозначения

$$t+T\doteq\{t+\tau:\tau\in T\}\,,\quad T_1+T_2\doteq\{t_1+t_2:t_j\in T_j\,,\ j=1,2\}\,.$$

Для направленного множества $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ совокупность многозначных функций (направленностей) $\mathcal{A}\ni\alpha\mapsto\Gamma(\alpha)\subseteq\mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$(\mathbf{0}_{\mathcal{A}})$ $0\in\Gamma(\alpha)$ для всех $\alpha\in\mathcal{A}$;

$(\mathbf{1}_{\mathcal{A}})$ если α, $\alpha'\in\mathcal{A}$ и $\alpha\leqslant\alpha'$, то $\Gamma(\alpha)\supseteq\Gamma(\alpha')$;

$(\mathbf{2}_{\mathcal{A}})$ для любого $\alpha\in\mathcal{A}$ существует элемент $\alpha'\geqslant\alpha$ такой, что для каждого числа $t\in\Gamma(\alpha')$ найдется такой элемент $\alpha''\in\mathcal{A}$, что $t+\Gamma(\alpha'')\subseteq\Gamma(\alpha)$.

Пусть $\mathcal{N}'(\mathcal{A})$ — множество направленностей из $\mathcal{N}(\mathcal{A})$, удовлетворяющих также дополнительному условию:

$(\mathbf{3}_{\mathcal{A}})$ для любого элемента $\alpha\in\mathcal{A}$ найдутся элемент $\alpha'\geqslant\alpha$ и число $\delta>0$ такие, что

$$\Gamma(\alpha)\supseteq\Gamma(\alpha')+(-\delta,\delta). \tag{1.3}$$

Для направленностей $\Gamma_j\in\mathcal{N}(\mathcal{A}_j)$, $j=1,2$, определим направленность

$$\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2\ni\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)\mapsto(\Gamma_1\cap\Gamma_2)(\widetilde{\alpha})\doteq\Gamma_1(\alpha_1)\cap\Gamma_2(\alpha_2).$$

При этом также $\Gamma_1\cap\Gamma_2\in\mathcal{N}(\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2)$.

Пусть $\mathcal{A}_j$ — направленные множества и $\Gamma_j\in\mathcal{N}(\mathcal{A}_j)$, $j=1,2$. Направленность Γ_1 *подчинена* направленности Γ_2 (в этом случае пишем $\Gamma_1\prec\Gamma_2$), если для любого $\alpha_1\in\mathcal{A}_1$ найдется элемент $\alpha_2\in\mathcal{A}_2$ такой, что $\Gamma_1(\alpha_1)\supseteq\Gamma_2(\alpha_2)$. Если $\Gamma_1\prec\Gamma_2$ и $\Gamma_2\prec\Gamma_1$, то направленности Γ_1 и Γ_2 *эквивалентны*. Отношение подчинения является рефлексивным и транзитивным, поэтому классы эквивалентности направленностей образуют частично упорядоченное множество, которое также является направленным (если $\Gamma_j\in\mathcal{N}(\mathcal{A}_j)$, $j=1,2$, то $\Gamma_j\prec\Gamma_1\cap\Gamma_2$, $j=1,2$). Более того, если $\Gamma'\in\mathcal{N}(\mathcal{A}')$ и $\Gamma'(\alpha)=\{0\}$ для некоторого элемента $\alpha\in\mathcal{A}'$, то направленности Γ' подчинены все направленности $\Gamma\in\mathcal{N}(\mathcal{A})$ (для любых направленных множеств $\mathcal{A}$).

Множество $T\subseteq\mathbb{R}$ называется *относительно плотным*, если существует число $a>0$ такое, что $T\cap[t,t+a]\neq\varnothing$ для всех $t\in\mathbb{R}$. Совокупность относительно плотных множеств обозначим через $\mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$.

Пусть $\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$ — множество направленностей $\Gamma\in\mathcal{N}(\mathcal{A})$, для которых $\Gamma(\alpha)\in\mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$ при всех $\alpha\in\mathcal{A}$; $\mathcal{N}'_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})=\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})\cap\mathcal{N}'(\mathcal{A})$.

Определим направленные множества $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}^{(1)}_p$, где $p\geqslant 1$, и $\mathcal{A}^{(2)}$. Пусть $\mathcal{A}^{(1)}$ — множество упорядоченных пар (l,ε), где l, $\varepsilon>0$, с отношением порядка: $(l_1,\varepsilon_1)\geqslant(l_2,\varepsilon_2)$ тогда и только тогда, когда $l_1\geqslant l_2$ и $\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2$; $\mathcal{A}^{(1)}_p$ — множество упорядоченных пар (l,ε), где l, $\varepsilon>0$, с отношением порядка: $(l_1,\varepsilon_1)\geqslant(l_2,\varepsilon_2)$ тогда и только тогда, когда $l_1\geqslant l_2$ и $l_1\varepsilon_1^p\leqslant l_2\varepsilon_2^p$; $\mathcal{A}^{(2)}$ — множество упорядоченных троек (l,ε,δ), где l, ε, $\delta>0$, с отношением порядка: $(l_1,\varepsilon_1,\delta_1)\geqslant(l_2,\varepsilon_2,\delta_2)$ тогда и только тогда, когда $l_1\geqslant l_2$, $\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2$ и $l_1\delta_1\leqslant l_2\delta_2$.

Для функций $f:\mathbb{R}\to U$ из пространств $C(\mathbb{R},U)$, $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$, $p\geqslant 1$, и $M(\mathbb{R},U)$ определим соответственно направленности

$$\mathcal{A}^{(1)}\ni(l,\varepsilon)\mapsto\Gamma^{(C)}_f(l,\varepsilon)\doteq\{t\in\mathbb{R}:D^{(\rho)}_{\infty,\,l}(f(\cdot),f(\cdot+t))<\varepsilon\},$$

$$\mathcal{A}_p^{(1)} \ni (l,\varepsilon) \mapsto \Gamma_f^{\,p}\,(l,\varepsilon) \doteq \{t \in \mathbb{R} : D_{p,\,l}^{(\rho)}\,(f(\cdot), f(\cdot + t)) < \varepsilon\},$$

$$\mathcal{A}^{(2)} \ni (l,\varepsilon,\delta) \mapsto \Gamma_f\,(l,\varepsilon,\delta) \doteq \{t \in \mathbb{R} : \mathrm{mes}\,\{\tau \in [-l,l] : \rho(f(\tau), f(\tau+t)) \geqslant \varepsilon\} < 2l\delta\}.$$

Лемма 1 (см. [1]). *Справедливы включения*

$$\Gamma_f^{(C)} \in \mathcal{N}'(\mathcal{A}^{(1)}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{A}^{(1)}), \qquad \Gamma_f^{\,p} \in \mathcal{N}'(\mathcal{A}_p^{(1)}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{A}_p^{(1)}), \ \text{где } p \geqslant 1,$$

$$\Gamma_f \in \mathcal{N}'(\mathcal{A}^{(2)}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{A}^{(2)}).$$

Из определений 1, 2 и 3 непосредственно следует, что

(1) функция $f \in C(\mathbb{R},U)$ почти рекуррентна тогда и только тогда, когда $\Gamma_f^{(C)} \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathcal{A}^{(1)})$;

(2) функция $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, почти L^p_{loc}-рекуррентна тогда и только тогда, когда $\Gamma_f^{\,p} \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathcal{A}_p^{(1)})$;

(3) функция $f \in M(\mathbb{R},U)$ почти M-рекуррентна тогда и только тогда, когда $\Gamma_f \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathcal{A}^{(2)})$.

Замечание 1. Вместо направленностей $\Gamma_f^{(C)}$, $\Gamma_f^{\,p}$ и Γ_f можно рассматривать направленности

$$\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon \mapsto \widetilde{\Gamma}_f^{(C)}(\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R} : D_\infty\,(f(\cdot), f(\cdot+t)) < \varepsilon^{-1}\}, \quad f \in C(\mathbb{R},U),$$

$$\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon \mapsto \widetilde{\Gamma}_f^{\,p}(\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R} : D_p(f(\cdot), f(\cdot+t)) < \varepsilon^{-1}\}, \quad f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U), \ \ p \geqslant 1,$$

$$\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon \mapsto \widetilde{\Gamma}_f(\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R} : D(f(\cdot), f(\cdot+t)) < \varepsilon^{-1}\}, \quad f \in M(\mathbb{R},U),$$

которые принадлежат $\mathcal{N}'(\mathbb{R}^+)$ (где $\mathbb{R}^+ = (\mathbb{R}^+,\geqslant)$ — направленное множество вещественных положительных чисел с естественным отношением порядка). Направленности $\widetilde{\Gamma}_f^{(C)}$, $\widetilde{\Gamma}_f^{\,p}$ и $\widetilde{\Gamma}_f$ эквивалентны направленностям $\Gamma_f^{(C)}$, $\Gamma_f^{\,p}$ и Γ_f соответственно. Функции $f : \mathbb{R} \to U$ из пространств $C(\mathbb{R},U)$, $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, и $M(\mathbb{R},U)$ являются почти рекуррентными, почти L^p_{loc}-рекуррентными и почти M-рекуррентными тогда и только тогда, когда $\widetilde{\Gamma}_f^{(C)} \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathbb{R}^+)$, $\widetilde{\Gamma}_f^{\,p} \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathbb{R}^+)$ и $\widetilde{\Gamma}_f \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathbb{R}^+)$ соответственно. Использование направленностей $\Gamma_f^{(C)}$, $\Gamma_f^{\,p}$ и Γ_f (вместо $\widetilde{\Gamma}_f^{(C)}$, $\widetilde{\Gamma}_f^{\,p}$ и $\widetilde{\Gamma}_f$) упрощает доказательства многих утверждений (как в этой статье, так и в [1]).

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное направленное множество и $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathcal{A})$. Обозначим через $\mathcal{R}^{(C)}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^{p}_{\Gamma}\,(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, и $\mathcal{R}_{\Gamma}\,(\mathbb{R},U)$ пространства функций из $\mathcal{R}^{(C)}(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^p\,(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$, для которых $\Gamma_f^{(C)} \prec \Gamma$, $\Gamma_f^{\,p} \prec \Gamma$ и $\Gamma_f \prec \Gamma$ соответственно (что эквивалентно условиям $\widetilde{\Gamma}_f^{(C)} \prec \Gamma$, $\widetilde{\Gamma}_f^{\,p} \prec \Gamma$ и $\widetilde{\Gamma}_f \prec \Gamma$). Аналогичным образом, пусть $\mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}_{\Gamma}\,(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^{p,\,\mathrm{comp}}_{\Gamma}\,(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, и $\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma}\,(\mathbb{R},U)$ — пространства функций из $\mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}\,(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^{\,p,\,\mathrm{comp}}\,(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{R}^{\,\mathrm{comp}}\,(\mathbb{R},U)$, для которых $\Gamma_f^{(C)} \prec \Gamma$, $\Gamma_f^{\,p} \prec \Gamma$ и $\Gamma_f \prec \Gamma$ соответственно.

Если $\Gamma_j \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathcal{A}_j)$, $j = 1,2$, и $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$, то

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}^{(C)}_{\Gamma_1}(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{R}^{(C)}_{\Gamma_2}(\mathbb{R},U), && \mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}_{\Gamma_1}\,(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}_{\Gamma_2}\,(\mathbb{R},U),\\
&\mathcal{R}^{p}_{\Gamma_1}\,(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{R}^{p}_{\Gamma_2}\,(\mathbb{R},U), && \mathcal{R}^{p,\,\mathrm{comp}}_{\Gamma_1}\,(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{R}^{p,\,\mathrm{comp}}_{\Gamma_2}\,(\mathbb{R},U), \quad p \geqslant 1,\\
&\mathcal{R}_{\Gamma_1}\,(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{R}_{\Gamma_2}\,(\mathbb{R},U), && \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma_1}\,(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma_2}\,(\mathbb{R},U).
\end{aligned}$$

Каждому числу $\mathcal{T} > 0$ поставим в соответствие направленность

$$\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon \mapsto \widetilde{\Gamma}^{\{\mathcal{T}\}}(\varepsilon) \doteq \{t \in \mathbb{R} : \bigl|1 - e^{\,2\pi i\,\mathcal{T}^{-1}t}\bigr| < \varepsilon^{-1}\}\,.$$

В дальнейшем для направленностей $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathcal{A})$ и чисел $\mathcal{T} > 0$ будем использовать краткое обозначение

$$\Gamma^{\{\mathcal{T}\}} \doteq \Gamma \cap \widetilde{\Gamma}^{\{\mathcal{T}\}}.$$

При этом $\Gamma \prec \Gamma^{\{\mathcal{T}\}}$ и $\Gamma^{\{\mathcal{T}\}} \in \mathcal{N}_{\rm rd}\,(\mathcal{A}\times\mathbb{R}^+)$ [1]. Для всех $\mathcal{T}>0$ определим также направленности

$$\mathcal{A} \ni \alpha \mapsto \Gamma^{\mathcal{T}}(\alpha) \doteq \Gamma(\alpha) \bigcap \mathcal{T}\,\mathbb{Z}\,,$$

для которых непосредственно проверяются условия $(\mathbf{0}_{\mathcal{A}})$, $(\mathbf{1}_{\mathcal{A}})$ и $(\mathbf{2}_{\mathcal{A}})$, поэтому $\Gamma^{\mathcal{T}} \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$. Так как для любых $\alpha \in \mathcal{A}$ и $\varepsilon > 0$

$$\Gamma^{\mathcal{T}}(\alpha) = \Gamma(\alpha) \bigcap \mathcal{T}\,\mathbb{Z} \subseteq \Gamma(\alpha) \bigcap \widetilde{\Gamma}^{\{\mathcal{T}\}}(\varepsilon),$$

то $\Gamma^{\{\mathcal{T}\}} \prec \Gamma^{\mathcal{T}}$.

Лемма 2. *Пусть* $\Gamma \in \mathcal{N}'_{\rm rd}\,(\mathcal{A})$, *где* $\mathcal{A}$ — *произвольное направленное множество. Тогда для любого* $\mathcal{T}>0$ *выполняется включение* $\Gamma^{\mathcal{T}} \in \mathcal{N}_{\rm rd}\,(\mathcal{A})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{T}>0$ и $\alpha \in \mathcal{A}$. В соответствии с условием $(\mathbf{3}_{\mathcal{A}})$ выберем элемент $\alpha' \geqslant \alpha$ и число $\delta \in (0, \frac{\mathcal{T}}{2})$ так, чтобы выполнялось вложение (1.3). Из теоремы 2 в [1] следует, что множество

$$\Gamma(\alpha') \bigcap \bigl\{t \in \mathbb{R} : \bigl|1 - e^{2\pi i \mathcal{T}^{-1} t}\bigr| < 2\sin\frac{\pi\delta}{\mathcal{T}}\,\bigr\}$$

относительно плотно. С другой стороны, для любого числа

$$\tau \in \Gamma(\alpha') \bigcap \bigl\{t \in \mathbb{R} : \bigl|1 - e^{2\pi i \mathcal{T}^{-1} t}\bigr| < 2\sin\frac{\pi\delta}{\mathcal{T}}\,\bigr\}$$

найдется число $L(\tau) \in \mathcal{T}\,\mathbb{Z}$ такое, что $|\tau - L(\tau)| < \delta$ и, следовательно, числа $L(\tau) \in \Gamma(\alpha') + (-\delta,\delta) \subseteq \Gamma(\alpha)$ также образуют относительно плотное множество. В силу включения $\Gamma^{\mathcal{T}} \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$ и произвольности выбора элемента $\alpha \in \mathcal{A}$ имеем $\Gamma^{\mathcal{T}} \in \mathcal{N}_{\rm rd}\,(\mathcal{A})$. □

§ 2. Элементарные почти рекуррентные функции и почти рекуррентные сечения многозначных отображений

Фиксируем направленность $\Gamma \in \mathcal{N}_{\rm rd}\,(\mathcal{A})$. Для последовательности измеримых множеств $T_j \subseteq \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, будем писать $T_j \xrightarrow{\Gamma} \varnothing$ при $j \to +\infty$, если для любых l, $\delta > 0$ найдутся элемент $\alpha \in \mathcal{A}$ и число $j_0 \in \mathbb{N}$ такие, что при всех $t \in \Gamma(\alpha)$ и всех $j \geqslant j_0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{mes}\,[-l+t, l+t] \bigcap T_j < 2l\delta.$$

Пусть $\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ — совокупность множеств $T \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\chi_T \in \mathcal{R}_\Gamma\,(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (что эквивалентно условию $\chi_T \in \mathcal{R}^1_\Gamma\,(\mathbb{R},\mathbb{R})$) [2]. Через $\mathfrak{M}_\Gamma$ обозначим совокупность последовательностей $\{T_j\}_{j\,\in\mathbb{N}}$, состоящих из попарно непересекающихся измеримых подмножеств $T_j \subseteq \mathbb{R}$ таких, что $T_j \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$, $j \in \mathbb{N}$, и $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant J} T_j \xrightarrow{\Gamma} \varnothing$ при $J \to +\infty$. (Если $\{T_j\}_{j\,\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_\Gamma$, то $\operatorname{mes}\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_j T_j = 0$.)

Пусть $\mathcal{ER}_\Gamma\,(\mathbb{R},U)$ — множество элементарных функций (1.1), для которых $\{T_j\}_{j\,\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_\Gamma$. Справедливо вложение $\mathcal{ER}_\Gamma\,(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{R}_\Gamma\,(\mathbb{R},U)$ (см. [1]).

В [1] доказана

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma \in \mathcal{N}_{\rm rd}\,(\mathcal{A})$, *где* $\mathcal{A}$ — *произвольное направленное множество. Тогда для любой функции* $f \in \mathcal{R}_\Gamma\,(\mathbb{R},U)$ *и любых* $\varepsilon>0$ *и* $\mathcal{T}>0$ *существует элементарная функция* $f_\varepsilon \in \mathcal{ER}_{\Gamma^{\{\mathcal{T}\}}}\,(\mathbb{R},U)$ *такая, что* $\rho(f(t),f_\varepsilon(t))<\varepsilon$ *при п. в.* $t\in\mathbb{R}$. *Если, кроме того,* $f \in \mathcal{R}^p_\Gamma\,(\mathbb{R},U)$ *при некотором* $p \geqslant 1$, *то также* $f_\varepsilon \in \mathcal{ER}_{\Gamma^{\{\mathcal{T}\}}}\,(\mathbb{R},U) \cap \mathcal{R}^p_{\Gamma^{\{\mathcal{T}\}}}\,(\mathbb{R},U)$.

[2] На $\mathbb{R}$ рассматривается естественная метрика $\rho_{\mathbb{R}}(x,y) = |x-y|$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Так как $\Gamma \prec \Gamma^{\{\mathcal{T}\}}$ для всех $\mathcal{T} > 0$, то

$$\mathcal{ER}_\Gamma(\mathbb{R}, U) \subseteq \bigcap_{\mathcal{T} > 0} \mathcal{ER}_{\Gamma^{\{\mathcal{T}\}}}(\mathbb{R}, U).$$

Поэтому следующая теорема является усилением теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное направленное множество, $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$ и $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарная функция $f_\varepsilon \in \mathcal{ER}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$ такая, что $\rho(f(t), f_\varepsilon(t)) < \varepsilon$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$. Если, кроме того, $f \in \mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R}, U)$ при некотором $p \geqslant 1$, то также $f_\varepsilon \in \mathcal{ER}_\Gamma(\mathbb{R}, U) \cap \mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R}, U)$.*

Доказательство теоремы 2 в основном следует доказательству теоремы 1, приведенному в [1]. Ключевым утверждением при доказательстве теоремы 1 является

Теорема 3 (см. [1]). *Пусть $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Тогда для любых $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathcal{T} > 0$ существует множество $T \in \mathcal{R}_{\Gamma^{\{\mathcal{T}\}}}\{\mathbb{R}\}$ такое, что $f(t) < a + \varepsilon$ при всех $t \in T$ и $f(t) > a - \varepsilon$ при п. в. $t \in \mathbb{R} \backslash T$.*

Необходимость использования в теореме 1 элементарных функций $f_\varepsilon \in \mathcal{ER}_{\Gamma^{\{\mathcal{T}\}}}(\mathbb{R}, U)$, $\mathcal{T} > 0$, вместо элементарных функций $f_\varepsilon \in \mathcal{ER}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$ вытекает из включения $T \in \mathcal{R}_{\Gamma^{\{\mathcal{T}\}}}\{\mathbb{R}\}$ для множества T из теоремы 3. Использование более сильной теоремы 4 (которая является следствием теоремы 5) приводит к доказательству теоремы 2 (аналогично доказательству теоремы 1 в [1]).

Теорема 4. *Пусть $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Тогда для любых $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ существует множество $T \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ такое, что $f(t) < a + \varepsilon$ при всех $t \in T$ и $f(t) > a - \varepsilon$ при п. в. $t \in \mathbb{R} \backslash T$.*

Определение 4. Функция $f \in M(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ обладает σ_Γ-*свойством* (где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$), если $\{t \in \mathbb{R} : \|f(t)\| < \frac{1}{j}\} \xrightarrow{\Gamma} \varnothing$ при $j \to +\infty$ (откуда, в частности, следует, что $\mathrm{mes}\,\{t \in \mathbb{R} : f(t) = 0\} = 0$).

Если $\Gamma_j \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2$, $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$ и функция $f \in M(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ обладает σ_{Γ_1}-свойством, то она также обладает σ_{Γ_2}-свойством.

Если функция $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ обладает σ_Γ-свойством (где $\Gamma_j \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$), то (см. [1])

$$\{t \in \mathbb{R} : f(t) < 0\} \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$$

(а также $\{t \in \mathbb{R} : f(t) > 0\} \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ и $\mathrm{mes}\{t \in \mathbb{R} : f(t) = 0\} = 0$). Поэтому теорема 4 непосредственно вытекает из теоремы 5.

Теорема 5. *Пусть $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (где $\Gamma_j \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$). Тогда найдется не более чем счетное множество $\Lambda \subset \mathbb{R}$ такое, что для всех $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$ функция $f(\cdot) - \lambda$ обладает σ_Γ-свойством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Λ — множество чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых

$$\mathrm{mes}\,\{t \in \mathbb{R} : f(t) = \lambda\} \neq 0.$$

Множество Λ не более чем счетно. Предположим, что $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$. Тогда для любых чисел $l, \delta > 0$ найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\mathrm{mes}\,\{\tau \in [-l, l] : |f(\tau) - \lambda| \leqslant \varepsilon\} \leqslant l\delta.$$

Так как $\Gamma_f \prec \Gamma$, то существует элемент $\alpha \in \mathcal{A}$ такой, что $\Gamma_f(l, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2}) \supseteq \Gamma(\alpha)$. Поэтому для всех $t \in \Gamma(\alpha)$

$$\mathrm{mes}\,\Big\{\tau \in [-l, l] : |f(\tau) - f(\tau + t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big\} < l\delta.$$

Пусть $j \in \mathbb{N}$ — любое число, для которого $j > 2\varepsilon^{-1}$. Если (для некоторого $\tau \in [-l, l]$)

$$|f(\tau+t)-\lambda| = |(f(\tau)-f(\tau+t))-(f(\tau)-\lambda)| < \frac{1}{j} < \frac{\varepsilon}{2},$$

то либо $|f(\tau)-\lambda| \leqslant \varepsilon$, либо $|f(\tau)-\lambda| > \varepsilon$, но в последнем случае $|f(\tau)-f(\tau+t)| > \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому (для всех $t \in \Gamma(\alpha)$ и всех чисел $j \in \mathbb{N}$, для которых $j > 2\varepsilon^{-1}$)

$$\operatorname{mes}[-l+t, l+t] \bigcap \bigl\{\tau \in \mathbb{R} : |f(\tau)-\lambda| < \frac{1}{j}\bigr\} = \operatorname{mes}\bigl\{\tau \in [-l,l] : |f(\tau+t)-\lambda| < \frac{1}{j}\bigr\} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{mes}\{\tau \in [-l,l] : |f(\tau)-\lambda| \leqslant \varepsilon\} + \operatorname{mes}\bigl\{\tau \in [-l,l] : |f(\tau)-f(\tau+t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\bigr\} \leqslant l\delta + l\delta = 2l\delta.$$

Из произвольности выбора чисел $l, \delta > 0$ следует, что

$$\bigl\{ t \in \mathbb{R} : |f(t)-\lambda| < \frac{1}{j}\bigr\} \xrightarrow{\Gamma} \varnothing$$

при $j \to +\infty$, поэтому (в силу определения 4) функция $f(\cdot)-\lambda$ обладает σ_Γ-свойством. □

Аналогичное теореме 5 утверждение для почти периодических по Вейлю и почти периодических по Безиковичу функций приведено в [17].

Из теоремы 5 получаем, что для любой функции $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$) найдется не более чем счетное множество $\Lambda \subset \mathbb{R}$ такое, что для всех $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\Lambda$

$$\{t \in \mathbb{R} : f(t) < \lambda\} \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}.$$

Пусть $M^{\,\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$ — совокупность измеримых множеств $T \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\chi_T \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $\mathcal{R}^{\,\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$ — совокупность множеств $T \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\chi_T \in \mathcal{R}^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (что эквивалентно условию $\chi_T \in \mathcal{R}^{\,1,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$). Справедливо равенство (см. [1])

$$\mathcal{R}^{\,\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\} \;=\; \mathcal{R}\{\mathbb{R}\} \bigcap M^{\,\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}. \tag{2.1}$$

Приведем пример функции $f \in \mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которой $|f(t)| < 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$, и такой, что для любого $\lambda \in (-1,1)$

$$\{t \in \mathbb{R} : f(t) < \lambda\} \notin \mathcal{R}^{\,\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$$

(и, кроме того, равенство $f(t) = \lambda$ выполняется для счетного множества чисел $t \in \mathbb{R}$, не имеющего конечных предельных точек).

Пример 1. Определим вначале периодические (с периодом 2^j) множества $A_j \subset \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$. Положим $a_1 = 0 \in A_1 \doteq 2\mathbb{Z}$, $B_1 = \mathbb{Z}\setminus A_1$, $a_2 = 1 \in A_2 \doteq 1+4\mathbb{Z}$, $B_2 = B_1 \setminus A_2$. Числа a_j и (периодические с периодом 2^j) множества A_j, B_j далее последовательно определяем при $j = 3, 4, \ldots$. Если множество B_j уже определено при некотором $j \geqslant 2$, то пусть a_{j+1} — ближайшее к 0 число из этого множества. (Оно определяется однозначным образом.) Множество B_j распадается на два периодических с периодом 2^{j+1} множества A_{j+1} и B_{j+1} с чередующимися числами. Считаем, что $a_{j+1} \in A_{j+1}$. Продолжим процесс разбиения множеств B_j до бесконечности. Тогда $A_j = a_j + 2^j\mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$, множества A_j попарно не пересекаются и $\mathbb{Z} = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Числа a_j можно определить явно. Так как справедливы равенства $a_{j+1} = a_j + (-2)^{j-1}$, $j \in \mathbb{N}$, то

$$a_j \;=\; \frac{1}{3}\bigl(1-(-2)^{j-1}\bigr).$$

Множества A_j рассматривались и использовались для построения разных примеров в [19]. Для каждого числа $\nu \in \mathbb{N}$ перенумеруем с помощью индекса $s \in \mathbb{N}$ все рациональные числа $r_s^{(\nu)} \in (-1+2^{-\nu}, 1-2^{-\nu})\setminus\{0\}$. Нумерация при разных ν выбирается произвольно, поэтому одно и то же число $r \in \mathbb{Q}$ для разных ν может иметь разные индексы s. Для всех $\nu, \mu, s \in \mathbb{N}$ определим непрерывные функции

$$[0,1] \ni \tau \mapsto f_{\nu,\mu,s}(\tau) = \begin{cases} 3r_s^{(\nu)}\tau, & \text{если } 0 \leqslant \tau \leqslant 1/3, \\ r_s^{(\nu)} + 2^{-\nu-\mu+1}\sin(2^{\mu}\pi(3\tau-1)), & \text{если } 1/3 < \tau \leqslant 2/3, \\ 3r_s^{(\nu)}(1-\tau), & \text{если } 2/3 < \tau \leqslant 1. \end{cases}$$

Имеем $|f_{\nu,\mu,s}(\tau)| < 1$ при всех $\tau \in [0,1]$ и $f_{\nu,\mu,s}(0) = f_{\nu,\mu,s}(1) = 0$. Каждому числу $n \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие число $j = j(n) \in \mathbb{N}$ так, что $n \in A_j$. Установим также какое-либо взаимно однозначное соответствие между числами $j \in \mathbb{N}$ и упорядоченными тройками $(\nu, \mu, s) \in \mathbb{N}^3 : \nu = \nu(j)$, $\mu = \mu(j)$, $s = s(j)$, $j \in \mathbb{N}$. Определим функцию

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) = f_{\nu(j([t])),\,\mu(j([t])),\,s(j([t]))}(t - [t])$$

(где $[t]$ — целая часть числа $t \in \mathbb{R}$). Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, $|f(t)| < 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и из определения функций $f_{\nu,\mu,s}(\cdot)$ следует, что для любого $\lambda \in (-1,1)$ множество чисел $t \in \mathbb{R}$, для которых $f(t) = \lambda$, счетно и не имеет конечных предельных точек. Так как попарно непересекающиеся множества A_j, $j \in \mathbb{N}$, являются периодическими с периодами 2^j, то для любого $J \in \mathbb{N}$ ограничение функции f на периодическое с периодом 2^J множество

$$\bigcup_{j \leqslant J} \bigcup_{a \in A_j} [a, a+1]$$

является периодической с периодом 2^J функцией. Тогда из равенства $\mathbb{Z} = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} A_j$ следует, что $f \in \mathcal{R}^{(C)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. С другой стороны, нетрудно видеть, что функция f является липшицевой (с константой Липшица $C(f) = 3\pi$). Поэтому $f \in \mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Теперь зафиксируем число $\lambda \in (-1,1)$. Выберем число $\nu \in \mathbb{N}$ так, что $\lambda \in (-1+2^{-\nu}, 1-2^{-\nu})$. Для чисел $\mu \in \mathbb{N}$ определим функции $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \ni \tau \mapsto g_\mu(\tau) \in \{0,1\} : g_\mu(\tau) = 0$, если $3\tau - 1 \in [m2^{-\mu}, (m+1)2^{-\mu})$, где $m = 0, 2, 4, \ldots, 2^\mu - 2$, и $g_\mu(\tau) = 1$, если $3\tau - 1 \in [m2^{-\mu}, (m+1)2^{-\mu})$, где $m = 1, 3, \ldots, 2^\mu - 1$. Положим также $g_\mu\left(\frac{2}{3}\right) = 1$. Если $\mu_1 \neq \mu_2$, то

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} |g_{\mu_1}(\tau) - g_{\mu_2}(\tau)|\, d\tau \;=\; \frac{1}{12}. \tag{2.2}$$

С другой стороны, для любого $\mu \in \mathbb{N}$ найдется такая последовательность $s_k^{(\mu)} \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, что $s_k^{(\mu)} \to +\infty$ и $r^{(\nu)}_{s_k^{(\mu)}} \to \lambda$ при $k \to +\infty$. Тогда, обозначив

$$T_k^{(\nu,\mu)} \;=\; \left\{\tau \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] : f_{\nu,\mu,s_k^{(\mu)}}(\tau) < \lambda\right\},$$

получаем, что для всех $\nu, \mu \in \mathbb{N}$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} |\chi_{T_k^{(\nu,\mu)}}(\tau) - g_\mu(\tau)|\, d\tau \to 0$$

при $k \to +\infty$, что вместе с (2.2) означает, что множество характеристических функций множеств $\{\tau \in [0,1] : f_{\nu,\mu,s}(\tau) < \lambda\}$, $\nu, \mu, s \in \mathbb{N}$, не является предкомпактным в $L^1([0,1],\mathbb{R})$. Поэтому $\chi_{\{t \in \mathbb{R} : f(t) < \lambda\}} \notin M^{1,\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$\{t \in \mathbb{R} : f(t) < \lambda\} \notin M^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$$

и, следовательно (см. (2.1)),

$$\{t \in \mathbb{R} : f(t) < \lambda\} \notin \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$$

(при этом $\{t \in \mathbb{R} : f(t) < \lambda\} \in \mathcal{R}\{\mathbb{R}\}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$).

Замечание 2. Если $T \in \mathcal{R}^{\,\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$, то $\mathbb{R}\setminus T \in \mathcal{R}^{\,\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$. Поэтому для функции $f \in \mathcal{R}^{\,(C),\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ из примера 1 при всех $\lambda \in (-1,1)$ (так как $\mathrm{mes}\,\{t \in \mathbb{R} : f(t) = \lambda\} = 0$) также имеем

$$\{t \in \mathbb{R} : f(t) > \lambda\} \notin \mathcal{R}^{\,\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}\,.$$

В следующем примере определяется функция $f \in \mathcal{R}^{\,(C),\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которой $|f(t)| < 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и такая, что для всех чисел $\lambda \in \mathbb{Q}\bigcap(-1,1)$

$$\{t \in \mathbb{R} : f(t) < \lambda\} \notin \mathcal{R}\{\mathbb{R}\}\,, \quad \{t \in \mathbb{R} : f(t) > \lambda\} \notin \mathcal{R}\{\mathbb{R}\}\,.$$

При этом $\mathrm{mes}\,\{t \in \mathbb{R} : f(t) = \lambda\} \neq 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{Q}\bigcap(-1,1)$ и для каждого $\lambda \in (-1,1)\setminus\mathbb{Q}$ равенство $f(t) = \lambda$ выполняется для счетного множества чисел $t \in \mathbb{R}$, не имеющего конечных предельных точек (более того, для любых $\lambda \in (-1,1)\setminus\mathbb{Q}$ и $\xi \in \mathbb{R}$ множество $\{t \in [\xi, \xi+\frac{1}{3}\,] : f(t) = \lambda\}$ состоит не более чем из двух точек).

Пример 2. Пусть $a_j \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$, — числа из примера 1. Для них множества $A_j = a_j + 2^j\,\mathbb{Z}$ попарно не пересекаются и $\mathbb{Z} = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Перенумеруем все рациональные числа $r_j \in (-1,1)$, $j \in \mathbb{N}$. Для $j \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ определим функции

$$[0,1] \ni \tau \mapsto g(j;\tau) = \begin{cases} 3r_j\tau, & \text{если } 0 \leqslant \tau \leqslant 1/3,\\ r_j, & \text{если } 1/3 < \tau \leqslant 2/3,\\ 3r_j(1-\tau), & \text{если } 2/3 < \tau \leqslant 1, \end{cases}$$

$$[0,1] \ni \tau \mapsto g(j;\varepsilon;\tau) = \begin{cases} 3(r_j+\varepsilon)\tau, & \text{если } 0 \leqslant \tau \leqslant 1/3,\\ r_j - 6\varepsilon(\tau-1/2), & \text{если } 1/3 < \tau \leqslant 2/3,\\ 3(r_j-\varepsilon)(1-\tau), & \text{если } 2/3 < \tau \leqslant 1. \end{cases}$$

Пусть $\varepsilon_k^{(j)} > 0$, $k \in \mathbb{N}$, — последовательности иррациональных чисел, для которых $\varepsilon_k^{(j)} < \min\{1-r_j, 1+r_j\}$ и $\varepsilon_k^{(j)} \downarrow 0$ при $k \to +\infty$, $j \in \mathbb{N}$. (Можно также считать, что $\varepsilon_1^{(j)} \downarrow 0$ при $j \to +\infty$.) Так как

$$\mathbb{Z} = \{0\} \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} 2^{k-1}\bigl(1+2\,\mathbb{Z}\bigr)\right),$$

то каждое множество A_j разбивается на попарно непересекающиеся подмножества $\{a_j\}$ и $A_{j,\,k} = a_j + 2^{j+k-1}(1+2\,\mathbb{Z})$, $k \in \mathbb{N}$. Для всех $j \in \mathbb{N}$ определим непрерывные функции

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto f_j(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } [t] \notin A_j,\\ g(j;t-[t]), & \text{если } [t] = a_j,\\ g(j,\varepsilon_k^{(j)};t-[t]), & \text{если } [t] \in A_{j,\,k},\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Функции $f_j(\cdot)$ липшицевы (с константами Липшица $C(f_j) \leqslant 6$). Из выбора функций $g(j;\cdot)$ и $g(j,\varepsilon_k^{(j)};\cdot)$ следует, что для любого $\delta > 0$ найдется число $k_0 = k_0(\delta, j) \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $\mathbb{N} \ni k \geqslant k_0$, всех $m \in \mathbb{Z}$ и всех $t \in \mathbb{R}$

$$|f_j(t + 2^{j+k-1}m) - f_j(t)| < \delta. \tag{2.3}$$

Определим теперь непрерывную функцию $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) \in (-1,1)$, совпадающую с $f_j(t)$ при $[t] \in A_j$, $j \in \mathbb{N}$. Из (2.3) следует, что $f \in \mathcal{R}^{\,(C)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. (При этом для всех $\lambda \in (-1,1)\setminus\mathbb{Q}$ множество чисел $t \in \mathbb{R}$, для которых $f(t) = \lambda$, счетно и не имеет конечных предельных точек и $\mathrm{mes}\,\{t \in \mathbb{R} : f(t) = \lambda\} \neq 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{Q}\bigcap(-1,1)$.) Функция $f(\cdot)$ также липшицева (как и функции f_j) с константой Липшица $C(f) \leqslant 6$. Следовательно, $f \in \mathcal{R}^{\,(C),\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. С другой стороны, для всех $j, k \in \mathbb{N}$

$$\{\tau \in [-1,1] : g(j;\tau) < r_j\} \bigcap \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] = \varnothing, \quad \{\tau \in [-1,1] : g(j;\varepsilon_k^{(j)};\tau) < r_j\} \supseteq \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]. \tag{2.4}$$

Обозначим $T_j^- = \{t \in \mathbb{R} : f(t) < r_j\}$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда из (2.4) получаем, что для всех $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\int_0^1 |\chi_{T_j^-}(a_j + \tau) - \chi_{T_j^-}(a_j + 2^j m + \tau)|\, d\tau \geqslant \frac{1}{6}\,.$$

Поэтому (в силу лемм 1 и 2) $\chi_{T_j^-} \notin \mathcal{R}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и, следовательно, $T_j^- = \{t \in \mathbb{R} : f(t) < r_j\} \notin \mathcal{R}\{\mathbb{R}\}$. Аналогичным образом, для всех $j, k \in \mathbb{N}$

$$\{\tau \in [-1, 1] : g(j; \tau) > r_j\} \bigcap \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] = \varnothing, \quad \{\tau \in [-1, 1] : g(j; \varepsilon_k^{(j)}; \tau) > r_j\} \supseteq \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right). \tag{2.5}$$

Если $T_j^+ \doteq \{t \in \mathbb{R} : f(t) > r_j\}$, то из (2.5) также получаем, что для всех $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\int_0^1 |\chi_{T_j^+}(a_j + \tau) - \chi_{T_j^+}(a_j + 2^j m + \tau)|\, d\tau \geqslant \frac{1}{6}.$$

Поэтому $\chi_{T_j^+} \notin \mathcal{R}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и, следовательно, $T_j^+ = \{t \in \mathbb{R} : f(t) > r_j\} \notin \mathcal{R}\{\mathbb{R}\}$.

Замечание 3. Несколько изменив построение функции f из примера 2 (перенумеровав все числа $r_j \in \mathbb{Q}$, $j \in \mathbb{N}$, и отказавшись от условия $\varepsilon_k^{(j)} < \min\{1 - r_j, 1 + r_j\}$), можно определить функцию $f \in \mathcal{R}^{(C)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ такую, что для всех $\lambda \in \mathbb{Q}$

$$\{t \in \mathbb{R} : f(t) < \lambda\} \notin \mathcal{R}\{\mathbb{R}\}, \quad \{t \in \mathbb{R} : f(t) > \lambda\} \notin \mathcal{R}\{\mathbb{R}\}$$

(при этом также $\operatorname{mes}\{t \in \mathbb{R} : f(t) = \lambda\} \neq 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{Q}$ и для всех $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ множество чисел $t \in \mathbb{R}$, для которых $f(t) = \lambda$, счетно и не имеет конечных предельных точек).

Теорема 6 (см. [1]). *Если $f \in \mathcal{R}_\Gamma^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$), то для любых $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathcal{T} > 0$ существует множество $T \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$ такое, что $f(t) < a + \varepsilon$ при всех $t \in T$ и $f(t) > a - \varepsilon$ при п. в. $t \in \mathbb{R} \setminus T$. Если, более того, $f \in \mathcal{R}_\Gamma^{(C),\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, то множество T можно выбрать замкнутым.*

Замечание 4. Возможность в теореме 6 (для функций $f \in \mathcal{R}_\Gamma^{(C),\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) выбирать множества T замкнутыми следует из доказательства теоремы 14 в [1].

Пусть $\mathrm{Cl}_b\, U$ — множество непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства (U, ρ). На $\mathrm{Cl}_b\, U$ определяется метрика Хаусдорфа

$$\operatorname{dist}(X, Y) = \max\,\{\sup_{x \in X} \rho(x, Y),\ \sup_{y \in Y} \rho(y, X)\}, \quad X, Y \in \mathrm{Cl}_b\, U,$$

где $\rho(x, P) = \inf_{y \in P} \rho(x, y)$ — расстояние от точки $x \in U$ до непустого множества $P \subseteq U$. Метрическое пространство $(\mathrm{Cl}_b\, U, \operatorname{dist})$ является полным.

Далее рассматриваются многозначные отображения $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) \in \mathrm{Cl}_b\, U$, которые отождествляются с функциями со значениями в метрическом пространстве $(\mathrm{Cl}_b\, U, \operatorname{dist})$.

Измеримая функция $f : \mathbb{R} \to U$ называется *сечением* (измеримого) многозначного отображения $F : \mathbb{R} \to \mathrm{Cl}_b\, U$, если $f(t) \in F(t)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$.

Из теоремы 2 следует

Теорема 7. *Пусть (U, ρ) — полное метрическое пространство, $F \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\, U)$ и $g \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$, где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$. Тогда для любой неубывающей функции $\eta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, для которой $\eta(0) = 0$ и $\eta(\xi) > 0$ при $\xi > 0$, найдется функция $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$ такая, что $f(t) \in F(t)$ и $\rho(f(t), g(t)) \leqslant \rho(g(t), F(t)) + \eta(\rho(g(t), F(t)))$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$. Если, кроме того, $F \in \mathcal{R}_\Gamma^p(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\, U)$ при некотором $p \geqslant 1$, то также $f \in \mathcal{R}_\Gamma^p(\mathbb{R}, U)$.*

В теореме 7 не предполагается, что $U = (\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ — банахово пространство и многозначное отображение $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) \subseteq U$ имеет выпуклые образы.

Доказательство теоремы 7 (как и доказательство теоремы 2) здесь не приводится. Оно в основном повторяет доказательство теоремы 5 из [1], в котором необходимо использовать теорему 2 вместо теоремы 1.

§ 3. Вариант теоремы Лузина для рекуррентных функций

Фиксируем направленность $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$ (где $\mathcal{A}$ — произвольное направленное множество). Через $\mathcal{R}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$ обозначим совокупность множеств $T \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$, для которых $\chi_T \in \mathcal{R}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (что эквивалентно условию $\chi_T \in \mathcal{R}_{\Gamma}^{1,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$). Справедливо равенство

$$\mathcal{R}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\} = \mathcal{R}_{\Gamma}\{\mathbb{R}\} \bigcap M^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$$

(которое уточняет равенство (2.1)).

Если $T \in \mathcal{R}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$, то $\mathbb{R}\setminus T \in \mathcal{R}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$. Если $T_1,\, T_2 \in \mathcal{R}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$, то множества $T_1 \cap T_2$, $T_1 \cup T_2$ и $T_1 \setminus T_2$ также принадлежат $\mathcal{R}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$ [1].

Для измеримых (по Лебегу) множеств $T \subseteq \mathbb{R}$ обозначим

$$\varkappa_l(T) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{2l}\ \mathrm{mes}\,[t-l,\, t+l] \bigcap T, \quad l>0.$$

Для любого измеримого множества $T \subseteq \mathbb{R}$ и чисел $l_1 > 0$ и $l_2 \geqslant l_1$ справедливы оценки

$$\frac{l_1}{l_2}\,\varkappa_{l_1}(T) \leqslant \varkappa_{l_2}(T) \leqslant \frac{l_1}{l_2}\left(-\left[-\frac{l_2}{l_1}\right]\right)\varkappa_{l_1}(T).$$

Если $T_j \subseteq \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, — измеримые множества, то

$$\varkappa_l\,(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} T_j) \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \varkappa_l(T_j)\,, \quad l>0$$

(при этом ряд в правой части последнего неравенства может расходиться). Из определения пространства $\mathcal{R}_{\Gamma}^{1,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ следует, что если $T \subseteq \mathbb{R}$ — измеримое множество, $T_j \in \mathcal{R}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$, $T_j \subseteq T$, $j \in \mathbb{N}$, и $\varkappa_l(T\setminus T_j) \to 0$ при $j \to +\infty$ для некоторого (и, следовательно, для всех) $l > 0$, то $T \in \mathcal{R}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$. В частности, если $T_j \in \mathcal{R}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$, $j \in \mathbb{N}$, и

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \varkappa_l(T_j) < +\infty, \quad l>0,$$

то $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} T_j \in \mathcal{R}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — совокупность последовательностей $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, состоящих из попарно непересекающихся измеримых множеств $T_j \subseteq \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, таких, что

$$\varkappa_l\left(\mathbb{R}\setminus \bigcup_{j\leqslant J} T_j\right) \to 0$$

при $J \to +\infty$, $l > 0$. Если $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}$, то $\mathbb{R}\setminus \bigcup\limits_{j\leqslant J} T_j \xrightarrow{\Gamma} \varnothing$ при $J \to +\infty$ (для любой направленности $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$). Пусть $\mathfrak{M}^{\mathrm{comp}}$ — совокупность последовательностей $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}$, для которых $\chi_{T_j} \in M^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Обозначим $\mathfrak{M}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}} = \mathfrak{M}_{\Gamma} \cap \mathfrak{M}^{\mathrm{comp}}$.

Лемма 3 (см. [1]). *Если $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}$, то для любого множества $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{N}$ последовательность множеств (в любом порядке) T_j, $j \in \mathcal{Q}$, и $\mathbb{R}\setminus \bigcup\limits_{j\in\mathcal{Q}} T_j$ (которую, если необходимо, всегда можно дополнить пустыми множествами до счетной последовательности) также принадлежит $\mathfrak{M}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}$.*

Через $\mathcal{E}\mathcal{R}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$ обозначим множество элементарных функций (1.1), для которых $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}$, то есть таких, что

$$T_j \in \mathcal{R}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}, \quad j \in \mathbb{N},$$

и $\varkappa_l\big(\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{j\leqslant J}T_j\big)\to 0$ при $J\to+\infty$, $l>0$. Справедливо вложение

$$\mathcal{E}\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R},U).$$

Более того, в [1] доказана

Лемма 4. *Пусть* $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{M}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma}$ *и* $f_j\in\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$, $j\in\mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_j f_j(\cdot)\,\chi_{T_j}(\cdot)\in\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R},U).$$

Доказательства следующих двух теорем также приведены в [1].

Теорема 8 (см. [1]). *Для всех* $p\geqslant 1$

$$\mathcal{R}^{p,\,\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)\;=\;\mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)\bigcap L^{p,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U).$$

Теорема 9 (см. [1]). *Пусть* $\Gamma\in\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$, *где* $\mathcal{A}$ — *произвольное направленное множество. Тогда для любой функции* $f\in\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$ *и любых* $\varepsilon>0$ *и* $\mathcal{T}>0$ *существует элементарная функция* $f_\varepsilon\in\mathcal{E}\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},U)$ *такая, что* $\rho(f(t),f_\varepsilon(t))<\varepsilon$ *при п. в.* $t\in\mathbb{R}$. *Если, кроме того,* $f\in\mathcal{R}^{p,\,\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$ *при некотором* $p\geqslant 1$, *то также* $f_\varepsilon\in\mathcal{E}\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},U)\cap\mathcal{R}^{p,\,\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},U)$.

Справедлива также простая

Лемма 5. *Если* $f_j\in\mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$, $j\in\mathbb{N}$, *и последовательность функций* f_j, $j\in\mathbb{N}$, *равномерно* (*на* $\mathbb{R}$) *сходится к некоторой функции* $f:\mathbb{R}\to U$, *то* $f\in\mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$.

Далее будем считать, что $(U,\rho)=(\mathcal{B},\|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство (и $\rho(x,y)=\|x-y\|$, $x,y\in\mathcal{B}$).

Замечание 5. В силу теоремы Фреше [18] полное метрическое пространство (U,ρ) можно изометрически вложить в некоторое (вещественное) банахово пространство. Использование такого вложения в ряде случаев упрощает доказательства приведенных в статье утверждений.

Следующая теорема («рекуррентный» вариант теоремы Лузина) является одним из основных результатов данной работы. Теорема 10 аналогична теореме 3 из [19], которую можно считать «почти периодическим» вариантом теоремы Лузина.

Теорема 10. *Пусть* $(\mathcal{B},\|\cdot\|)$ — (*вещественное*) *банахово пространство,* $\Gamma\in\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$, *где* $\mathcal{A}$ — *произвольное направленное множество, и* $f\in\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R},\mathcal{B})$. *Тогда для любых* $\delta>0$ *и* $\mathcal{T}>0$ *существуют множество* $T\in\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$ *и функция* $\mathcal{F}\in\mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$ *такие, что* $\varkappa_1(\mathbb{R}\setminus T)<\delta$ *и* $\mathcal{F}(t)=f(t)$ *при всех* $t\in T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 9 и определения пространства элементарных функций $\mathcal{E}\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$ следует существование множества $T'\in\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$ такого, что $\varkappa_1(\mathbb{R}\setminus T')<\frac{\delta}{2}$ и функция $f(t)$ определена при всех $t\in T'$ и ограничена на множестве T'. Определим функцию

$$\mathbb{R}\ni t\mapsto g(t)=\begin{cases} f(t), & \text{если } t\in T',\\ 0, & \text{если } t\in\mathbb{R}\setminus T'.\end{cases}$$

Так как функция $g(\cdot)$ ограничена, то из леммы 4 (и теоремы 8) получаем, что $g\in\mathcal{R}^{1,\,\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$. Выберем числа $\delta_j>0$ и $\alpha_j>0$, $j\in\mathbb{N}$, так, чтобы выполнялись неравенства $\sum\limits_j\delta_j<\frac{\delta}{2}$ и $\sum\limits_j\alpha_j<+\infty$. Для каждого $\varepsilon>0$ определим функцию

$$\mathbb{R}\ni t\mapsto g_\varepsilon(t)\;=\;\frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}g(\eta)\,d\eta$$

(интеграл Бохнера [20, с. 189]). Нетрудно видеть, что $g_\varepsilon \in \mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$. Из теоремы о дифференцируемости интеграла Бохнера [20, с. 192] и предкомпактности множества функций $g(\cdot+t)$, $t\in\mathbb{R}$, в пространствах $L^1([-l,l],\mathcal{B})$, $l>0$, следует, что

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \int_{\xi}^{\xi+1} \|g(t)-g_\varepsilon(t)\|\,dt \to 0 \tag{3.1}$$

при $\varepsilon\to 0$. Из ограниченности функций $g(\cdot)-g_\varepsilon(\cdot)$ и результатов работы [1] (см., в частности, [1, лемма 43]) вытекает включение

$$\|g(\cdot)-g_\varepsilon(\cdot)\| \in \mathcal{R}^{1,\,\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Поэтому из (3.1) и теоремы 6 следует, что для каждого $j\in\mathbb{N}$ существуют число $\varepsilon_j>0$ и множество $T_j\in\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$ такие, что $\varkappa_1(\mathbb{R}\setminus T_j)<\delta_j$ и при всех $t\in T_j$ функция $g(t)$ определена и

$$\|g(t)-g_{\varepsilon_j}(t)\| < \alpha_j.$$

Положим $T''=\bigcap\limits_j T_j=\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_j(\mathbb{R}\setminus T_j)$. При этом $\mathbb{R}\setminus T_j\in\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$, $j\in\mathbb{N}$,

$$\sum_j \varkappa_j(\mathbb{R}\setminus T_j) \leqslant \sum_j \delta_j < \frac{\delta}{2},$$

поэтому $\bigcup\limits_j(\mathbb{R}\setminus T_j) \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$ и, следовательно, $T''=\bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} T_j \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$. Более того, $\varkappa_1(\mathbb{R}\setminus T'')<\frac{\delta}{2}$. Пусть

$$Y(\varepsilon;x) = \begin{cases} x, & \text{если } \|x\|<\varepsilon,\\ \varepsilon\|x\|^{-1}x, & \text{если } \|x\|\geqslant\varepsilon,\end{cases}$$

$\varepsilon>0$, $x\in\mathcal{B}$. Для всех $x,y\in\mathcal{B}$ выполняется неравенство $\|Y(\varepsilon;x)-Y(\varepsilon;y)\|\leqslant 2\,\|x-y\|$, поэтому для любой функции $G\in\mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$ имеем

$$Y(\varepsilon;G(\cdot) \in \mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathcal{B}).$$

Определим последовательно при $j=1,2,\ldots$ функции $\mathcal{F}_j\in\mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$. Положим $\mathcal{F}_1(\cdot)=g_{\varepsilon_1}(\cdot)$. Если функция $\mathcal{F}_j(\cdot)$ при некотором $j\in\mathbb{N}$ уже определена, то положим

$$\mathcal{F}_{j+1}(t) = \mathcal{F}_j(t)+Y(\alpha_j+\alpha_{j+1}\,;\,g_{\varepsilon_{j+1}}(t)-\mathcal{F}_j(t)), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Тогда $\|\mathcal{F}_{j+1}(t)-\mathcal{F}_j(t)\|\leqslant\alpha_j+\alpha_{j+1}$ для всех $t\in\mathbb{R}$ и $\mathcal{F}_{j+1}(t)=g_{\varepsilon_{j+1}}(t)$ для всех $t\in T''$, $j\in\mathbb{N}$. Если $j\to+\infty$, то последовательность функций $\mathcal{F}_j$ равномерно сходится к некоторой функции $\mathcal{F}\in\mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$ (см. лемму 5). При этом $\mathcal{F}(t)=g(t)$ при всех $t\in T''$. Осталось положить $T=T'\bigcap T''\in\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$. Тогда

$$\varkappa_1(\mathbb{R}\setminus T) \leqslant \varkappa_1(\mathbb{R}\setminus T') + \varkappa_1(\mathbb{R}\setminus T'') < \delta$$

и $\mathcal{F}(t)=f(t)$ при всех $t\in T$. □

Замечание 6. Если в условиях теоремы 10 $f\in\mathcal{R}^{p,\,\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R},\mathcal{B})$ при некотором $p\geqslant 1$, то для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать функцию $\mathcal{F}\in\mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$, для которой (кроме свойств, приведенных в теореме 10) для всех $\xi\in\mathbb{R}$ выполняется также оценка

$$\int_{[\xi,\xi+1]\setminus T} \|\mathcal{F}(t)\|^p\,dt \leqslant \int_{[\xi,\xi+1]\setminus T} \|f(t)\|^p\,dt + \varepsilon^p. \tag{3.2}$$

Действительно, воспользуемся обозначениями из доказательства теоремы 10. Фиксируем число $\varepsilon > 0$. Пусть

$$C = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|g(t)\| = \sup_{t \in T'} \|f(t)\| .$$

Выберем число $\beta > 0$ так, что

$$\beta + p(\beta^{\frac{1}{p}} + C)^{p-1} \beta^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon^p,$$

и числа $\varepsilon' > 0$ и $\varepsilon'' > 0$, для которых

$$2\varepsilon' + (2C)^{\frac{p-1}{p}} (\varepsilon'')^{\frac{1}{p}} \leqslant \beta^{\frac{1}{p}}.$$

Для чисел $\alpha_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, можно предполагать, что $\sum\limits_j \alpha_j < \varepsilon'$. Также можно выбрать число $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы, кроме неравенства $\|g(t) - g_{\varepsilon_1}(t)\| < \alpha_1$, которое справедливо для всех $t \in T_1$, выполнялось бы и неравенство

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_\xi^{\xi+1} \|g(t) - g_{\varepsilon_1}(t)\| \, dt < \varepsilon''.$$

Из определения функции $g_{\varepsilon_1}(\cdot)$ получаем, что $\|g_{\varepsilon_1}(t)\| \leqslant C$ при всех $t \in \mathbb{R}$. С другой стороны, для всех $t \in \mathbb{R}$

$$\|\mathcal{F}(t) - g_{\varepsilon_1}(t)\| \leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} \|\mathcal{F}_{j+1}(t) - \mathcal{F}_j(t)\| \leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} (\alpha_j + \alpha_{l+1}) < 2\varepsilon'.$$

Поэтому (для всех $\xi \in \mathbb{R}$)

$$\begin{gathered}
\Big(\int_{[\xi,\xi+1] \setminus T'} \|\mathcal{F}(t)\|^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\
\leqslant \Big(\int_\xi^{\xi+1} \|\mathcal{F}(t) - g_{\varepsilon_1}(t)\|^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_{[\xi,\xi+1] \setminus T'} \|g_{\varepsilon_1}(t)\|^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}} < \\
< 2\varepsilon' + C^{\frac{p-1}{p}} \Big(\int_{[\xi,\xi+1] \setminus T'} \|g_{\varepsilon_1}(t) - g(t)\| \, dt \Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2\varepsilon' + C^{\frac{p-1}{p}} (\varepsilon'')^{\frac{1}{p}} < \beta^{\frac{1}{p}}, \\
\Big(\int_{[\xi,\xi+1] \bigcap T'} \|\mathcal{F}(t)\|^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big(\int_\xi^{\xi+1} \|\mathcal{F}(t) - g_{\varepsilon_1}(t)\|^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}} + \\
+ \Big(\int_{[\xi,\xi+1] \bigcap T'} \|g_{\varepsilon_1}(t) - g(t)\|^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_{[\xi,\xi+1] \bigcap T'} \|f(t)\|^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\
\leqslant 2\varepsilon' + (2C)^{\frac{p-1}{p}} \Big(\int_{[\xi,\xi+1] \bigcap T'} \|g_{\varepsilon_1}(t) - g(t)\| \, dt \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_{[\xi,\xi+1] \bigcap T'} \|f(t)\|^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\
\leqslant \beta^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_\xi^{\xi+1} \|f(t)\|^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}}
\end{gathered}$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered}
\int_\xi^{\xi+1} \|\mathcal{F}(t)\|^p \, dt \leqslant \int_{[\xi,\xi+1] \setminus T'} \|\mathcal{F}(t)\|^p \, dt + \int_{[\xi,\xi+1] \bigcap T'} \|\mathcal{F}(t)\|^p \, dt < \qquad (3.3) \\
< \beta + \bigg(\beta^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_{[\xi,\xi+1] \bigcap T'} \|f(t)\|^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}} \bigg)^p \leqslant \\
\leqslant \beta + p(\beta^{\frac{1}{p}} + C)^{p-1} \beta^{\frac{1}{p}} + \int_{[\xi,\xi+1] \bigcap T'} \|f(t)\|^p \, dt \leqslant \varepsilon^p + \int_\xi^{\xi+1} \|f(t)\|^p \, dt.
\end{gathered}$$

Оценка (3.2) является следствием неравенства (3.3), так как $\mathcal{F}(t) = f(t)$ при всех $t \in T$.

Следующая лемма дает возможность в условиях теоремы 10 считать множества T замкнутыми.

Лемма 6. *Пусть $T \in \mathcal{R}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$. Тогда для любых $\delta > 0$ и $\mathcal{T} > 0$ найдется замкнутое множество $T' \subseteq T$ такое, что $T' \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$ и $\varkappa_1(T \setminus T') < \delta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon}\,\mathrm{mes}\,[t-\varepsilon, t+\varepsilon] \bigcap T,$$

$t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Так как $T \in \mathcal{R}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$, то (как и при доказательстве теоремы 10) нетрудно видеть, что

$$f_\varepsilon(\cdot) \in \mathcal{R}_{\Gamma}^{(C),\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Из теоремы 6 следует, что для всех $\varepsilon > 0$ существуют замкнутые множества $T(\varepsilon) \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$ такие, что $f_\varepsilon(t) > \frac{1}{3}$ при всех $t \in T(\varepsilon)$ и $f_\varepsilon(t) < \frac{2}{3}$ при всех $t \in \mathbb{R} \setminus T(\varepsilon)$. Так как функции $\chi_T(\cdot + t)$, $t \in \mathbb{R}$, образуют предкомпактное множество в $(L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), d_1)$, то

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_\xi^{\xi+1} |\chi_T(t) - f_\varepsilon(t)|\, dt \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Поэтому для любого $j \in \mathbb{N}$ можно выбрать число $\varepsilon_j > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\varkappa_1(T \setminus T(\varepsilon_j)) < 2^{-j-1}\delta, \quad \varkappa_1(T(\varepsilon_j) \setminus T) < 2^{-j}\delta.$$

Определим замкнутое множество $T'' = \bigcap\limits_{j \in \mathbb{N}} T(\varepsilon_j)$. Так как

$$\varkappa_1(T'' \setminus T) \leqslant \varkappa_1(T(\varepsilon_j) \setminus T) < 2^{-j}\delta$$

для всех $j \in \mathbb{N}$, то $\varkappa_1(T'' \setminus T) = 0$ и, следовательно, $\mathrm{mes}\, T'' \setminus T = 0$. Но тогда существует открытое периодическое с периодом $\mathcal{T}$ множество $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}$ такое, что $\varkappa_1(\mathcal{O}) < \frac{\delta}{2}$ и $T'' \setminus T \subseteq \mathcal{O}$. Из периодичности множества $\mathcal{O}$ (с периодом $\mathcal{T}$) получаем, что

$$\mathcal{O} \in \mathcal{R}_{\widetilde{\Gamma}\{\mathcal{T}\}}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}.$$

С другой стороны, $T \setminus T(\varepsilon_j) \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$, $j \in \mathbb{N}$, и $\sum\limits_j \varkappa_1(T \setminus T(\varepsilon_j)) < \frac{\delta}{2}$. Следовательно,

$$T \setminus T'' = \bigcup_j (T \setminus T(\varepsilon_j) \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$$

и

$$\varkappa_1(T \setminus T'') \leqslant \sum_j \varkappa_1(T \setminus T(\varepsilon_j)) < \frac{\delta}{2}.$$

Обозначим $T' = T'' \setminus \mathcal{O}$. Множество T' замкнуто, $T' \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$, $T' \subseteq T$ и $\varkappa_1(T \setminus T') \leqslant \varkappa_1(T \setminus T'') + \varkappa_1(\mathcal{O}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$. $\square$

Следующая теорема вытекает из теоремы 10 и леммы 6.

Теорема 11. *Пусть $f \in \mathcal{R}_{\Gamma}^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Тогда для любого $\mathcal{T} > 0$ и любых чисел $\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \cdots > \delta_j > \cdots > 0$ (для которых $\delta_j \to 0$ при $j \to +\infty$) найдутся замкнутые множества $T_j \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$ и функции $\mathcal{F}_j \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}^{(C),\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $T_j \subseteq T_{j+1}$, $\varkappa_1(\mathbb{R} \setminus T_j) < \delta_j$ и $\mathcal{F}_m(t) = f(t)$ при всех $t \in T_j$ и $m \geqslant j$, $j \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $\delta'_m = \delta_m - \delta_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$. В соответствии с теоремой 10 и леммой 6 найдем замкнутые множества $T'_m \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$ и функции $\mathcal{F}_m \in \mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$, $m \in \mathbb{N}$, такие, что $\varkappa_1(\mathbb{R}\setminus T'_m) < \delta'_m$ и $\mathcal{F}_m(t) = f(t)$ при всех $t \in T'_m$, $m \in \mathbb{N}$. Определим замкнутые множества $T_j = \bigcap\limits_{m\geqslant j} T'_m$. Так как

$$\varkappa_1(\mathbb{R}\setminus T_j) = \varkappa_1\Bigl(\bigcup_{m\geqslant j}(\mathbb{R}\setminus T'_m)\Bigr) \leqslant \sum_{m\geqslant j}\varkappa_1(\mathbb{R}\setminus T'_m) < \sum_{m\geqslant j}\delta'_m < \delta_j,$$

то $\mathbb{R}\setminus T_j \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$ и, следовательно, $T_j \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$. При этом $T_j \subseteq T_{j+1}$ и $\mathcal{F}_m(t) = f(t)$ при всех $t \in T_j$ и $m \geqslant j$, $j \in \mathbb{N}$. □

Замечание 7. Аналогично замечанию 6, если в условии теоремы 11 при некотором $p \geqslant 1$ справедливо включение $f \in \mathcal{R}^{p,\,\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R},\mathcal{B})$, то для любых чисел $\varepsilon_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, функции $\mathcal{F}_j \in \mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$ можно выбирать так, чтобы дополнительно к свойствам, приводимым в теореме 11, для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $\xi \in \mathbb{R}$ выполнялись неравенства

$$\int_{[\xi,\xi+1]\setminus T_j} \|\mathcal{F}_j(t)\|^p\,dt \leqslant \int_{[\xi,\xi+1]\setminus T_j} \|f(t)\|^p\,dt + \varepsilon_j^p\,.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилов Л.И. Рекуррентные и почти рекуррентные многозначные отображения и их сечения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 19–51.
2. Данилов Л.И. Рекуррентные и почти рекуррентные многозначные отображения и их сечения. II // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 4. С. 3–21.
3. Рохлин В.А. О разложении динамической системы на транзитивные компоненты // Матем. сборник. 1949. Т. 25 (67). № 2. С. 235–249.
4. Данилов Л.И. Почти периодические сечения многозначных отображений // Известия отдела математики и информатики УдГУ. 1993. Вып. 1. С. 16–78.
5. Данилов Л.И. Мерозначные почти периодические функции и почти периодические сечения многозначных отображений // Матем. сборник. 1997. Т. 188. № 10. С. 3–24.
6. Данилов Л.И. О почти периодических многозначных отображениях // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 1. С. 82–90.
7. Данилов Л.И. Равномерная аппроксимация почти периодических по Степанову функций // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2004. Вып. 1 (29). С. 33–48.
8. Данилов Л.И. О почти периодических сечениях многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 2. С. 34–41.
9. Долбилов А.М., Шнейберг И.Я. Почти периодические многозначные отображения и их сечения // Сиб. матем. журнал. 1991. Т. 32. № 2. С. 172–175.
10. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps // Studia Math. 1983. Vol. 76. № 2. P. 163–174.
11. Danilov L.I. On Weyl almost periodic selections of multivalued maps // J. Math. Anal. Appl. 2006. Vol. 316. № 1. P. 110–127.
12. Данилов Л.И. Почти периодические по Вейлю сечения многозначных отображений // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2006. Вып. 3 (37). С. 27–28.
13. Данилов Л.И. Об одном классе почти периодических по Вейлю сечений многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 1. С. 24–45.
14. Данилов Л.И. О почти периодических по Безиковичу сечениях многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 1. С. 97–120.
15. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 456 с.

16. Аносов Д.В., Арансон С.Х., Бронштейн И.У., Гринес В.З. Гладкие динамические системы // Динамические системы — 1. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. Том 1. М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1985. С. 151–242.
17. Данилов Л.И. О равномерной аппроксимации почти периодических по Вейлю и почти периодических по Безиковичу функций // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2006. Вып. 1 (35). С. 33–48.
18. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982. 271 с.
19. Данилов Л.И. О равномерной аппроксимации почти периодических по Степанову функций // Известия вузов. Математика. 1998. № 5. С. 10–18.
20. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.

Поступила в редакцию 30.10.2013

Данилов Леонид Иванович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Физико-технический институт УрО РАН, 426000, Россия, г. Ижевск, ул. Кирова, 132.
E-mail: lidanilov@mail.ru

L. I. Danilov

The uniform approximation of recurrent functions and almost recurrent functions

Keywords: recurrent function, selection, multivalued mapping, Lusin's theorem.

Mathematical Subject Classifications: 42A75, 54C65

We consider the classes of functions $f : \mathbb{R} \to U$, taking values in a metric space (U, ρ), which have Bochner transforms from the classes of recurrent functions and almost recurrent functions. We improve the preceding results on the uniform approximation of functions from classes under consideration by elementary functions from the same classes. These results can be applied to the investigation of the problem of the existence of almost recurrent selections for multivalued maps. The selections are supposed to satisfy a number of additional conditions. In the last section of the paper the variant of Lusin's theorem for recurrent functions is proved.

REFERENCES

1. Danilov L.I. Recurrent and almost recurrent multivalued maps and their selections, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 2, pp. 19–51.

2. Danilov L.I. Recurrent and almost recurrent multivalued maps and their selections. II, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 4, pp. 3–21.

3. Rokhlin V.A. On the decomposition of a dynamical system into transitive components, *Matematicheskii Sbornik*, 1949, vol. 25 (67), no. 2, pp. 235–249.

4. Danilov L.I. Almost periodic selections of multivalued mappings, *Izv. Otd. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 1993, no. 1, pp. 16–78.

5. Danilov L.I. Measure-valued almost periodic functions and almost periodic selections of multivalued maps, *Sbornik: Mathematics*, 1997, vol. 188, no. 10, pp. 1417–1438.

6. Danilov L.I. On almost periodic multivalued maps, *Mathematical Notes*, 2000, vol. 68, no. 1, pp. 71–77.

7. Danilov L.I. Uniform approximation of Stepanov almost periodic functions, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2004, no. 1 (29), pp. 33–48.

8. Danilov L.I. On almost periodic selections of multivalued maps, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2008, no. 2, pp. 34–41.

9. Dolbilov A.M., Shneiberg I.Ya. Multivalued almost periodic mappings and selections of them, *Siberian Math. J.*, 1991, vol. 32, no. 2, pp. 326–328.

10. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps, *Studia Math.*, 1983, vol. 76, no. 2, pp. 163–174.

11. Danilov L.I. On Weyl almost periodic selections of multivalued maps, *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, vol. 316, no. 1, pp. 110–127.

12. Danilov L.I. Weyl almost periodic selections of multivalued maps, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2006, no. 3 (37), pp. 27–28.

13. Danilov L.I. On a class of Weyl almost periodic selections of multivalued maps, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 1, pp. 24–45.

14. Danilov L.I. On Besicovich almost periodic selections of multivalued maps, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2008, no. 1, pp. 97–120.

15. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravnenii* (Qualitative theory of differential equations), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2004, 456 p.

16. Anosov D.V., Aranson S.Kh., Arnold V.I., Bronshtein I.U., Grines V.Z., Ilyashenko Yu.S. *Ordinary differential equations and smooth dynamical systems*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1997.

17. Danilov L.I. On uniform approximation of Weyl and Besicovich almost periodic functions, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2006, no. 1 (35), pp. 33–48.

18. Lyusternik L.A., Sobolev V.I. *Kratkii kurs funktsional'nogo analiza* (A Short course of functional analysis), Moscow: Vysshaya shkola, 1982, 271 p.

19. Danilov L.I. On the uniform approximation of a function that is almost periodic in the sense of Stepanov, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Matematika*, 1998, no. 5, pp. 10–18.

20. Iosida K. *Functional analysis*, New York: Springer, 1965. Translated under the title *Funktsional'nyi analiz*, Moscow: Mir, 1967, 624 p.

Received 30.10.2013

Danilov Leonid Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Physical Technical Institute of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Kirova, 132, Izhevsk, 426000, Russia.
E-mail: lidanilov@mail.ru