УДК 519.175 + 519.115.5

© ***Х. Ш. Аль Джабри, В. И. Родионов***

ГРАФ ЧАСТИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

Любое бинарное отношение $\sigma \subseteq X^2$ (где X — произвольное множество) порождает на множестве X^2 характеристическую функцию: если $(x,y) \in \sigma$, то $\sigma(x,y) = 1$, а иначе $\sigma(x,y) = 0$. В терминах характеристических функций на множестве всех бинарных отношений множества X вводится понятие бинарного рефлексивного отношения смежности и определяется алгебраическая система, состоящая из всех бинарных отношений множества и из всех неупорядоченных пар различных смежных бинарных отношений. Если X — конечное множество, то эта алгебраическая система — граф («граф графов»).

Показано, что если σ и τ — смежные отношения, то σ является частичным порядком тогда и только тогда, когда τ является частичным порядком. Исследованы некоторые особенности строения графа $G(X)$ частичных порядков. В частности, если X состоит из n элементов, а $T_0(n)$ — это число помеченных T_0-топологий, определенных на множестве X, то количество вершин в графе $G(X)$ равно $T_0(n)$, а количество компонент связности равно $T_0(n-1)$.

Для всякого отношения частичного порядка σ определяется понятие его опорного множества $S(\sigma)$, являющегося некоторым подмножеством множества X. Если X — конечное множество, а частичные порядки σ и τ принадлежат одной и той же компоненте связности графа $G(X)$, то равенство $S(\sigma) = S(\tau)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\sigma = \tau$. Показано, что в каждой компоненте связности графа $G(X)$ совокупность опорных множеств ее элементов является специфическим частично упорядоченным множеством относительно естественного отношения включения множеств.

Ключевые слова: бинарное отношение, граф, частичный порядок, конечная топология.

1. Смежность бинарных отношений. Пусть $B = \{0,1\}$ — булево множество, X — произвольное множество, а $X^2 \doteq X \times X$. Всякое подмножество $\sigma \subseteq X^2$, называемое *бинарным отношением* (или просто *отношением*) на множестве X, порождает характеристическую функцию

$$\chi_\sigma\colon\ X^2 \to B, \qquad \chi_\sigma(x,y) \doteq \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (x,y) \in \sigma, \\ 0, & \text{если} \quad (x,y) \notin \sigma. \end{cases}$$

Далее функцию $\chi_\sigma(x,y)$ будем обозначать через $\sigma(x,y)$. На множестве 2^{X^2} всех бинарных отношений множества X введем бинарное рефлексивное отношение смежности.

Определение 1. Пусть $X = Y \cup Z$ — дизъюнктное объединение двух подмножеств (допускается, что $Y = \varnothing$ или $Z = \varnothing$). Предположим, что отношение $\sigma \subseteq X^2$ таково, что $\sigma(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in Y \times Z$. Оно порождает отношение $\tau \subseteq X^2$ такое, что

$$\tau(x,y) = 1 - \sigma(y,x) \ \text{ для всех } \ (x,y) \in Y \times Z,$$
$$\tau(x,y) = 0 \ \text{ для всех } \ (x,y) \in Z \times Y,$$
$$\tau(x,y) = \sigma(x,y) \ \text{ для всех } \ (x,y) \in Y^2 \cup Z^2.$$

Отношение τ называется *смежным* с отношением σ.

Замечание 1. Из определения следует, что если отношение τ смежно с отношением σ, то и σ смежно с τ, и этот факт мы записываем в виде диаграммы $\sigma \xleftrightarrow{Y\times Z} \tau$, или

$$\begin{array}{|c|c|c|} & Y & Z \\ \hline Y & & 0 \\ \hline Z & \sigma(x,y) & \\ \hline \end{array} = \sigma \xleftrightarrow{Y\times Z} \tau = \begin{array}{|c|c|c|} & Y & Z \\ \hline Y & & 1-\sigma(y,x) \\ \hline Z & 0 & \\ \hline \end{array}.$$

Здесь и далее в диаграммах мы отмечаем значения характеристических функций в тех точках, которые априори известны (например, в блоке $Y \times Z$ для отношения σ пишем «обобщенный» 0, и это означает, что $\sigma(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in Y \times Z$, а в таком же блоке для отношения τ пишем $1 - \sigma(y,x)$, и это означает, что $\tau(x,y) = 1 - \sigma(y,x)$ для всех $(x,y) \in Y \times Z$).

2. Смежность частичных порядков. Через $V(X)$ обозначим совокупность всех частичных порядков, определенных на множестве X. Другими словами, отношение σ принадлежит множеству $V(X)$, если оно удовлетворяет следующим аксиомам: 1) $(x,x)\in\sigma$ (рефлексивность); 2) если $(x,y)\in\sigma$, $(y,z)\in\sigma$, то $(x,z)\in\sigma$ (транзитивность); 3) если $(x,y)\in\sigma$, $(y,x)\in\sigma$, то $x=y$ (антисимметричность). В терминах характеристических функций справедливо легко проверяемое утверждение: $\sigma\in V(X)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered}
\sigma(x,x)=1 \ \text{ для всех } x\in X,\\
\sigma(x,y)\,\sigma(y,z)\leqslant\sigma(x,z) \ \text{ для всех } x,y,z\in X,\\
\sigma(x,y)\,\sigma(y,x)=\delta_{xy} \ \text{ для всех } x,y\in X \ \text{ (где } \delta_{xy} \text{ — символ Кронекера).}
\end{gathered} \tag{1}$$

Предложение 1. *Пусть σ и τ — смежные отношения, то есть $\sigma\xleftrightarrow{Y\times Z}\tau$. Включение $\sigma\in V(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\tau\in V(X)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу симметрии утверждения достаточно показать импликацию $\sigma\in V(X)\Longrightarrow\tau\in V(X)$. Пусть $\sigma\in V(X)$. Так как $\tau(x,x)=\sigma(x,x)=1$, то рефлексивность отношения τ тривиальна. Очевидно также, что $\tau(x,y)\,\tau(y,x)=\sigma(x,y)\,\sigma(y,x)$ для любых $x,y\in X$, что доказывает антисимметричность отношения τ.

Транзитивность. Пусть $x,y,z\in X$ таковы, что $\tau(x,y)=\tau(y,z)=1$, и предположим сначала, что $y\in Y$. Поскольку $\tau(\xi,y)=0$ для всех $\xi\in Z$, то $x\in Y$. Если $z\in Y$, то $\sigma(x,y)=\tau(x,y)=1$ и $\sigma(y,z)=\tau(y,z)=1$, а так как $\sigma\in V(X)$, то $\sigma(x,z)=1$, поэтому $\tau(x,z)=1$. Если же $z\in Z$, то $\sigma(x,y)=\tau(x,y)=1$ и $\sigma(z,y)=1-\tau(y,z)=0$, а поскольку $\sigma\in V(X)$, то в силу (1) справедливо $\sigma(z,x)=\sigma(z,x)\,\sigma(x,y)\leqslant\sigma(z,y)=0$, значит, $\sigma(z,x)=0$, поэтому $\tau(x,z)=1$.

Полагаем теперь, что $y\in Z$. Поскольку $\tau(y,\eta)=0$ для всех $\eta\in Y$, то $z\in Z$. Если $x\in Z$, то $\sigma(x,y)=\tau(x,y)=1$ и $\sigma(y,z)=\tau(y,z)=1$, а так как $\sigma\in V(X)$, то $\sigma(x,z)=1$, поэтому $\tau(x,z)=1$. Если же $x\in Y$, то $\sigma(y,z)=\tau(y,z)=1$ и $\sigma(y,x)=1-\tau(x,y)=0$, а поскольку $\sigma\in V(X)$, то в силу (1) справедливо $\sigma(z,x)=\sigma(y,z)\,\sigma(z,x)\leqslant\sigma(y,x)=0$, значит, $\sigma(z,x)=0$, поэтому $\tau(x,z)=1$. Итак, во всех случаях имеет место равенство $\tau(x,z)=1$. $\square$

Таким образом, множество X порождает пару $\langle V(X),E(X)\rangle$, где $V(X)$ — это множество «вершин», состоящее из всех частичных порядков множества X, а $E(X)$ — множество «ребер», состоящее из неупорядоченных пар различных смежных частичных порядков множества X. Пару $G(X)\doteq\langle V(X),E(X)\rangle$ будем называть (неориентированным) «графом» частичных порядков множества X. Слова «вершина», «ребро», «граф» мы заключили в кавычки, так как в традиционном понимании графа мощности его множеств вершин и ребер конечны. Далее мы будем опускать кавычки в этих словах.

Определение 2. Будем говорить, что частичные порядки σ и τ принадлежат одной *компоненте связности* графа $G(X)$, если существует конечная последовательность частичных порядков $\sigma=\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m=\tau$, в которой отношения σ_{k-1} и σ_k смежны при всех $k=2,\ldots,m$. Через $G_\sigma(X)$ будем обозначать ту компоненту связности графа $G(X)$, которая содержит данный частичный порядок σ.

3. Об особенностях строения графа частичных порядков. Зафиксируем частичный порядок $\sigma\in V(X)$ и элемент $x\in X$. Для σ имеет место представление

$$\sigma=\begin{array}{c|c|c|c|l}
 & I_x & K_x & J_x & \\ \hline
I_x & & \vdots\;0\;\vdots & & \\ \hline
K_x & \cdots 1\cdots & \cdots 0\cdots 1\cdots 0\cdots & \cdots 0\cdots & \leftarrow x, \\ \hline
J_x & & \vdots\;1\;\vdots & & \\ \hline
 & & \uparrow x & &
\end{array}$$

$I_x\doteq I_x(\sigma)\doteq\{\,y\in X\colon\ \sigma(x,y)=1,\ \sigma(y,x)=0\,\}$,

$K_x\doteq K_x(\sigma)\doteq\{\,y\in X\colon\ \sigma(x,y)=\sigma(y,x)=\delta_{xy}\,\}$,

$J_x\doteq J_x(\sigma)\doteq\{\,y\in X\colon\ \sigma(x,y)=0,\ \sigma(y,x)=1\,\}$.

Очевидно, $x\in K_x$.

Лемма 1. *Справедливы следующие равенства:* 1) $\sigma(y,z)=1$ *для всех* $(y,z)\in J_x\times I_x$; 2) $\sigma(y,z)=0$ *для всех* $(y,z)\in I_x\times(K_x\cup J_x)$; 3) $\sigma(y,z)=0$ *для всех* $(y,z)\in(I_x\cup K_x)\times J_x$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Поскольку $y\in J_x$, то $\sigma(y,x)=1$, а так как $z\in I_x$, то $\sigma(x,z)=1$, поэтому $\sigma(y,z)=1$. В частности, для всех $(y,z)\in I_x\times J_x$ имеет место равенство $\sigma(z,y)=0$.

2. Пусть $(y,z)\in I_x\times K_x$. Если $z=x$, то $\sigma(y,z)=\sigma(y,x)=0$ (так как $y\in I_x$). Если же $z\neq x$, то $\sigma(x,z)=0$ (так как $z\in K_x$). Поскольку $y\in I_x$, то $\sigma(x,y)=1$; следовательно, в силу (1) имеем $\sigma(y,z)=\sigma(x,y)\,\sigma(y,z)\leqslant\sigma(x,z)=0$, поэтому $\sigma(y,z)=0$ для всех $(y,z)\in I_x\times K_x$.

3. Пусть $(y,z)\in K_x\times J_x$. Если $y=x$, то $\sigma(y,z)=\sigma(x,z)=0$ (так как $z\in J_x$). Если же $y\neq x$, то $\sigma(y,x)=0$ (так как $y\in K_x$). Поскольку $z\in J_x$, то $\sigma(z,x)=1$; следовательно, в силу (1) имеем $\sigma(y,z)=\sigma(y,z)\,\sigma(z,x)\leqslant\sigma(y,x)=0$, поэтому $\sigma(y,z)=0$ для всех $(y,z)\in K_x\times J_x$. □

Таким образом, можно построить последовательность смежных частичных порядков

$$\sigma\ \xleftrightarrow{I_x\times(K_x\cup J_x)}\ \sigma'\ \xleftrightarrow{(I_x\cup K_x)\times J_x}\ \sigma^x, \tag{2}$$

которая приводит нас к частичному порядку $\sigma^x\in V(X)$, обладающему тем свойством, что $\sigma^x(x,y)=\sigma^x(y,x)=\delta_{xy}$ для всех $y\in X$ (другими словами, если мы интерпретируем частичный порядок как отношение $\leqslant$, то x является как максимальным, так и минимальным элементом частичного порядка σ^x). В силу леммы 1 для отношений σ, σ' и σ^x имеет место представление:

$$\sigma=\begin{array}{c|ccc} & I_x & K_x & J_x\\ \hline I_x & & 0 & 0\\ K_x & \dots1\dots & \begin{matrix}\vdots\\0\\ \dots0\dots1\dots0\dots\\0\\ \vdots\end{matrix} & 0\\ J_x & 1 & \vdots\,1\,\vdots & \end{array},\quad \sigma'=\begin{array}{c|ccc} & I_x & K_x & J_x\\ \hline I_x & & \vdots\,0\,\vdots & 0\\ K_x & 0 & \begin{matrix}\vdots\\0\\ \dots0\dots1\dots0\dots\\0\\ \vdots\end{matrix} & 0\\ J_x & 0 & \vdots\,1\,\vdots & \end{array},\quad \sigma^x=\begin{array}{c|ccc} & I_x & K_x & J_x\\ \hline I_x & & \vdots\,0\,\vdots & 1\\ K_x & 0 & \begin{matrix}\vdots\\0\\ \dots0\dots1\dots0\dots\\0\\ \vdots\end{matrix} & \dots0\dots\\ J_x & 0 & 0 & \end{array}.$$

Таким образом, для фиксированного частичного порядка $\sigma\in V(X)$ определено отображение $X\longrightarrow G_\sigma(X)$, сопоставляющее элементу $x\in X$ частичный порядок $\sigma^x\in G_\sigma(X)$ (может оказаться, что $\sigma^x=\sigma^y$ при $x\neq y$). Заметим также, что это отображение определено однозначно, — в алгоритме (2) используются однозначно определенные множества $I_x(\sigma)$, $K_x(\sigma)$, $J_x(\sigma)$.

Лемма 2. *Пусть частичные порядки* $\sigma,\tau\in V(X)$ *принадлежат одной и той же компоненте связности графа* $G(X)$. *Тогда* $\sigma^x=\tau^x$ *для любого* $x\in X$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что σ и τ — смежные частичные порядки, то есть существует дизъюнктное объединение $I\cup J=X$ такое, что $\sigma\xleftrightarrow{I\times J}\tau$.

Без ограничения общности можно также считать, что $x\in J$ (если $x\in I$, то в приводимых ниже выкладках отношения σ и τ меняем местами). Для σ имеет место представление

$$\sigma=\begin{array}{c|ccccc} & I_1 & I_2 & J_1 & J_2 & J_3\\ \hline I_1 & & & & 0 & \\ I_2 & & & & & \\ J_1 & & & & \vdots\,0\,\vdots & \\ J_2 & \dots0\dots & \dots1\dots & \dots1\dots & \begin{matrix}\vdots\\0\\ \dots0\dots1\dots0\dots\\0\\ \vdots\end{matrix} & \dots0\dots\\ J_3 & & & & \vdots\,1\,\vdots & \\ & & & & \uparrow x & \end{array}\ \leftarrow x,$$

$I_1\doteq\{\,y\in I\colon\ \sigma(x,y)=0\,\}$,

$I_2\doteq\{\,y\in I\colon\ \sigma(x,y)=1\,\}$,

$J_1\doteq\{\,y\in J\colon\ \sigma(x,y)=1,\ \sigma(y,x)=0\,\}$,

$J_2\doteq\{\,y\in J\colon\ \sigma(x,y)=\sigma(y,x)=\delta_{xy}\,\}$,

$J_3\doteq\{\,y\in J\colon\ \sigma(x,y)=0,\ \sigma(y,x)=1\,\}$.

Очевидно, $x\in J_2$.

1. Зафиксируем $(y,z)\in(I_2\cup J_1)\times I_1$, тогда $\sigma(x,y)=1$, а $\sigma(x,z)=0$. В силу (1) имеем $\sigma(y,z)=\sigma(x,y)\,\sigma(y,z)\leqslant\sigma(x,z)=0$. Значит, $\sigma(y,z)=0$ для всех $(y,z)\in(I_2\cup J_1)\times I_1$.

2. Пусть $(y,z)\in J_3\times(I_2\cup J_1)$, тогда $\sigma(y,x)=1$ и $\sigma(x,z)=1$; следовательно, $\sigma(y,z)=1$ для всех $(y,z)\in J_3\times(I_2\cup J_1)$.

3. В силу антисимметричности σ для всех $(y,z)\in J_1\times J_3$ справедливо равенство $\sigma(y,z)=0$.

4. Пусть $(y,z)\in J_1\times J_2$. Если $z=x$, то $\sigma(y,z)=\sigma(y,x)=0$ (так как $y\in J_1$). Если же $z\neq x$, то $\sigma(x,y)=1$ и $\sigma(x,z)=0$. В силу (1) имеем $\sigma(y,z)=\sigma(x,y)\,\sigma(y,z)\leqslant\sigma(x,z)=0$; следовательно, $\sigma(y,z)=0$ для всех $(y,z)\in J_1\times J_2$.

5. Пусть $(y,z)\in J_2\times J_3$. Если $y=x$, то $\sigma(y,z)=\sigma(x,z)=0$ (так как $z\in J_3$). Если же $y\neq x$, то $\sigma(y,x)=0$ и $\sigma(z,x)=1$. В силу (1) имеем $\sigma(y,z)=\sigma(y,z)\,\sigma(z,x)\leqslant\sigma(y,x)=0$; следовательно, $\sigma(y,z)=0$ для всех $(y,z)\in J_2\times J_3$.

Таким образом, для смежных частичных порядков σ и τ имеет место представление

$$\sigma=\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & I_1 & I_2 & J_1 & J_2 & J_3\\ \hline
I_1 & & \sigma(\xi,\eta) & 0 & 0 & 0\\ \hline
I_2 & 0 & & 0 & 0 & 0\\ \hline
J_1 & 0 & \sigma(\xi,\eta) & & 0 & 0\\ \hline
J_2 & \cdots 0\cdots & \cdots 1\cdots & \cdots 1\cdots & \begin{smallmatrix} & \vdots & \\ & 0 & \\ \cdots 0\cdots & 1 & \cdots 0\cdots\\ & 0 & \\ & \vdots & \end{smallmatrix} & 0\\ \hline
J_3 & \sigma(\xi,\eta) & 1 & 1 & \begin{smallmatrix}\vdots\\ 1\\ \vdots\end{smallmatrix} & \\ \hline
\end{array}\right.,\quad
\tau=\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & I_1 & I_2 & J_1 & J_2 & J_3\\ \hline
I_1 & & \sigma(\xi,\eta) & 1 & \begin{smallmatrix}\vdots\\ 1\\ \vdots\end{smallmatrix} & 1-\sigma(\eta,\xi)\\ \hline
I_2 & 0 & & 1-\sigma(\eta,\xi) & \begin{smallmatrix}\vdots\\ 0\\ \vdots\end{smallmatrix} & 0\\ \hline
J_1 & 0 & 0 & & 0 & 0\\ \hline
J_2 & 0 & 0 & \cdots 1\cdots & \begin{smallmatrix} & \vdots & \\ & 0 & \\ \cdots 0\cdots & 1 & \cdots 0\cdots\\ & 0 & \\ & \vdots & \end{smallmatrix} & 0\\ \hline
J_3 & 0 & 0 & 1 & \begin{smallmatrix}\vdots\\ 1\\ \vdots\end{smallmatrix} & \\ \hline
\end{array}\right..$$

Очевидно, $I_x(\sigma)=I_2\cup J_1,\ K_x(\sigma)=I_1\cup J_2,\ J_x(\sigma)=J_3,\ I_x(\tau)=J_1,\ K_x(\tau)=I_2\cup J_2$ и, наконец, $J_x(\tau)=I_1\cup J_3$, поэтому в соответствии с алгоритмом (2) справедливы диаграммы

$$\sigma\ \xleftrightarrow{(I_2\cup J_1)\times(I_1\cup J_2\cup J_3)}\ \sigma'\ \xleftrightarrow{(I\cup J_1\cup J_2)\times J_3}\ \sigma^x,\qquad \tau\ \xleftrightarrow{J_1\times(I\cup J_2\cup J_3)}\ \tau'\ \xleftrightarrow{(I_2\cup J_1\cup J_2)\times(I_1\cup J_3)}\ \tau^x.$$

$$\sigma'=\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & I_1 & I_2 & J_1 & J_2 & J_3\\ \hline
I_1 & & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline
I_2 & 1-\sigma(\eta,\xi) & & 0 & \begin{smallmatrix}\vdots\\ 0\\ \vdots\end{smallmatrix} & 0\\ \hline
J_1 & 1 & \sigma(\xi,\eta) & & \begin{smallmatrix}\vdots\\ 0\\ \vdots\end{smallmatrix} & 0\\ \hline
J_2 & \cdots 0\cdots & 0 & 0 & \begin{smallmatrix} & \vdots & \\ & 0 & \\ \cdots 0\cdots & 1 & \cdots 0\cdots\\ & 0 & \\ & \vdots & \end{smallmatrix} & 0\\ \hline
J_3 & \sigma(\xi,\eta) & 0 & 0 & \begin{smallmatrix}\vdots\\ 1\\ \vdots\end{smallmatrix} & \\ \hline
\end{array}\right.\quad
\sigma^x=\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & I_1 & I_2 & J_1 & J_2 & J_3\\ \hline
I_1 & & 0 & 0 & 0 & 1-\sigma(\eta,\xi)\\ \hline
I_2 & 1-\sigma(\eta,\xi) & & 0 & \begin{smallmatrix}\vdots\\ 0\\ \vdots\end{smallmatrix} & 1\\ \hline
J_1 & 1 & \sigma(\xi,\eta) & & \begin{smallmatrix}\vdots\\ 0\\ \vdots\end{smallmatrix} & 1\\ \hline
J_2 & \cdots 0\cdots & 0 & 0 & \begin{smallmatrix} & \vdots & \\ & 0 & \\ \cdots 0\cdots & 1 & \cdots 0\cdots\\ & 0 & \\ & \vdots & \end{smallmatrix} & \cdots 0\cdots\\ \hline
J_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline
\end{array}\right.$$

$$\tau'=\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & I_1 & I_2 & J_1 & J_2 & J_3\\ \hline
I_1 & & \sigma(\xi,\eta) & 0 & \begin{smallmatrix}\vdots\\ 1\\ \vdots\end{smallmatrix} & 1-\sigma(\eta,\xi)\\ \hline
I_2 & 0 & & 0 & \begin{smallmatrix}\vdots\\ 0\\ \vdots\end{smallmatrix} & 0\\ \hline
J_1 & 0 & \sigma(\xi,\eta) & & \begin{smallmatrix}\vdots\\ 0\\ \vdots\end{smallmatrix} & 0\\ \hline
J_2 & 0 & 0 & 0 & \begin{smallmatrix} & \vdots & \\ & 0 & \\ \cdots 0\cdots & 1 & \cdots 0\cdots\\ & 0 & \\ & \vdots & \end{smallmatrix} & 0\\ \hline
J_3 & 0 & 0 & 0 & \begin{smallmatrix}\vdots\\ 1\\ \vdots\end{smallmatrix} & \\ \hline
\end{array}\right.\quad
\tau^x=\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & I_1 & I_2 & J_1 & J_2 & J_3\\ \hline
I_1 & & 0 & 0 & 0 & 1-\sigma(\eta,\xi)\\ \hline
I_2 & 1-\sigma(\eta,\xi) & & 0 & \begin{smallmatrix}\vdots\\ 0\\ \vdots\end{smallmatrix} & 1\\ \hline
J_1 & 1 & \sigma(\xi,\eta) & & \begin{smallmatrix}\vdots\\ 0\\ \vdots\end{smallmatrix} & 1\\ \hline
J_2 & \cdots 0\cdots & 0 & 0 & \begin{smallmatrix} & \vdots & \\ & 0 & \\ \cdots 0\cdots & 1 & \cdots 0\cdots\\ & 0 & \\ & \vdots & \end{smallmatrix} & \cdots 0\cdots\\ \hline
J_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline
\end{array}\right.$$

Визуальное сравнение σ^x и τ^x показывает их равенство, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *В компоненте связности $G_\sigma(X)$ для любого $x \in X$ существует единственный частичный порядок τ такой, что $\tau(x,y) = \tau(y,x) = \delta_{xy}$ при всех $y \in X$, причем $\tau = \sigma^x$.*

Существование очевидно (достаточно положить $\tau \doteq \sigma^x$). *Единственность.* Если отношение $\pi \in G_\sigma(X)$ таково, что $\pi(x,y) = \pi(y,x) = \delta_{xy}$ при всех $y \in X$, то $K_x(\pi) = X$, $I_x(\pi) = J_x(\pi) = \varnothing$; следовательно, в силу алгоритма (2) и леммы 2 справедливы равенства $\pi = \pi' = \pi^x = \sigma^x = \tau$.

Замечание 2. Зафиксируем $x \in X$. В силу следствия 1 в каждой компоненте $G_\sigma(X)$ существует единственный частичный порядок σ^x такой, что $\sigma^x(x,y) = \sigma^x(y,x) = \delta_{xy}$ при всех $y \in X$, поэтому компоненте $G_\sigma(X)$ можно взаимно-однозначно сопоставить частичный порядок τ, определенный на множестве $X \setminus \{x\}$, такой, что $\tau(y,z) = \sigma^x(y,z)$ для всех $y,z \in X \setminus \{x\}$.

Если $\operatorname{card} X < \infty$ (можно считать, что $X = \{1,\ldots,n\}$ — отрезок натурального ряда), то существует взаимно-однозначное соответствие между множеством $V(X)$ и множеством всех помеченных транзитивных графов, определенных на X (см., например, [1, с. 28]); в свою очередь, существует взаимно-однозначное соответствие между этим множеством и множеством всех помеченных T_0-топологий, определенных на X (см., например, [2, с. 256]). Обозначим через $T_0(n)$ число таких топологий. Следовательно, в силу замечания 2 справедлива

Теорема 1. *Если $n \geqslant 2$ и $X = \{1,\ldots,n\}$, то $\operatorname{card} V(X) = T_0(n)$, а количество компонент связности графа $G(X)$ равно $T_0(n-1)$.*

4. Опорные множества частичных порядков. Совокупность

$$S(\sigma) \doteq \{\, y \in X\colon\ \sigma(x,y) = \delta_{xy} \text{ для всех } x \in X \,\}$$

называется *опорным множеством* (или *опорой*) частичного порядка $\sigma \in V(X)$. Если $S(\sigma) = X$, то σ называется *тривиальным* (или *дискретным*) частичным порядком.

Предложение 2. *Если $\operatorname{card} X < \infty$, то $S(\sigma) \neq \varnothing$ для любого $\sigma \in V(X)$.*

Доказательство проведем индукцией по n, где $n \doteq \operatorname{card} X$. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n \geqslant 2$, и предположим, что утверждение имеет место для всех подмножеств множества X мощности $n-1$. Другими словами, для любых $x \in X$ и $\tau \in V(X \setminus \{x\})$ справедливо неравенство $S(\tau) \neq \varnothing$.

Зафиксируем произвольное $x \in X$, и пусть $Y \doteq X \setminus \{x\}$. Пусть, далее, $\sigma \in V(X)$, а $\tau \doteq \sigma|_Y$ — сужение частичного порядка σ на множество Y. Очевидно, $\tau \in V(Y)$, поэтому $S(\tau) \neq \varnothing$.

Предположим сначала, что $\sigma(x,y) = 0$ для некоторого $y \in S(\tau)$. Поскольку для всех $\xi \in Y$ справедливы равенства $\sigma(\xi,y) = \tau(\xi,y) = \delta_{\xi y}$, то $\sigma(\xi,y) = \delta_{\xi y}$ для всех $\xi \in X$, значит, $y \in S(\sigma)$.

Пусть теперь $\sigma(x,y) = 1$ для всех $y \in S(\tau)$. Тогда $\sigma(\xi,x) = 0$ для всех $\xi \in S(\tau)$. Если окажется, что $S(\tau) = Y$, то $\sigma(\xi,x) = \delta_{\xi x}$ для всех $\xi \in X$, поэтому $x \in S(\sigma)$.

Пусть $S(\tau) \neq Y$, тогда $[\,Y \setminus S(\tau)\,] \times S(\tau) \neq \varnothing$ и $\sigma(\xi,y) = 0$ для всех $(\xi,y) \in [\,Y \setminus S(\tau)\,] \times S(\tau)$. В силу (1) для любого $\xi \in Y \setminus S(\tau)$ справедливо $\sigma(\xi,x) = \sigma(\xi,x)\,\sigma(x,y) \leqslant \sigma(\xi,y) = 0$; следовательно, $\sigma(\xi,x) = \delta_{\xi x}$ для всех $\xi \in X$, поэтому $x \in S(\sigma)$. Итак, во всех случаях $S(\sigma) \neq \varnothing$.

Лемма 3. *Пусть $\operatorname{card} X < \infty$. Для любого нетривиального частичного порядка $\sigma \in V(X)$ и для любого $y \in X \setminus S(\sigma)$ существует $x \in S(\sigma)$ такое, что $\sigma(x,y) = 1$.*

Доказательство. Пусть $Y \doteq S(\sigma)$, $Z \doteq X \setminus Y$. Так как σ — нетривиальный частичный порядок, то множество Z непусто и характеризуется тем, что для любого $y \in Z$ существует $x \neq y$ такое, что $\sigma(x,y) = 1$. Следовательно, для σ имеет место представление

$$\sigma = \left|\begin{array}{c|c|c|c|} & Y & I & J \\ \hline Y & \begin{smallmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{smallmatrix} & 0 & \\ \hline I & 0 & & \\ \hline J & 0 & * & \\ \hline \end{array}\right., \qquad \begin{aligned} I &\doteq \{\, \eta \in Z\colon\ \sigma(\xi,\eta) = 0 \text{ для всех } \xi \in Y \,\}, \\ J &\doteq Z \setminus I = \{\, \eta \in Z\colon\ \sigma(\xi,\eta) = 1 \text{ для некоторого } \xi \in Y \,\}. \end{aligned}$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что $I=\varnothing$. Предположим противное ($I\neq\varnothing$).

1. Если $J=\varnothing$, то $\sigma(x,y)=0$ для любых $(x,y)\in Y\times I=(Y\cup J)\times I$.

2. Если $J\neq\varnothing$, то $J\times I\neq\varnothing$. Зафиксируем $(x,y)\in J\times I$. Так как $x\in J$, то существует $z\in Y$ такое, что $\sigma(z,x)=1$; следовательно, $\sigma(x,y)=\sigma(z,x)\,\sigma(x,y)\leqslant\sigma(z,y)$. Поскольку $(z,y)\in Y\times I$, то $\sigma(z,y)=0$, поэтому $\sigma(x,y)=0$ (другими словами, в блоке $*$ все элементы равны нулю).

Таким образом, в обоих случаях $\sigma(x,y)=0$ для любых $(x,y)\in(Y\cup J)\times I$. Значит, для любого $y\in I$ существует $x\in I$ такое, что $x\neq y$ и $\sigma(x,y)=1$, что противоречит предложению 2 (действительно, в блоке I^2 расположен частичный порядок $\tau\doteq\sigma\big|_I$, являющийся сужением частичного порядка σ на множество I, поэтому в силу предложения 2 имеем $S(\tau)\neq\varnothing$).

Следствие 2. *Пусть* $\operatorname{card}X<\infty$, *а* $\sigma\in V(X)$ *таково, что* $S(\sigma)=\{x\}$ *— одноточечное множество. Тогда* $\sigma(x,y)=1$ *для любого* $y\in X$.

Лемма 4. *Пусть* $\operatorname{card}X<\infty$, *а частичные порядки* σ *и* τ *принадлежат одной и той же компоненте связности графа* $G(X)$. *Равенство* $S(\sigma)=S(\tau)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\sigma=\tau$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\operatorname{card}X\leqslant 2$ утверждение тривиально. Полагаем далее, что $\operatorname{card}X\geqslant 3$. Пусть $Y\doteq S(\sigma)=S(\tau)$ и $Z\doteq X\setminus Y$.

Предположим, что $\sigma\neq\tau$, то есть $\sigma(x,z)\neq\tau(x,z)$ для некоторой пары $(x,z)\in X\times Z$.

1. Полагаем сначала, что $x\in Y$. Без ограничения общности можно считать, что $\sigma(x,z)=1$, а $\tau(x,z)=0$. Если бы имело место равенство $\operatorname{card}Y=1$, то есть $Y=\{x\}$, то в силу следствия 2 имело бы место равенство $\tau(x,z)=1$, что является противоречием. Значит, $\operatorname{card}Y\geqslant 2$ и, следовательно, в силу леммы 3 существует $w\in Y$ такое, что $w\neq x$ и $\tau(w,z)=1$.

Пусть $I\doteq\{\,\eta\in Z\colon\ \tau(x,\eta)=0\,\}$ и $J\doteq\{\,\eta\in Z\colon\ \tau(x,\eta)=1\,\}$. Очевидно, $z\in I$, поэтому $I\neq\varnothing$ и $Y\times I\neq\varnothing$. Кроме того, справедливы равенства $I_x(\tau)=J,\ K_x(\tau)=Y\cup I,\ J_x(\tau)=\varnothing$.

Если $(\xi,\eta)\in J\times I$, то $\tau(x,\xi)=1$, $\tau(x,\eta)=0$, поэтому $\tau(\xi,\eta)=\tau(x,\xi)\,\tau(\xi,\eta)\leqslant\tau(x,\eta)=0$. Значит, $\tau(\xi,\eta)=0$, а для τ имеет место диаграмма

$$\tau=\begin{array}{c|c|c|c|l} & Y & I & J & \\ \hline Y & \begin{smallmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\dots0\\1\end{smallmatrix} & 1\dots1 & \begin{smallmatrix}\leftarrow x\\ \leftarrow w\end{smallmatrix}\\ \hline I & 0 & & \tau(\xi,\eta) & \\ \hline J & 0 & 0 & & \\ \hline & & \uparrow z & & \end{array}\quad\xleftrightarrow{J\times(Y\cup I)}\quad\tau^x=\begin{array}{c|c|c|c|l} & Y & I & J & \\ \hline Y & \begin{smallmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\dots0\\1\end{smallmatrix} & 0 & \begin{smallmatrix}\leftarrow x\\ \leftarrow w\end{smallmatrix}\\ \hline I & 0 & & 0 & \\ \hline J & \begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix} & 1-\tau(\eta,\xi) & & \\ \hline & \uparrow x & \uparrow z & & \end{array}.$$

В частности, $\tau^x(w,z)=1$.

С другой стороны, пусть $K\doteq\{\,\eta\in Z\colon\ \sigma(x,\eta)=0\,\}$ и $L\doteq\{\,\eta\in Z\colon\ \sigma(x,\eta)=1\,\}$. Очевидно, $z\in L$, поэтому $L\neq\varnothing$ и $Y\times L\neq\varnothing$, а кроме того, $I_x(\sigma)=L,\ K_x(\sigma)=Y\cup K,\ J_x(\sigma)=\varnothing$.

Если $(\xi,\eta)\in L\times K$, то $\sigma(x,\xi)=1$, $\sigma(x,\eta)=0$, поэтому $\sigma(\xi,\eta)=\sigma(x,\xi)\,\sigma(\xi,\eta)\leqslant\sigma(x,\eta)=0$. Значит, $\sigma(\xi,\eta)=0$, а для σ имеет место диаграмма

$$\sigma=\begin{array}{c|c|c|c|l} & Y & K & L & \\ \hline Y & \begin{smallmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{smallmatrix} & 0\dots0 & 1\dots1 & \begin{smallmatrix}\leftarrow x\\ \leftarrow w\end{smallmatrix}\\ \hline K & 0 & & \sigma(\xi,\eta) & \\ \hline L & 0 & 0 & & \\ \hline & & & \uparrow z & \end{array}\quad\xleftrightarrow{L\times(Y\cup K)}\quad\sigma^x=\begin{array}{c|c|c|c|l} & Y & K & L & \\ \hline Y & \begin{smallmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{smallmatrix} & 0\dots0 & 0 & \begin{smallmatrix}\leftarrow x\\ \leftarrow w\end{smallmatrix}\\ \hline K & 0 & & 0 & \\ \hline L & \begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix} & 1-\sigma(\eta,\xi) & & \\ \hline & \uparrow x & & \uparrow z & \end{array}.$$

Таким образом, $\sigma^x(\xi,z)=0$ для всех $\xi\in Y$; в частности, $\sigma^x(w,z)=0\neq\tau^x(w,z)$; следовательно, $\sigma^x\neq\tau^x$, что противоречит лемме 2. Значит, $x\notin Y$.

2. Итак, $(x,z)\in Z^2$ и $\sigma(\xi,\eta)=\tau(\xi,\eta)$ для всех $(\xi,\eta)\in Y\times Z$. Зафиксируем какое-нибудь $y\in Y$, и пусть $I\doteq\{\,\eta\in Z\colon\ \sigma(y,\eta)=\tau(y,\eta)=0\,\}$, $J\doteq\{\,\eta\in Z\colon\ \sigma(y,\eta)=\tau(y,\eta)=1\,\}$. Повторив выкладки предыдущего пункта, получим, что $\sigma(\xi,\eta)=\tau(\xi,\eta)=0$ для всех $(\xi,\eta)\in J\times I$. Тогда

$$
\sigma = \begin{array}{c|c|c|c|l}
 & Y & I & J & \\ \hline
Y & \begin{smallmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{smallmatrix} & 0\ldots0 & 1\ldots1 & \leftarrow y \\ \hline
I & 0 & \sigma(\xi,\eta) & \sigma(\xi,\eta) & \\ \hline
J & 0 & 0 & \sigma(\xi,\eta) & \\ \hline
\end{array}
\quad \xleftrightarrow{J\times(Y\cup I)} \quad
\sigma^y = \begin{array}{c|c|c|c|l}
 & Y & I & J & \\ \hline
Y & \begin{smallmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{smallmatrix} & 0\ldots0 & 0 & \leftarrow y \\ \hline
I & 0 & \sigma(\xi,\eta) & 0 & \\ \hline
J & \begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix} & 1-\sigma(\eta,\xi) & \sigma(\xi,\eta) & \\ \hline
 & \uparrow y & & &
\end{array},
$$

$$
\tau = \begin{array}{c|c|c|c|l}
 & Y & I & J & \\ \hline
Y & \begin{smallmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{smallmatrix} & 0\ldots0 & 1\ldots1 & \leftarrow y \\ \hline
I & 0 & \tau(\xi,\eta) & \tau(\xi,\eta) & \\ \hline
J & 0 & 0 & \tau(\xi,\eta) & \\ \hline
\end{array}
\quad \xleftrightarrow{J\times(Y\cup I)} \quad
\tau^y = \begin{array}{c|c|c|c|l}
 & Y & I & J & \\ \hline
Y & \begin{smallmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{smallmatrix} & 0\ldots0 & 0 & \leftarrow y \\ \hline
I & 0 & \tau(\xi,\eta) & 0 & \\ \hline
J & \begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix} & 1-\tau(\eta,\xi) & \tau(\xi,\eta) & \\ \hline
 & \uparrow y & & &
\end{array}.
$$

Поскольку $\sigma^y = \tau^y$, то из представлений для σ^y и τ^y следует, что $\sigma(\xi,\eta) = \tau(\xi,\eta)$ для всех $(\xi,\eta) \in Z^2$, что является противоречием. Значит, $\sigma = \tau$. Обратное утверждение тривиально.

Предложение 3. *Пусть* $\operatorname{card} X < \infty$. *Для любого частичного порядка* $\sigma \in V(X)$ *и для любого непустого подмножества* $S \subseteq S(\sigma)$ *существует единственный частичный порядок* τ, *принадлежащий компоненте связности* $G_\sigma(X)$ *графа* $G(X)$, *такой, что* $S(\tau) = S$.

Пусть $Y \doteq S(\sigma)$, $R \doteq Y \setminus S$, $Z \doteq X \setminus Y$, $I \doteq \{\eta \in Z\colon \sigma(\xi,\eta) = 0$ для всех $\xi \in S\}$, $J \doteq Z \setminus I$. Другими словами, в блоке $**$ (см. диаграмму) для любого $\eta \in J$ существует $\xi \in S$ такое, что $\sigma(\xi,\eta) = 1$. Зафиксируем $(x,y) \in J \times I$. Так как $x \in J$, то существует $z \in S$ такое, что $\sigma(z,x) = 1$; следовательно, $\sigma(x,y) = \sigma(z,x)\,\sigma(x,y) \leqslant \sigma(z,y)$. Поскольку $(z,y) \in S \times I$, то $\sigma(z,y) = 0$, поэтому $\sigma(x,y) = 0$ (другими словами, в блоке $*$ все элементы равны нулю):

$$
\sigma = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & S & R & I & J \\ \hline
S & \begin{smallmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{smallmatrix} & 0 & 0 & ** \\ \hline
R & 0 & \begin{smallmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{smallmatrix} & \sigma(\xi,\eta) & \sigma(\xi,\eta) \\ \hline
I & 0 & 0 & & \sigma(\xi,\eta) \\ \hline
J & 0 & 0 & * & \\ \hline
\end{array}
\quad \xleftrightarrow{(S\cup J)\times(R\cup I)} \quad
\tau = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & S & R & I & J \\ \hline
S & \begin{smallmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{smallmatrix} & 1 & 1 & ** \\ \hline
R & 0 & \begin{smallmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{smallmatrix} & \sigma(\xi,\eta) & 0 \\ \hline
I & 0 & 0 & & 0 \\ \hline
J & 0 & 1-\sigma(\eta,\xi) & 1-\sigma(\eta,\xi) & \\ \hline
\end{array}.
$$

Так как $S \neq \varnothing$, то из построений следует, что $S(\tau) = S$. Единственность τ следует из леммы 4.

Предложение 4. *Пусть* $\operatorname{card} X < \infty$. *В любой компоненте связности* $G_\sigma(X)$ *графа* $G(X)$ *для любого непустого подмножества* $S \subseteq X$, *состоящего не более чем из двух элементов, существует единственный частичный порядок* τ *такой, что* $S(\tau) = S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $\sigma \in V(X)$, $x, y \in X$ такие, что $x \neq y$. Пусть, далее, $S \doteq \{x, y\}$, $I \doteq \{\xi \in X\colon \sigma^x(\xi,y) = \delta_{\xi y}\}$, $J \doteq X \setminus I$. Поскольку $\sigma^x(x,y) = 0$, то $x \in I$. Включение $y \in I$ очевидно; следовательно, $S \subseteq I$. В приводимой ниже диаграмме в блоке $*$ все элементы равны нулю. Действительно, $\sigma^x(y,\eta) = 0$ для любых $\eta \in J$ (так как $\sigma^x(\eta,y) = 1$). Пусть теперь $(\xi,\eta) \in (I \setminus S) \times J$. Так как $\eta \in J$, то $\sigma^x(\eta,y) = 1$, поэтому $\sigma^x(\xi,\eta) = \sigma^x(\xi,\eta)\,\sigma^x(\eta,y) \leqslant \sigma^x(\xi,y)$. Поскольку $\xi \in I \setminus S$, то $\sigma^x(\xi,y) = 0$, поэтому $\sigma^x(\xi,\eta) = 0$. Таким образом,

$$
\sigma^x = \begin{array}{c|c|c|l}
 & I & J & \\ \hline
I & \begin{smallmatrix}1\,0 & 0\ldots0\\ 0\,1 & \\ 0\,0 & \\ \vdots\,\vdots & \\ 0\,0 & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\ldots0\\ \\ * \\ \\ \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}\leftarrow x\\ \leftarrow y\\ \\ \\ \end{smallmatrix} \\ \hline
J & \begin{smallmatrix}0\,1\\ \vdots\,\vdots\\ 0\,1\end{smallmatrix} & & \\ \hline
 & x\uparrow\uparrow y & &
\end{array}
\quad \xleftrightarrow{I\times J} \quad
\sigma' = \begin{array}{c|c|c|l}
 & I & J & \\ \hline
I & \begin{smallmatrix}1\,0 & 0\ldots0\\ 0\,1 & \\ 0\,0 & \\ \vdots\,\vdots & \\ 0\,0 & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\ldots1\\ 0\ldots0\\ \\ \\ \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}\leftarrow x\\ \leftarrow y\\ \\ \\ \end{smallmatrix} \\ \hline
J & 0 & & \\ \hline
 & x\uparrow\uparrow y & &
\end{array}.
$$

Из построений следует, что $\sigma' \in G_\sigma(X)$ и $S \subseteq S(\sigma')$, поэтому $|S(\sigma')| \geqslant 2$. В силу предложения 3 в компоненте $G_\sigma(X)$ существуют единственный частичный порядок τ такой, что $S(\tau) = S$, и единственный частичный порядок τ' такой, что $S(\tau') = \{x\}$.

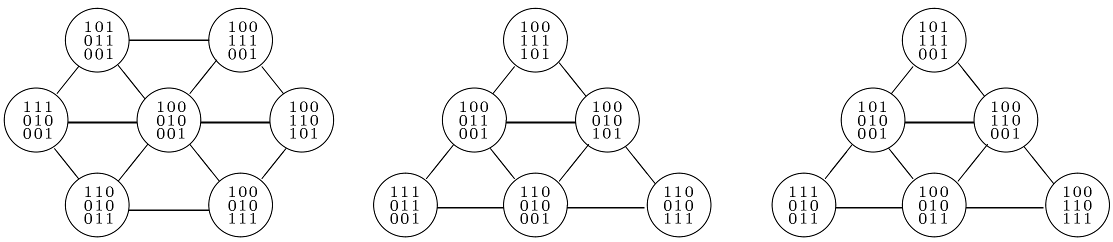
Замечание 3. Пусть $S(G_\sigma) \doteq \{S(\tau) \subseteq X\colon \tau \in G_\sigma(X)\}$ — совокупность всех опорных множеств частичных порядков, принадлежащих компоненте $G_\sigma(X)$. В силу предложений 2–4 справедливы следующие утверждения: 1) $\varnothing \notin S(G_\sigma)$; 2) если $\varnothing \neq \alpha \subseteq \beta \subseteq X$ и $\beta \in S(G_\sigma)$, то $\alpha \in S(G_\sigma)$; 3) если $\alpha \subseteq X$ и $|\alpha| \leqslant 2$, то $\alpha \in S(G_\sigma)$. Другими словами, совокупность $S(G_\sigma)$ является частично упорядоченным множеством относительно естественного отношения включения множеств со следующей спецификой: 1) вместе с каждым элементом множество $S(G_\sigma)$ содержит все его непустые подмножества; 2) $S(G_\sigma)$ содержит все одно- и двухэлементные подмножества множества X. Таким образом, для описания частично упорядоченного множества $S(G_\sigma)$ достаточно указать все его максимальные элементы.

Замечание 4. Пусть $\operatorname{card} X = n$. Из теоремы 1 и предложения 4 следует, что в множестве $V(X)$ имеется в точности: 1) $n\,T_0(n-1)$ различных частичных порядков, опорное множество которых содержит ровно один элемент; 2) $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)\,T_0(n-1)$ различных частичных порядков, опорное множество которых содержит ровно два элемента. Следовательно, имеет место приводимая ниже теорема 2, доказанная ранее в независимых работах [3, 4].

Теорема 2. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство*

$$T_0(n) = \tfrac{1}{2}\,n\,(n+1)\,T_0(n-1) + \operatorname{card}\bigl\{\,\sigma \in V(\{1,\ldots,n\})\colon |S(\sigma)| \geqslant 3\,\bigr\}.$$

5. Примеры. Ниже представлены 3 компоненты связности графа $G(\{1,2,3\})$, содержащие 19 частичных порядков (хорошо известно, что $T_0(2) = 3$, а $T_0(3) = 19$)



Обозначим компоненты графа через K_1, K_2 и K_3. Очевидно, компоненты K_2 и K_3 изоморфны (если применить, например, подстановку $\binom{123}{213}$ к элементам компоненты K_2, то получим K_3). Множество $S(K_1)$ состоит из единственного максимального элемента $\{1,2,3\}$ и всех его непустых подмножеств, а в множестве $S(K_2)$ — три максимальных элемента: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ и $\{2,3\}$. В графе имеется лишь один частичный порядок, у которого $|S(\sigma)| \geqslant 3$, — тривиальный.

Граф $G(\{1,2,3,4\})$ состоит из 19 компонент связности и содержит 219 вершин (авторам известны значения $T_0(n)$ для всех $n \leqslant 12$; в частности, $T_0(4) = 219$). Ниже представлены вершины трех компонент связности этого графа (K_1, K_2 и K_3 соответственно)

1111	1000	1011	1000	1101	1000	1001	1000	1110	1000	1010	1000	1100	1000	1000
0100	1111	0111	0100	0100	1101	0101	0100	0100	1110	0110	0100	0100	1100	0100
0010	0010	0010	1111	0111	1011	0011	0010	0010	0010	0010	1110	0110	1010	0010
0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	1111	0111	1011	0011	1101	0101	1001	0001

1111	1000	1011	1000	1100	1000	1000	1010	1110	1000	1010	1000
0100	1111	0111	0100	0100	1100	0100	0110	0100	1110	0110	0100
0011	0011	0011	1111	0111	1011	0011	0010	0010	0010	0010	0010
0001	0001	0001	1101	0101	1001	0001	1111	0101	1001	0001	1101

1111	1000	1000	1100	1100	1000	1110	1110	1000	1100
0111	1111	0111	0100	0100	0100	0110	0110	0110	0100
0011	1011	0011	1111	0011	1011	0010	0010	0010	0010
0001	1001	0001	1101	0001	1001	1111	0001	1001	1101

Имеем $|K_1| = 15$, $|K_2| = 12$, $|K_3| = 10$, порядок группы автоморфизмов компоненты K_1 равен 24, $|\operatorname{Aut}(K_2)| = 2$, $|\operatorname{Aut}(K_3)| = 4$, поэтому 12 компонент графа изоморфны компоненте K_2, а еще 6 компонент изоморфны компоненте K_3; значит, $219 = 1 \cdot 15 + 12 \cdot 12 + 6 \cdot 10$. В множестве $S(K_1)$ имеется единственный максимальный элемент $\{1,2,3,4\}$; в множестве $S(K_2)$ — три максимальных элемента: $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$ и $\{3,4\}$; в множестве $S(K_3)$ — шесть максимальных элементов: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$ и $\{3,4\}$.

Граф $G(\{1,\ldots,5\})$ состоит из 219 компонент и содержит 4231 вершину. Ниже приведены представители (по одному от каждой компоненты, такие, что $S(\sigma) = \{1\}$) семи компонент связности $K_1,\ldots,K_7$ графа, а также мощности и порядки групп автоморфизмов компонент

$i =$	1	2	3	4	5	6	7
	$\begin{matrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\&&\vdots&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\\&&\vdots&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\\&&\vdots&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\&&\vdots&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\\&&\vdots&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\\&&\vdots&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\\&&\vdots&&\end{matrix}$
$\lvert K_i\rvert =$	31	24	22	20	19	18	15
$\lvert \mathrm{Aut}(K_i)\rvert =$	120	6	4	5	2	2	5

Таким образом, $T_0(5) = 4231 = \sum\limits_{i=1}^{7} \frac{5!}{|\mathrm{Aut}(K_i)|}\,|K_i|$, $T_0(4) = 219 = \sum\limits_{i=1}^{7} \frac{5!}{|\mathrm{Aut}(K_i)|}$. Перечислим максимальные элементы множеств $S(K_i)$. В множестве $S(K_1)$ это $\{1,\ldots,5\}$; в множестве $S(K_2)$ — три максимальных элемента: $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,5\}$ и $\{4,5\}$; в множестве $S(K_3)$ — тоже три максимальных элемента: $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,5\}$ и $\{3,4,5\}$; в множестве $S(K_4)$ — пять максимальных элементов: $\{1,2,3\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,3,5\}$ и $\{2,4,5\}$; в множестве $S(K_5)$ — шесть максимальных элементов: $\{1,2,3\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,4\}$ и $\{3,4,5\}$; в множестве $S(K_6)$ — тоже шесть максимальных элементов: $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$ и $\{4,5\}$; наконец, в множестве $S(K_7)$ имеется десять максимальных элементов вида $\{k,m\}$, $k \neq m$.

Так как известны все максимальные элементы множеств $S(K_i)$, то мощности $|K_i| = |S(K_i)|$ могут быть вычислены в соответствии с принципом включения-исключения. Например,

$$|K_3| = |S(K_3)| = \left[2^{|\{1,2,3,4\}|}-1\right] + \left[2^{|\{1,2,5\}|}-1\right] + \left[2^{|\{3,4,5\}|}-1\right] -$$

$$-\left[2^{|\{1,2\}|}-1\right] - \left[2^{|\{3,4\}|}-1\right] - \left[2^{|\{5\}|}-1\right] = 15+7+7-3-3-1 = 22.$$

Граф $G(\{1,\ldots,6\})$ состоит из 4231 компоненты и содержит 130023 вершины. Ниже приведены мощности и порядки групп автоморфизмов компонент $K_1,\ldots,K_{18}$ графа

$\lvert K_i\rvert =$	63	48	42	42	37	36	36	34	33	33	32	30	30	29	29	27	25	21
$\lvert \mathrm{Aut}(K_i)\rvert =$	720	24	12	12	4	2	24	6	2	2	2	8	4	1	6	1	2	6

Справедливы равенства $T_0(6) = 130023 = \sum\limits_{i=1}^{18} \frac{6!}{|\mathrm{Aut}(K_i)|}\,|K_i|$, $T_0(5) = 4231 = \sum\limits_{i=1}^{18} \frac{6!}{|\mathrm{Aut}(K_i)|}$.

Представленные данные получены в результате компьютерных вычислений. Архив данных хранится на кафедре информатики и математики Удмуртского государственного университета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980. 336 с.
2. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. М.: Мир, 1977. 324 с.
3. Родионов В.И. Об одном соотношении в конечных топологиях // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1980. Т. 103. С. 114–116.
4. Erne M. On the cardinalities of finite topologies and the number of antichains in partially ordered sets // Discrete Mathematics. 1981. Vol. 35. P. 119–133.

Поступила в редакцию 13.08.2013

Аль Джабри Халид Шиа Хайралла, аспирант, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: khalidsheamath@yahoo.com

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., декан факультета, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

Kh. Sh. Al' Dzhabri, V. I. Rodionov
The graph of partial orders

Keywords: binary relation, graph, partial order, finite topology.

Mathematical Subject Classifications: 05C30

Any binary relation $\sigma \subseteq X^2$ (where X is an arbitrary set) generates a characteristic function on the set X^2: if $(x, y) \in \sigma$, then $\sigma(x, y) = 1$, otherwise $\sigma(x, y) = 0$. In terms of characteristic functions on the set of all binary relations of the set X we introduced the concept of a binary reflexive relation of adjacency and determined the algebraic system consisting of all binary relations of a set and of all unordered pairs of various adjacent binary relations. If X is finite set then this algebraic system is a graph ("a graph of graphs").

It is shown that if σ and τ are adjacent relations then σ is a partial order if and only if τ is a partial order. We investigated some features of the structure of the graph $G(X)$ of partial orders. In particular, if X consists of n elements, and $T_0(n)$ is the number of labeled T_0-topologies defined on the set X, then the number of vertices in a graph $G(X)$ is $T_0(n)$, and the number of connected components is $T_0(n-1)$.

For any partial order σ there is defined the notion of its support set $S(\sigma)$, which is some subset of X. If X is finite set, and partial orders σ and τ belong to the same connected component of the graph $G(X)$, then the equality $S(\sigma) = S(\tau)$ holds if and only if $\sigma = \tau$. It is shown that in each connected component of the graph $G(X)$ the union of support sets of its elements is a specific partially ordered set with respect to natural inclusion relation of sets.

REFERENCES

1. Ore O. *Theory of graphs*, Providence: Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1962, vol. 18, 270 p. Translated under the title *Teoriya grafov*, Moscow: Nauka, 1980, 336 p.
2. Harary F., Palmer E. *Graphical enumeration*, New York–London: Academic Press, 1973, 272 p. Translated under the title *Perechislenie grafov*, Moscow: Mir, 1977, 324 p.
3. Rodionov V.I. A relation in finite topologies, *Journal of Soviet Mathematics*, 1984, vol. 24, pp. 458–460.
4. Erne M. On the cardinalities of finite topologies and the number of antichains in partially ordered sets, *Discrete Mathematics*, 1981, vol. 35, pp. 119–133.

Received 13.08.2013

Al' Dzhabri Khalid Shea Khairalla, Post-graduate student, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: khalidsheamath@yahoo.com

Rodionov Vitalii Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Dean, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru