МАТЕМАТИКА 2013. Вып. 4

УДК 517.518.65

© *И. Н. Банщикова, С. Н. Попова*

К СВОЙСТВУ ЗАМКНУТОСТИ МНОЖЕСТВА ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ [1]

Работа посвящена исследованию свойства замкнутости относительно операции сложения множества равномерных почти периодических функций. Показано, что доказательство этого свойства, проведенное в монографии Б. П. Демидовича «Лекции по математической теории устойчивости», содержит пробел. Приведено корректное доказательство.

Ключевые слова: почти периодические функции, замкнутость.

Работа посвящена исследованию свойства замкнутости относительно операции сложения множества равномерных почти периодических функций. Традиционно это свойство доказывается как следствие теоремы Бохнера (см., например, [1, с. 24–27]) о нормальности почти периодических функций. Прямое доказательство замкнутости в русскоязычной литературе содержится, по-видимому, только в монографии Б. П. Демидовича [2]. В настоящей работе показано, что доказательство в [2] содержит пробел, и приведено корректное доказательство. Его изложение в основном следует рассуждениям А. С. Безиковича [3]. При этом нами использованы более удобные обозначения и восстановлены фрагменты доказательства, опущенные в [3].

Напомним основные понятия теории почти периодических функций [1, 2].

Определение 1. Числовое множество E называется *относительно плотным* на действительной оси $-\infty < x < +\infty$, если существует $l > 0$ такое, что каждый полуинтервал $a \leqslant x < a + l$ длины l содержит хотя бы один элемент этого множества. Каждое такое число l называется *интервалом включения* множества E.

Определение 2. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\tau \in \mathbb{R}$ называется *ε-почти периодом* функции $f : \mathbb{R} \to \to \mathbb{R}$, если имеет место неравенство

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Непосредственно из этого определения вытекают следующие свойства почти периодов для одной и той же функции.

Свойство 1. *Если τ есть ε-почти период функции $f(\cdot)$, то τ есть ε'-почти период функции $f(\cdot)$ для любого $\varepsilon' > \varepsilon$.*

Свойство 2. *Если τ есть ε-почти период функции $f(\cdot)$, то $-\tau$ есть также ε-почти период этой функции.*

Свойство 3. *Если τ_1 есть ε_1-почти период функции $f(\cdot)$ и τ_2 есть ε_2-почти период функции $f(\cdot)$, то $\tau_1 \pm \tau_2$ есть $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$-почти периоды функции $f(\cdot)$.*

Обозначим множество всех ε-почти периодов функции $f(\cdot)$ через $E\{\varepsilon, f\}$. Итак,

$$E\{\varepsilon, f\} \doteq \{\tau \in \mathbb{R} | \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| \leqslant \varepsilon\}.$$

Заметим, что свойство 1 записывается в виде $E\{\varepsilon', f\} \supset E\{\varepsilon, f\}$ при всех $\varepsilon' > \varepsilon$;
свойство 2: если $\tau \in E\{\varepsilon, f\}$, то $-\tau \in E\{\varepsilon, f\}$;
свойство 3: если $\tau_1 \in E\{\varepsilon_1, f\}, \tau_2 \in E\{\varepsilon_2, f\}$, то $\tau_1 \pm \tau_2 \in E\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2, f\}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12–01–00125).

Определение 3. Непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *почти периодической в смысле Бора* (*равномерной почти периодической функцией*), если для каждого $\varepsilon > 0$ множество $E\{\varepsilon, f\}$ относительно плотно.

Обозначим через $l(\varepsilon, f)$ интервал включения множества $E\{\varepsilon, f\}$.

Пример 1. Непрерывная периодическая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является почти периодической. Действительно, если число $T > 0$ является периодом функции $f(\cdot)$, то при каждом $\varepsilon > 0$ множество $E\{\varepsilon, f\}$ содержит в себе относительно плотное множество $\{kT | \, k \in \mathbb{Z}\}$ и по этой причине само является относительно плотным. Здесь можно выбрать $l(\varepsilon, f) = T$.

Пример 2. Пусть $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывные периодические функции, $T_j > 0$ — их периоды ($j = 1, 2$). Если числа T_1 и T_2 рационально зависимы (соизмеримы), то есть $\alpha_1 T_1 = \alpha_2 T_2$ при некоторых $\alpha_1 = m_1/n_1$, $\alpha_2 = m_2/n_2 \in \mathbb{Q}$, то функция $f(\cdot) \doteq f_1(\cdot) + f_2(\cdot)$ является периодической. В качестве периода функции $f(\cdot)$ можно выбрать число $T = m_1 n_2 T_1 = m_2 n_1 T_2$, являющееся общим периодом функций $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$. Если же числа T_1 и T_2 рационально независимы (несоизмеримы), то общего периода функций $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ не существует и функция $f(\cdot)$ не является периодической. Покажем, что $f(\cdot)$ почти периодическая. Заметим, что непрерывные периодические функции $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и, в соответствии со свойством равномерной непрерывности, найдем такое число $\delta > 0$, что для произвольных $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $|x_1 - x_2| < \delta$, выполнены неравенства $|f_j(x_1) - f_j(x_2)| < \varepsilon/2$, $j = 1, 2$. В силу теоремы Кронекера [1, с. 106] для выбранного $\delta > 0$ существует такое $L > 0$, что на каждом полуинтервале $[a, a + L)$ числовой прямой найдется τ, обладающее следующим свойством: при некоторых $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ выполнены неравенства $|\tau - k_j T_j| < \delta$, $j = 1, 2$. Тогда для каждого $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{gathered}
|f(x+\tau) - f(x)| \leqslant |f_1(x+\tau) - f_1(x + k_1 T_1)| + |f_1(x + k_1 T_1) - f_1(x)| + \\
+ |f_2(x+\tau) - f_2(x + k_2 T_2)| + |f_2(x + k_2 T_2) - f_2(x)| = \\
= |f_1(x+\tau) - f_1(x + k_1 T_1)| + |f_2(x+\tau) - f_2(x + k_2 T_2)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
\end{gathered}$$

Итак, множество $E(\varepsilon, f)$ относительно плотно на $\mathbb{R}$ при каждом $\varepsilon > 0$. Следовательно, функция $f(\cdot)$ почти периодическая.

Для дальнейшего нам понадобится следующее свойство равномерных почти периодических функций, доказательство которого можно найти, например, в [2, с. 369–370].

Теорема 1. *Почти периодическая функция равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}$.

Следствие 1. *Если $f(\cdot)$ — почти периодическая функция, то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что интервал $(-\delta, \delta)$ целиком лежит во множестве $E\{\varepsilon, f\}$.*

Доказательство. Если $f(\cdot)$ — почти периодическая функция, то она равномерно непрерывна, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух точек x_1, x_2 из множества действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $|x_2 - x_1| < \delta$, выполнено $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем соответствующее δ. Тогда для каждого $\tau \in (-\delta, \delta)$ и всех $x \in \mathbb{R}$ имеем неравенство $|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$, поэтому $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Следовательно, $\tau \in E\{\varepsilon, f\}$, и $(-\delta, \delta) \subset E\{\varepsilon, f\}$, что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 2. *Для каждого $\varepsilon > 0$ множество ε-почти периодов почти периодической функции $f(\cdot)$ содержит относительно плотное множество полуинтервалов фиксированной длины $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon)$, то есть существует число $L = L(\varepsilon)$ такое, что на любом полуинтервале $[a, a+L)$ имеется полуинтервал $[\alpha, \alpha+\eta_0)$, все точки которого являются ε-почти периодами функции $f(\cdot)$.*

МАТЕМАТИКА 2013. Вып. 4

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\eta_0 = \delta\,(\varepsilon/2)$, где δ определяется из свойства равномерной непрерывности функции $f(\cdot)$. Выберем $L = \eta_0 + l\,(\varepsilon/2, f)$.

Рассмотрим произвольный полуинтервал $[a, a+L)$. Из определения почти периодичности следует, что существует $\varepsilon/2$-почти период τ функции $f(\cdot)$, принадлежащий полуинтервалу $\left[a + \frac{\eta_0}{2}, a + L - \frac{\eta_0}{2}\right)$ длины $L - \eta_0 = l\,(\varepsilon/2, f)$. Заметим, что $\left[\tau - \frac{\eta_0}{2}, \tau + \frac{\eta_0}{2}\right) \subset [a, a+L)$. Отсюда при любом $\xi \in \left[\tau - \frac{\eta_0}{2}, \tau + \frac{\eta_0}{2}\right)$, учитывая неравенство $|\xi - \tau| < \eta_0 = \delta(\varepsilon/2)$, получим

$$|f(x+\xi) - f(x)| \leqslant |f(x+\xi) - f(x+\tau)| + |f(x+\tau) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, полуинтервал $[\alpha, \alpha + \eta_0)$, где $\alpha = \tau - \frac{\eta_0}{2}$, целиком состоит из ε-почти периодов функции $f(\cdot)$. Следствие доказано. □

Следствие 3. *Пусть $f(\cdot)$ — почти периодическая функция. Тогда для для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon)$, что при всяком $0 < \eta \leqslant \eta_0$ существует относительно плотное множество ε-почти периодов функции $f(\cdot)$, являющихся целыми кратными числа η.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного $\varepsilon > 0$, пользуясь следствием 2, найдем соответствующее число η_0. Пусть $L > 0$ таково, что всякий полуинтервал $[a, a+L)$ содержит полуинтервал $[\alpha, \alpha+\eta_0)$, состоящий из ε-почти периодов функции $f(\cdot)$. Возьмем любое $\eta \in (0, \eta_0]$. Так как длина полуинтервала $[\alpha, \alpha + \eta_0)$ не меньше η, то в нем содержится целое кратное числа η. Следствие доказано. □

В монографии Б. П. Демидовича [2] сформулировано и доказано следующее утверждение.

Лемма 1 (см. [2, с. 371–372]). *Для двух почти периодических функций при любом $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество их общих ε-почти периодов.*

Покажем, что в [2] эта лемма доказана неточно. С этой целью рассмотрим функции

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \sin\left(\sqrt{2}x\right).$$

Функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ периодические с периодами $T_1 = 2\pi$ и $T_2 = \sqrt{2}\pi$ соответственно. Тогда (см. пример 1) эти функции являются почти периодическими, и поэтому для них доказательство леммы, приведенное в [2], должно быть корректным. Проверим, что это не так.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\delta_1 = \delta_f(\varepsilon/2)$, $\delta_2 = \delta_g(\varepsilon/2)$ — числа, характеризующие равномерную непрерывность функций $f(\cdot)$, $g(\cdot)$. Найдем их.

Для произвольных $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ имеем неравенства

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = 2\left|\sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\right| \left|\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\right| \leqslant |x_1 - x_2|,$$

поэтому неравенство $|x_1 - x_2| < \delta$ влечет за собой неравенство $|\sin x_1 - \sin x_2| < \varepsilon$ в случае $\delta \leqslant \varepsilon$. Следовательно, можно выбрать $\delta_f(\varepsilon) = \varepsilon$, и $\delta_1 = \varepsilon/2$.

Аналогично,

$$\left|\sin\left(\sqrt{2}x_1\right) - \sin\left(\sqrt{2}x_2\right)\right| \leqslant \sqrt{2}|x_1 - x_2|,$$

поэтому можно выбрать $\delta_g(\varepsilon) = \sqrt{2}\varepsilon/2$, и $\delta_2 = \sqrt{2}\varepsilon/4$.

Положим $\eta = \min\{\delta_1, \delta_2\} = \sqrt{2}\varepsilon/4$. В силу следствий 2 и 3 существуют числа

$$L_1 = \delta_1 + l(\varepsilon/2, f) = \delta_1 + T_1 = \varepsilon/2 + 2\pi, \quad L_2 = \delta_2 + l(\varepsilon/2, g) = \delta_2 + T_2 = \sqrt{2}\varepsilon/4 + \sqrt{2}\pi$$

такие, что каждый из полуинтервалов $[a, a+L_1)$ и $[a, a+L_2)$ содержит соответствующие $\varepsilon/2$-почти периоды функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$, кратные числу η. Возьмем $L = \max\{L_1, L_2\} = \varepsilon/2 + 2\pi$. Тогда на каждом полуинтервале $[a, a+L)$ найдется пара $\varepsilon/2$-почти периодов $\tau_f(a) = n'\eta$

и $\tau_g(a) = n''\eta$, где n', n'' — целые числа. Заметим, что $|\tau_f(a) - \tau_g(a)| \leqslant L$. Найдем эти почти периоды.

1) Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. На произвольном полуинтервале $[a, a+L)$ числовой прямой содержится период $T_f(a) = 2k\pi$ этой функции. Справедливы неравенства

$$a \leqslant 2k\pi < a + 2\pi + \varepsilon/2,$$

поэтому

$$\frac{a}{2\pi} \leqslant k < \frac{a}{2\pi} + 1 + \frac{\varepsilon}{4\pi}.$$

Следовательно, можно выбрать $k = \big[a/(2\pi)\big] + 1$. Заметим, что $T_f(a) \in [a + \eta/2, a + L - \eta/2)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Всякая точка полуинтервала $\big[T_f(a) - \eta/2, T_f(a) + \eta/2\big)$ является $\varepsilon/2$-почти периодом функции $f(\cdot)$ (следствие 1), а при достаточно малом $\varepsilon > 0$ этот полуинтервал содержится в $[a, a+L)$. Тогда найдется $n' \in \mathbb{Z}$ такое, что $n'\eta \in \big[T_f(a) - \eta/2, T_f(a) + \eta/2\big) \subset [a, a+L)$, причем $n'\eta$ — $\varepsilon/2$-почти период функции $f(\cdot)$. Итак,

$$T_f(a) - \eta/2 \leqslant n'\eta < T_f(a) + \eta/2,$$
$$T_f(a)/\eta - 1/2 \leqslant n' < T_f(a)/\eta + 1/2,$$

тогда можно выбрать

$$n' = \left[\frac{T_f(a)}{\eta} - \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{4\sqrt{2}\pi k}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{4\sqrt{2}\pi\Big(\big[a/(2\pi)\big] + 1\Big)}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right].$$

2) Аналогично рассматривая функцию $g(x) = \sin\big(\sqrt{2}x\big)$, получим

$$n'' = \left[\frac{4\pi\Big(\big[\sqrt{2}a/(2\pi)\big] + 1\Big)}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right].$$

Так как $\tau_f(a) - \tau_g(a) = (n' - n'')\eta = n\eta$, где n — целое число, причем $|n\eta| \leqslant L$, то n может принимать лишь конечное число значений; пусть это будут величины $n_1\eta, n_2\eta, \ldots, n_p\eta$, и пусть «представителями» их являются пары $\varepsilon/2$-почти периодов

$$\Big(\tau_f^{(1)}(a), \tau_g^{(1)}(a)\Big), \Big(\tau_f^{(2)}(a), \tau_g^{(2)}(a)\Big), \ldots, \Big(\tau_f^{(p)}(a), \tau_g^{(p)}(a)\Big),$$

то есть $\tau_f^{(s)}(a) - \tau_g^{(s)}(a) = n_s\eta$, $s = 1, \ldots, p$.

Положим $\max\limits_{s=1,\ldots,p} |\tau_f^{(s)}(a)| = T$. Покажем, что каждый полуинтервал длины $\widetilde{L} = L + 2T$ содержит по меньшей мере один общий ε-почти период τ функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$.

Действительно, пусть $[a, a + L + 2T)$ есть произвольный полуинтервал длины $\widetilde{L}$. Возьмем на полуинтервале $[a + T, a + L + T)$ длины L два $\varepsilon/2$-почти периода $\tau_f(a) = n'\eta$ и $\tau_g(a) = n''\eta$, и пусть

$$\tau_f(a) - \tau_g(a) = n_s\eta = \tau_f^{(s)}(a) - \tau_g^{(s)}(a).$$

Выберем

$$\tau = \tau_f(a) - \tau_f^{(s)}(a) = \tau_g(a) - \tau_g^{(s)}(a).$$

Так как $\tau_f(a) \in [a + T, a + L + T]$ и $|\tau_f^{(s)}(a)| \leqslant T$, то $\tau \in [a, a + L + 2T]$. Число τ является общим ε-почти периодом функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$, и оно содержится на полуинтервале $[a, a + \widetilde{L})$.

Но величина T зависит от выбора a и при стремлении a к $+\infty$ стремится к $+\infty$. Следовательно, относительная плотность множества общих ε-почти периодов функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ в [2] не установлена.

Приведем правильное доказательство леммы 1. Изложение в основном соответствует рассуждениям А. С. Безиковича [3]. Предварительно введем одно определение и докажем два утверждения.

Определение 4. Пусть $\varepsilon > 0$, $M \subset \mathbb{R}$ — произвольное множество. *ε-окрестностью M* называется множество $O_\varepsilon(M) \doteq \big\{x = x_1 + x_2 |\, x_1 \in M,\ x_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)\big\}$.

Утверждение 1. *Пусть $f(\cdot)$ — почти периодическая функция. Тогда для любых положительных $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ найдется такое $\delta > 0$, что $O_\delta\big(E\{\varepsilon_1, f\}\big) \subset E\{\varepsilon_2, f\}$.*

Доказательство. Возьмем любые $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Пользуясь свойством равномерной непрерывности функции $f(\cdot)$, найдем число $\delta = \delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$. Пусть $z \in O_\delta\big(E\{\varepsilon_1, f\}\big)$. Тогда $z = \tau_1 + \tau_2$, где $\tau_1 \in E\{\varepsilon_1, f\}$, $\tau_2 \in (-\delta, \delta)$. В силу следствия 1 интервал $(-\delta, \delta)$ содержится во множестве $E\{\varepsilon_2 - \varepsilon_1, f\}$, поэтому $\tau_2 \in E\{\varepsilon_2 - \varepsilon_1, f\}$. Пользуясь свойством 3 почти периодов, получаем

$$z = \tau_1 + \tau_2 \in E\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1, f\} = E\{\varepsilon_2, f\}.$$

Утверждение доказано. $\square$

Утверждение 2. *Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ — произвольны, $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ — почти периодические функции. Тогда множество $E\{\varepsilon, f_1\} \cap O_\delta\big(E\{\varepsilon, f_2\}\big)$ относительно плотно на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Возьмем любые $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и рассмотрим множества $E\{\varepsilon/2, f_1\}$ и $E\{\varepsilon/2, f_2\}$. Пусть число $l > 0$ удовлетворяет условиям $l \geqslant l(\varepsilon/2, f_1)$, $l \geqslant l(\varepsilon/2, f_2)$ и $l = k\delta$, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда каждый полуинтервал $[a, a+l)$ числовой прямой содержит $\varepsilon/2$-почти периоды функций $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$. Разобьем всю числовую прямую на полуинтервалы $I_n \doteq [(n-1)l, nl)$, где $n \in \mathbb{Z}$. Каждый такой полуинтервал содержит числа $\tau_k^{(n)} \in E\{\varepsilon/2, f_k\}$, $k = 1, 2$. Отметим, что

$$-l < \tau_1^{(n)} - \tau_2^{(n)} < l.$$

Обозначим $J_i \doteq \big[(i-1)\delta, i\delta\big)$, $i = -k+1, -k+2, \ldots, k$. Тогда

$$\tau_1^{(n)} - \tau_2^{(n)} \in (-l, l) \subset [-l, l) = \bigcup_{i=-k+1}^{k} J_i.$$

Следовательно, для каждого $n \in \mathbb{Z}$ найдется $i_n \in \{-k+1, \ldots, k\}$ такое, что $\tau_1^{(n)} - \tau_2^{(n)} \in J_{i_n}$. Покажем, что существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ найдется $n' \in \mathbb{Z}$, $-n_0 \leqslant n' \leqslant n_0$, для которого $i_{n'} = i_n$. Этот фрагмент доказательства отсутствует в [3].

Действительно, пусть

$$N_j \doteq \{n \in \mathbb{Z} |\, i_n = j\}, \quad j = -k+1, -k+2, \ldots, k.$$

Положим

$$\alpha_j = \begin{cases} 0, & \text{если } N_j = \varnothing, \\ \min\{|n| : n \in N_j\}, & \text{если } N_j \neq \varnothing, \end{cases}$$

и пусть $n_0 \doteq \max\{\alpha_j |\, j = -k+1, -k+2, \ldots, k\}$.

Если множество N_j пусто, то ни при каком $n \in \mathbb{Z}$ разность $\tau_1^{(n)} - \tau_2^{(n)}$ не принадлежит полуинтервалу J_j.

Если же N_j непусто, то существует $n' \in \mathbb{Z}$, $-n_0 \leqslant n' \leqslant n_0$, такое, что $n' \in N_j$.

Итак, выбранное n_0 обладает следующим свойством: для каждого $n \in \mathbb{Z}$ найдется $n' \in \mathbb{Z}$, $-n_0 \leqslant n' \leqslant n_0$, такое, что разности $\tau_1^{(n)} - \tau_2^{(n)}$ и $\tau_1^{(n')} - \tau_2^{(n')}$ лежат в одном и том же полуинтервале J_i длины δ. Но тогда существует $\vartheta \in (-1, 1)$ такое, что $\tau_1^{(n)} - \tau_2^{(n)} = \tau_1^{(n')} - \tau_2^{(n')} + \vartheta\delta$. Следовательно,

$$\tau_1^{(n)} - \tau_1^{(n')} = \tau_2^{(n)} - \tau_2^{(n')} + \vartheta\delta.$$

Так как $\tau_j^{(n)}, \tau_j^{(n')} \in E\{\varepsilon/2, f_j\}$, то по свойству 3 почти периодов получаем, что

$$\tau_j^{(n)} - \tau_j^{(n')} \in E\{\varepsilon, f_j\}, \quad j = 1, 2.$$

Далее, $|\vartheta\delta| < \delta$, поэтому
$$\tau_2^{(n)} - \tau_2^{(n')} + \vartheta\delta \in O_\delta\big(E\{\varepsilon, f_2\}\big).$$
Следовательно, величина $T_n \doteq \tau_1^{(n)} - \tau_1^{(n')}$ принадлежит множеству $E\{\varepsilon, f_1\} \cap O_\delta\big(E\{\varepsilon, f_2\}\big)$ при каждом $n \in \mathbb{Z}$.

Покажем, что множество $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ относительно плотно на $\mathbb{R}$. Этот фрагмент доказательства отсутствует в [3]. Действительно,
1) $\tau_1^{(n)} \in I_n$, $\tau_1^{(n+1)} \in I_{n+1}$, поэтому $0 < \tau_1^{(n+1)} - \tau_1^{(n)} \leqslant 2l$;
2) $\tau_1^{(n')} \in I_{n'}$, поэтому $|\tau_1^{(n')}| \leqslant |n'|l \leqslant n_0 l$;
3) $\tau_1^{((n+1)')} \in I_{(n+1)'}$, поэтому $|\tau_1^{((n+1)')}| \leqslant |(n+1)'|l \leqslant n_0 l$.

Следовательно, для каждого $n \in \mathbb{Z}$
$$|T_{n+1} - T_n| = |\tau_1^{(n+1)} - \tau_1^{((n+1)')} - \tau_1^{(n)} + \tau_1^{(n')}| \leqslant$$
$$\leqslant |\tau_1^{(n+1)} - \tau_1^{(n)}| + |\tau_1^{(n')}| + |\tau_1^{((n+1)')}| \leqslant 2l + 2n_0 l.$$

Итак, множество $E\{\varepsilon, f_1\} \cap O_\delta\big(E\{\varepsilon, f_2\}\big)$ содержит в себе относительно плотное множество $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и поэтому само является относительно плотным. Утверждение доказано. □

Теорема 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ и для любых двух почти периодических функций $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ множество $E\{\varepsilon, f_1\} \cap E\{\varepsilon, f_2\}$ относительно плотно на $\mathbb{R}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. В силу утверждения 1 существует $\delta > 0$ такое, что $O_\delta\big(E\{\varepsilon_1, f_1\}\big) \subset E\{\varepsilon, f_1\}$. Обозначим $G = E\{\varepsilon_1, f_2\} \cap O_\delta\big(E\{\varepsilon_1, f_1\}\big)$. Тогда
$$G \subset E\{\varepsilon_1, f_2\} \cap E\{\varepsilon, f_1\} \subset E\{\varepsilon, f_2\} \cap E\{\varepsilon, f_1\}.$$
По утверждению 2 множество G относительно плотно на $\mathbb{R}$. Следовательно, и $E\{\varepsilon, f_2\} \cap E\{\varepsilon, f_1\}$ относительно плотно. Теорема доказана. □

Замечание 1. Лемма 1 является непосредственным следствием теоремы 2.

Следствие 4. *Множество равномерных почти периодических функций замкнуто относительно операции сложения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ — почти периодические функции. Для каждого $\varepsilon > 0$ и любого $\tau \in E\{\varepsilon/2, f\} \cap E\{\varepsilon/2, g\}$ при всех $x \in \mathbb{R}$ имеем неравенства
$$\Big|\big(f(x+\tau) + g(x+\tau)\big) - \big(f(x) + g(x)\big)\Big| \leqslant \big|f(x+\tau) - f(x)\big| + \big|g(x+\tau) - g(x)\big| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$
и поэтому $E\{\varepsilon, f+g\}$ содержит в себе относительно плотное множество $E\{\varepsilon/2, f\} \cap E\{\varepsilon/2, g\}$. Следствие доказано. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953. 396 с.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
3. Besicovitch A.S. Almost periodic functions. Cambridge: Dover, 1954. 180 c.

Поступила в редакцию 28.10.2013

МАТЕМАТИКА 2013. Вып. 4

Банщикова Ирина Николаевна, студентка, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: banshhikova.irina@mail.ru

Попова Светлана Николаевна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: ps@uni.udm.ru

I. N. Banshchikova, S. N. Popova

On the property of the closedness of the set of almost periodic functions

Keywords: almost periodic functions, closedness.

Mathematical Subject Classifications: 42A75

We study the property of the closedness of the set of uniformly almost periodic functions with respect to the operation of addition. It is shown that the proof of this property found in the monograph by B. P. Demidovich “Lectures on the mathematical theory of stability” is not quite correct. A valid proof is given.

REFERENCES

1. Levitan B.M. *Pochti-periodicheskie funktsii* (Almost periodic functions), Moscow: Gostekhizdat, 1953, 396 p.
2. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical stability theory), Moscow: Nauka, 1967, 472 p.
3. Besicovitch A.S. *Almost periodic functions*, Cambridge: Dover, 1954, 180 p.

Received 28.10.2013

Banshchikova Irina Nikolaevna, Student, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: banshhikova.irina@mail.ru

Popova Svetlana Nikolaevna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: ps@uni.udm.ru