УДК 517.925.53

© *Е. В. Васильева*

УСТОЙЧИВЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ГЛАДКИХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ МНОГОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА[1]

Рассматриваются C^r-гладкие ($r \geqslant 1$) диффеоморфизмы многомерного пространства в себя с гиперболической неподвижной точкой и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Из работ Ш. Ньюхауса, Л. П. Шильникова, Б. Ф. Иванова и других авторов следует, что при определенном способе касания устойчивого и неустойчивого многообразий окрестность гомоклинической точки может содержать счетное множество устойчивых периодических точек, но по крайней мере один из характеристических показателей у таких точек стремится к нулю с ростом периода. В предлагаемой работе показано, что при определенных условиях, наложенных на характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий, в окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки лежит бесконечное множество устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля.

Ключевые слова: диффеоморфизм многомерного пространства, гомоклинические точки, устойчивые периодические точки.

В данной работе показано, что при определенных условиях C^r-гладкий ($r \geqslant 1$) диффеоморфизм многомерного пространства в себя имеет счетное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями. Предполагается, что у указанного диффеоморфизма имеются неподвижная гиперболическая точка в начале координат и нетрансверсальная гомоклиническая к ней точка. В работе определяется способ касания устойчивого и неустойчивого многообразий и показывается, что при таком касании этих многообразий окрестность гомоклинической точки содержит счетное множество устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля. Из статей [1–3] следует, что при определенном способе касания этих многообразий окрестность гомоклинической точки может содержать счетное множество устойчивых периодических точек, но по крайней мере один из характеристических показателей у таких точек стремится к нулю с ростом периода, в предлагаемой работе рассматривается несколько иной способ касания.

Ранее в работах [4, 5] рассматривался диффеоморфизм плоскости в себя, в этих работах показано, при каких условиях диффеоморфизм плоскости может иметь счетное множество устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля. Пример такого диффеоморфизма плоскости приведен в книге [6]. Диффеоморфизм многомерного пространства в себя класса C^1 рассматривался в работе [7], в которой предполагалось, что матрица Якоби указанного диффеоморфизма является диагональной в начале координат. В данной работе показано, что диффеоморфизм многомерного пространства произвольного класса гладкости может иметь счетное множество устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля, причем матрица Якоби у такого диффеоморфизма не должна быть диагональной в начале координат.

Пусть f — диффеоморфизм многомерного пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат, а именно $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0$.

Далее координаты точек n-мерного пространства обозначаются как (x, y), где $(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y)$; через x будут обозначаться векторы $(n-1)$-мерного пространства, то есть $x = \operatorname{col}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

Предположим, что диффеоморфизм f линеен в некоторой окрестности начала координат V,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 13–01–00624).

следовательно,

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = Df(0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Пусть $Df(0)$ имеет вид

$$Df(0) = \begin{pmatrix}\Lambda & 0\\0 & \mu\end{pmatrix},$$

где Λ — квадратная матрица порядка $(n-1)$, а μ — положительное действительное число больше единицы. Предположим, что матрица Λ совпадает со своей действительной жордановой формой, а именно

$$\Lambda = \mathrm{diag}[J_1, J_2, \ldots, J_l],$$

где J_k $(k = 1, \ldots, l)$ — действительные жордановы клетки.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ — собственные числа матрицы Λ. Считаем, что

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_{n-1}| < 1 < \mu.$$

Очевидно, что конечная последовательность собственных чисел может содержать одинаковые элементы, также среди собственных чисел могут быть комплексно сопряженные.

Считаем, что $\det Df(0) > 0$. Ясно, что $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \mu$ — собственные числа матрицы $Df(0)$. Обозначим $\lambda = |\lambda_{n-1}|$.

Пусть

$$\lambda\mu < 1. \tag{2}$$

Обозначим через θ положительную постоянную величину такую, что

$$\lambda\mu^{1+\theta} < 1. \tag{3}$$

Пусть $W^s(0)$, $W^u(0)$ — устойчивое и неустойчивое многообразия точки нуль. Ясно, что в окрестности V многообразие $W^s_{loc}(0)$ совпадает с подпространством $(0x_1, 0x_2, \ldots, 0x_{n-1})$, а W^u_{loc} — с осью $(0y)$.

Считаем, что пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий содержит отличную от нуля точку, называемую *гомоклинической точкой*, причем эта точка является точкой касания этих многообразий.

Обозначим через p и q две точки из орбиты гомоклинической точки, лежащие в V, такие, что $q \in W^s_{loc}(0)$, $p \in W^u_{loc}(0)$. Запишем координаты этих точек $q = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, 0)$, $p = (0, 0, \ldots, y^0)$. Пусть

$$x_1^0 > 0, \quad x_2^0 > 0, \quad \ldots, \quad x_{n-1}^0 > 0, \quad y^0 > 0. \tag{4}$$

Обозначим $x^0 = \mathrm{col}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0)$. Из определения гомоклинической точки следует, что существует натуральное число ω такое, что $f^\omega(p) = q$. Пусть U — выпуклая окрестность точки p такая, что $U \subset V$, $f^\omega(U) \subset V$. Обозначим через L сужение $f^\omega|_U$. Ясно, что L — отображение класса C^r $(r \geqslant 1)$, а $DL(0)$ — невырожденная матрица.

Предположим, что

$$DL(0) = \begin{pmatrix}A & B\\C & 0\end{pmatrix}, \tag{5}$$

где A — квадратная матрица порядка $(n-1)$, $B = \mathrm{col}(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$, $C = (c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$, причем $\det DL(0) > 0$.

Ясно, что точка q является точкой касания устойчивого и неустойчивого многообразий.

Запишем отображение L в координатах:

$$L(0) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 + Ax + B(y - y^0) + \varphi(x, y - y^0) \\ Cx + g(y - y^0) + \psi(x) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где φ — $(n-1)$-мерная вектор-функция n переменных, ψ — функция $n-1$ переменной. Эти функции r раз непрерывно дифференцируемы ($r \geqslant 1$) в окрестности начала координат и равны нулю вместе со своими производными первого порядка в начале координат, g — функция одной переменной класса C^r ($r \geqslant 1$) в окрестности нуля такая, что $g(0) = g'(0) = 0$.

Предположим, что производные первого порядка функций φ, ψ ограничены в окрестности U, точнее, пусть M — положительная постоянная такая, что

$$\left\| \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} \right\| \leqslant M, \quad \left\| \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} \right\| \leqslant M, \quad \left\| \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right\| \leqslant M.$$

Опишем характер касания многообразий $W^s(0)$, $W^u(0)$ в точке q. Для этого рассмотрим две положительные последовательности, стремящиеся к нулю, которые обозначим σ_k, ε_k. Предположим, что последовательность σ_k убывает, точнее $\sigma_k > \sigma_{k+1} > 0$, $\varepsilon_k > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k = \lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. Пусть выполнено неравенство

$$\sigma_k - \varepsilon_k - \sigma_{k+1} - \varepsilon_{k+1} > 0 \tag{7}$$

для любого k.

Предположим, что m_k — возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$(\lambda \mu^{1+\theta})^{m_k} < \varepsilon_k \tag{8}$$

для любого k. В дальнейшем уточним, насколько быстро последовательность m_k стремится к бесконечности.

По введенным последовательностям определим следующие последовательности:

$$x_k = (E - \Lambda^{m_k} A)^{-1} \Lambda^{m_k} (x^0 + \sigma_k B), \quad y_k = y^0 + \sigma_k,$$

где x_k — последовательность векторов, а y_k — скалярная последовательность. Очевидно, что $\det(E - \Lambda^{m_k} A)^{-1} \neq 0$, поэтому определение последовательности векторов x_k корректно.

Из свойств матриц следует, что существуют целая неотрицательная величина β такая, что $0 \leqslant \beta \leqslant n-2$, и положительная ограниченная последовательность η_k такая, что для достаточно больших номеров k справедливы следующие неравенства:

$$\|\Lambda^{m_k}\| \leqslant (m_k)^\beta \lambda^{m_k} \eta_k, \quad \|x_k\| \leqslant 2\|x^0\| (m_k)^\beta \lambda^{m_k} \eta_k. \tag{9}$$

Определим последовательность

$$\delta_k = \max\Big[(m_k)^\beta \lambda^{m_k} \sigma_k \eta_k,\, 4(M + \|B\|)(m_k)^\beta \lambda^{m_k} \eta_k \varepsilon_k \Big].$$

Пусть C^r-гладкая ($r \geqslant 1$) функция g удовлетворяет следующим условиям:

$$|g(\sigma_k) + Cx_k - \mu^{-m_k} y_k| < 0.25 \varepsilon_k \mu^{-m_k} \tag{10}$$

для любого k.

Предположим, что при некотором значении $\alpha > 1$ производная первого порядка функций g удовлетворяет следующим неравенствам при любых k:

$$|g'(t)| < \mu^{-\alpha m_k}, \tag{11}$$

где $t \in [\sigma_k - \varepsilon_k,\, \sigma_k + \varepsilon_k]$.

Ясно, что условия (10), (11) определяют способ касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точке q, из этих условий следует, что все производные функции g в нуле равны нулю, а именно

$$g(0) = \frac{dg(0)}{dt} = \ldots = \frac{d^r g(0)}{dt^r} = 0.$$

В статьях [1–3] предполагалось, что

$$g(0) = \frac{dg(0)}{dt} = \ldots = \frac{d^{r-1} g(0)}{dt^{r-1}} = 0, \quad \frac{d^r g(0)}{dt^r} \neq 0.$$

В случае выполнения последних соотношений способ касания устойчивого и неустойчивого многообразий отличается от способа касания этих многообразий, представленного в данной работе.

Определим последовательность множеств

$$U_k = \{(x, y) : \|x - x_k\| < \delta_k,\ |y - y_k| < \varepsilon_k\}.$$

Ясно, что верно включение $U_k \subset U$ при достаточно больших k.

Теорема 1. *Пусть f — диффеоморфизм класса C^r $(r \geqslant 1)$ многомерного пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат, имеющий нетрансверсальную гомоклиническую к ней точку p. Пусть выполнены условия* (1)–(11), *тогда окрестность U точки p содержит счетное множество устойчивых периодических точек диффеоморфизма f, причем характеристические показатели у этих точек отделены от нуля.*

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы, тогда справедливы следующие включения:*

$$f^{m_k} L(\bar{U}_k) \subset U_k, \tag{12}$$

где $\bar{U}_k$ — замыкание U_k.

Доказательство леммы. Пусть

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{y}_k \end{pmatrix} = f^{m_k} L \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}.$$

Покажем, что для достаточно больших номеров k имеют место включения

$$(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \subset U_k. \tag{13}$$

Легко видеть, что

$$\bar{x}_k = x_k + \Lambda^{m_k} \varphi(x_k, \sigma_k), \quad \bar{y}_k = y_k + \mu^{m_k}(g(\sigma_k) + Cx_k - \mu^{-m_k} y_k + \psi(x_k)).$$

После применения теоремы о среднем значении к функциям φ, ψ и использования условий (9), (10) получим

$$|\bar{y}_k - y_k| < 0.5\varepsilon_k, \quad \|\bar{x}_k - x_k\| < 0.5\delta_k.$$

Последние неравенства доказывают включения (13).

Пусть $(x, y) \in \bar{U}_k$, тогда представим x, y как $x = x_k + u$, $y = y_k + v$, где $u = \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_{n-1})$, $\|u\| \leqslant \delta_k$, $|v| \leqslant \varepsilon_k$.

Обозначим

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = f^{m_k} L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$\bar{x} = \bar{x}_k + \Lambda^{m_k}(Au + Bv + \varphi(x_k + u, \sigma_k + v) - \varphi(x_k, \sigma_k)),$$
$$\bar{y} = \bar{y}_k = y_k + \mu^{m_k}(Cu + g(\sigma_k + v) - g(\sigma_k) + \psi(x_k + u) - \psi(x_k)).$$

Применив теорему о среднем значении к разностям $\varphi(x_k + u, \sigma_k + v) - \varphi(x_k, \sigma_k)$, $g(\sigma_k + v) - g(\sigma_k)$, $\psi(x_k + u) - \psi(x_k)$, учитывая условия (9), легко получить, что при достаточно больших номерах k справедливы неравенства

$$|\bar{y} - \bar{y}_k| < 0.5\varepsilon_k, \quad \|\bar{x} - \bar{x}_k\| < 0.5\delta_k, \quad .$$

Последние неравенства доказывают лемму. □

Доказательство теоремы. Из (12) следует, что при любом k (может быть, начиная с некоторого номера) окрестность U_k содержит неподвижную точку отображения $f^{m_k}L$, которая является периодической точкой диффеоморфизма f с периодом $\omega + m_k$.

Обозначим эти точки и их координаты следующим образом:

$$s_k = (x_k^*, y^0 + y_k^*).$$

Для того чтобы оценить характеристические показатели точек s_k, надо оценить собственные числа матрицы $Df^{m_k}L(s_k)$. Ясно, что эта матрица имеет вид

$$Df^{m_k}L(s_k) = \begin{pmatrix} \Lambda^{m_k}A_k & \Lambda^{m_k}B_k \\ \mu^{m_k}C_k & \mu^{m_k}g_k \end{pmatrix},$$

где

$$A_k = A + \frac{\partial\varphi(x_k^*, y_k^*)}{\partial x}, \quad B_k = B + \frac{\partial\varphi(x_k^*, y_k^*)}{\partial y}, \quad C_k = C + \frac{\partial\psi(x_k^*)}{\partial x}, \quad g_k = \frac{dg(y_k^*)}{dy}.$$

Из последних соотношений и условий (11) получим

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A, \quad \lim_{k\to\infty} B_k = B, \quad \lim_{k\to\infty} C_k = C, \quad |g_k| < \mu^{-\alpha m_k}.$$

При любом фиксированном k рассмотрим характеристический многочлен $\chi(\rho)$ матрицы $Df^{m_k}L(s_k)$. Пусть

$$\chi(\rho) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}c_j\rho^{n-j},$$

где $c_0 = 1$. Известно, что коэффициенты характеристического многочлена матрицы (при $j = 1, 2, \ldots, n$) представляют собой сумму всех возможных главных миноров соответствующего порядка. (*Главным минором* матрицы называется такой минор, у которого номера выбранных строк совпадают с номерами столбцов.) Пусть Θ_j — главный минор порядка j матрицы $Df^{m_k}L(s_k)$. Ясно, что

$$c_j = \sum_{(j)}\Theta_j. \tag{14}$$

Суммирование в последней сумме ведется по всем возможным наборам из j номеров, выбранным из последовательности $1, 2, \ldots, n$. Ясно, что число слагаемых в этой сумме равно C_n^j (числу сочетаний). Очевидно, что

$$c_1 = \operatorname{Tr} Df^{m_k}L(s_k), \quad c_n = \det Df^{m_k}L(s_k).$$

Предположим, что величина α, определенная в условиях (11), удовлетворяет следующему неравенству:

$$1 < \alpha < 1 + \theta n^{-1}, \tag{15}$$

где величина θ определена условием (3).

Из последнего неравенства и условий (14) легко получить

$$\begin{aligned} c_1 &= \left(\mu^{-(\alpha-1)}\right)^{m_k} Q_1(k), \\ c_j &= (m_k)^{\beta}(\lambda\mu)^{m_k} Q_j(k), \quad j = 2, \ldots, n-1, \\ c_n &= (\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}\mu)^{m_k} Q_n(k). \end{aligned} \tag{16}$$

Ясно, что последовательности $Q_j(k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, ограничены при любых k. С другой стороны, пусть $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — корни характеристического многочлена $\chi(\rho)$. Запишем

$$\chi(\rho) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n}(\rho - \rho_j) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\rho^{n-j} \sum_{(j)} \rho_{t_1}\rho_{t_2} \ldots \rho_{t_j},$$

откуда

$$c_j = \sum_{(j)} \rho_{t_1}\rho_{t_2} \ldots \rho_{t_j}, \tag{17}$$

суммирование ведется по всем возможным наборам индексов $t_1, t_2, \ldots, t_j$, выбранным из конечной последовательности индексов $1, 2, \ldots, n$. Ясно, что число слагаемых в сумме, стоящей в правой части формулы (17), равно C_n^j (числу сочетаний).

Покажем, что тогда существует положительная постоянная T, не зависящая от k, такая, что

$$|\rho_j(k)| \leqslant T\mu^{-(\alpha-1)m_k}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{18}$$

где $\rho_j(k)$ — корни характеристического многочлена.

Неравенства (18) докажем от противного, то есть предположим, что они не выполняются для бесконечного числа индексов k; точнее, существуют подпоследовательность индексов k_s $\left(\lim\limits_{s\to\infty} k_s = +\infty\right)$ и последовательность номеров j_s, $1 \leqslant j_s \leqslant n$, таких, что

$$\rho_{j_s}(k_s) = \Gamma(k_s)\mu^{-(\alpha-1)m_{k_s}}, \qquad \lim_{s\to\infty} |\Gamma(k_s)| = +\infty.$$

Для простоты последующих рассуждений предположим, что $k_s = k$, $j_s = 1$ для любого k, тогда получим

$$\rho_1 = \Gamma(k)\mu^{-(\alpha-1)m_k}, \qquad \lim_{k\to\infty} |\Gamma(k)| = +\infty. \tag{19}$$

Покажем, что из этих равенств следует

$$\begin{gathered} \rho_1 \sum_{(j)} \rho_{t_2}\rho_{t_3} \ldots \rho_{t_j} = \Gamma_j(k)\mu^{-(\alpha-1)jm_k}, \quad j = 2, 3, \ldots, n, \\ \lim_{k\to\infty} |\Gamma_j(k)| = +\infty, \end{gathered} \tag{20}$$

где $t_2, t_3, \ldots, t_j$ — произвольный набор индексов, выбранный из конечной последовательности индексов $2, 3, \ldots, n$, а суммирование ведется по всем возможным указанным наборам; ясно, что число слагаемых в сумме равно C_{n-1}^{j-1}.

Докажем равенства (20) по индукции. Учитывая предположения (19), получим

$$c_1 - \rho_1 = \sum_{j=2}^{n} \rho_j = \mu^{-(\alpha-1)m_k}[Q_1(k) - \Gamma(k)]. \tag{21}$$

Представим

$$\sum_{j=2}^{n} \rho_j = \mu^{-(\alpha-1)m_k}\bar{\Gamma}_1(k),$$

где $\bar{\Gamma}_1(k)$ определяется равенствами (21), причем $\lim\limits_{k\to\infty}\bar{\Gamma}_1(k)=+\infty$. В результате

$$\rho_1\sum_{j=2}^{n}\rho_j=\Gamma(k)\bar{\Gamma}_1(k)\mu^{-2(\alpha-1)m_k}.$$

Пусть

$$\Gamma_2(k)=\Gamma(k)\bar{\Gamma}_1(k),$$

очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty}\bar{\Gamma}_2(k)=+\infty$; из последнего соотношения следует равенство (20) при $j=2$.

База индукции установлена, перейдем к доказательству индукционного перехода. Пусть $j<n$. Из равенств (17) имеем

$$c_j-\rho_1\sum_{(j)}\rho_{t_2}\rho_{t_3}\,\ldots\,\rho_{t_j}=\sum_{(j),t_1>1}\rho_{t_1}\rho_{t_2}\,\ldots\,\rho_{t_j},$$

в левой части последних равенств суммирование ведется по всем возможным наборам из $j-1$ индекса, выбранным из конечной последовательности номеров $2,3,\,\ldots\,,n$, в правой части — по всем возможным наборам из j индексов, выбранным из той же конечной последовательности номеров. Из условий (16) имеем

$$c_j-\rho_1\sum_{(j)}\rho_{t_2}\rho_{t_3}\,\ldots\,\rho_{t_j}=\mu^{-(\alpha-1)jm_k}\left[\left(\lambda\mu\mu^{(\alpha-1)j}\right)^{m_k}(m_k)^{\beta}Q_j(k)-\Gamma_j(k)\right]. \qquad (22)$$

В результате имеем

$$\sum_{(j),t_1>1}\rho_{t_1}\rho_{t_2}\,\ldots\,\rho_{t_j}=\mu^{-(\alpha-1)jm_k}\bar{\Gamma}_j(k),$$

где $\bar{\Gamma}_j(k)$ определяется равенствами (22). Очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty}|\bar{\Gamma}_j(k)|=+\infty$. Пусть $\Gamma_{j+1}(k)=\Gamma(k)\bar{\Gamma}_j(k)$, тогда

$$\rho_1\sum_{(j),t_1>1}\rho_{t_1}\rho_{t_2}\,\ldots\,\rho_{t_j}=\mu^{-(\alpha-1)(j+1)m_k}\bar{\Gamma}_{j+1}(k),$$

причем

$$\lim_{k\to\infty}|\Gamma_{j+1}(k)|=+\infty.$$

Таким образом, доказан индукционный переход, следовательно, соотношения (20) имеют место при $1<j\leqslant n$.

Пусть $j=n$, тогда равенства (20) имеют вид

$$\rho_1\rho_2\,\ldots\,\rho_n=\mu^{-(\alpha-1)nm_k}\Gamma_n(k),$$

где $\lim\limits_{k\to\infty}|\Gamma_n(k)|=+\infty$. С другой стороны,

$$\rho_1\rho_2\,\ldots\,\rho_n=(\lambda_1\,\ldots\,\lambda_{n-1}\mu)^{m_k}Q_n(k),$$

следовательно,

$$\Gamma_n(k)=\left(\lambda_1\,\ldots\,\lambda_{n-1}\mu^{1+(\alpha-1)n}\right)^{m_k}Q_n(k).$$

Из условий (15), (16) следует, что $\Gamma_n(k)$ ограничена по k. Полученное противоречие доказывает неравенства (18).

Известно, что характеристические показатели периодических точек s_k диффеоморфизма f определяются как

$$\nu_j(k)=(\omega+m_k)^{-1}\ln|\rho_j(k)|,\quad j=1,2,\,\ldots\,,n,$$

откуда с учетом (18) получим

$$\nu_j(k)\leqslant(\omega+m_k)^{-1}(\ln T-(\alpha-1)m_k\ln\mu)\leqslant-0.5(\alpha-1)\ln\mu,\quad j=1,2,\,\ldots\,,n,$$

последние неравенства справедливы для всех номеров k, начиная с некоторого номера.

Теорема доказана. $\square$

Статья посвящена 60-летию со дня рождения профессора Николая Никандровича Петрова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов Б.Ф. Устойчивость траекторий, не покидающих окрестность гомоклинической кривой // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 8. С. 1411–1414.
2. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической точкой // Доклады Академии наук. 1993. Т. 330. № 2. С. 144–147.
3. Newhouse Sh. Diffeomorphisms with infinitely many sinks // Topology. 1973. Vol. 12. P. 9–18.
4. Васильева Е.В. Устойчивые периодические точки двумерных диффеоморфизмов класса // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2007. Вып. 2. С. 20–26.
5. Васильева Е.В. Гладкие диффеоморфизмы плоскости с устойчивыми периодическими точками, лежащими в окрестности гомоклинической кривой // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 10. С. 1355–1360.
6. Плисс В.А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977. 304 с.
7. Васильева Е.В. Диффеоморфизмы многомерного пространства с бесконечным множеством устойчивых периодических точек // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2012. Вып. 3. С. 3–13.

Поступила в редакцию 18.11.2013

Васильева Екатерина Викторовна, к. ф.-м. н., доцент, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, 198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетский пр., 28.
E-mail: ekvas1962@mail.ru

E. V. Vasil'eva

Stable periodic points for smooth diffeomorphisms of multidimensional space

Keywords: diffeomorphism of multidimentional space, homoclinic points, stable periodic points.

Mathematical Subject Classifications: 37C29, 37C75

We regard C^r-smooth ($r \geqslant 1$) self-diffeomorphism of multidimensional space with a hyperbolic fixed point and non-transversal homoclinic point. In the works by Sh. Newhouse, L. P. Shil'nikov, B. F. Ivanov and other authors it is shown that under certain condition on the type of contact of stable and unstable manifolds, the neighborhoods of the homoclinic point may contain a countable set of stable periodic points, but at least one of their characterictic exponents tends to zero with the increase of a period. The goal of this work is to prove that under certain conditions imposed on the character of tangency between the stable and unstable manifolds, the neighborhood of the homoclinic point may contain an infinite set of stable periodic points whose characteristic exponents are negative and bounded away from zero.

REFERENCES

1. Ivanov B.F. Stability of the trajectories that do not leave the neighborhood of a homoclinic curve, *Differ. Uravn.*, 1979, vol. 15, no. 8, pp. 1411–1414.

2. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shil'nikov L.P. Dynamical phenomena in multidimensional systems with a structurally unstable homoclinic Poincare' curve, *Russian Academy of Sciences. Doklady. Mathematics*, 1993, vol. 47, no. 3, pp. 410–415.

3. Newhouse Sh. Diffeomorphisms with infinitely many sinks, *Topology*, 1973, vol. 12, pp. 9–18.

4. Vasil'eva E.V. Stable nonperiodic points of two-dimensional C^1-diffeomorphisms, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, 2007, vol. 40, issue 2, pp. 107–113.

5. Vasil'eva E.V. Smooth diffeomorphisms of the plane with stable periodic points in a neighborhood of a homoclinic point, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 10, pp. 1335–1340.

6. Pliss V.A. *Integral'nye mnozhestva periodicheskikh system differentsial'nykh uravnenii* (Integral sets of periodical systems of differential equations), Moscow: Nauka, 1977, 304 p.

7. Vasil'eva E.V. Diffeomorphisms of multidimensional space with infinite set of stable periodic points, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, 2012, vol. 45, issue 3, pp. 115–124.

Received 18.11.2013

Vasil'eva Ekaterina Viktorovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics and Mechanics, St. Petersburg State University, Universitetskii pr., 28, St. Petersburg, 198504, Russia.
E-mail: ekvas1962@mail.ru