

УДК 531.31

© *Е. Н. Пивоварова, Т. Б. Иванова***ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ
В ЗАДАЧЕ О КАЧЕНИИ ШАРА С МАЯТНИКОМ ¹**

Исследована устойчивость катящейся по горизонтальной плоскости сферической оболочки с гироскопом Лагранжа внутри. Проведен линейный анализ устойчивости для верхнего и нижнего положений волчка, построена бифуркационная диаграмма системы, получены и проанализированы траектории точки контакта при различных значениях интегралов движения.

Ключевые слова: качение, устойчивость, гироскоп Лагранжа, бифуркационная диаграмма

Введение

Создание управляемых устройств, использующих для передвижения один или несколько шаров, представляет значительный интерес в связи с наличием ряда преимуществ перед обычными колесными средствами передвижения: мобильность, маневренность, в том числе возможность движения из точки в любом направлении. Механизмы, приводящие в движение такие сферические роботы, изолированы внутри оболочки, то есть могут перемещаться в агрессивных средах (см. например [6, 7]).

Одним из первых задачу о качении без проскальзывания сферической оболочки с маятником внутри изучал С. А. Чаплыгин более ста лет назад. Он рассматривал катящийся по плоскости шар, в центре которого закреплен сферический маятник [5]. В этом случае были указаны все необходимые интегралы и гироскопическая функция. Еще одна неголономная математическая модель катящейся без проскальзывания сферической оболочки с гироскопом Лагранжа внутри (более общий случай системы Чаплыгина) описана в [2]. Для данной задачи приведены первые интегралы и инвариантная мера, указано сведение к квадратурам.

В данной работе проведен анализ устойчивости системы, рассмотренной в [2]: в линейном приближении исследованы два наиболее простых частных решения системы (когда волчок стоит неподвижно или крутится только вокруг своей оси), методом построения бифуркационной диаграммы определены области существования и устойчивости периодических решений системы. Такие решения могут быть использованы в анализе управляемости системы, в частности при смене ориентации шара.

§ 1. Сферическая оболочка с волчком Лагранжа

Рассмотрим сферическую оболочку, катящуюся без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Выберем неподвижную систему координат $Oxyz$ так, чтобы ось Oz была направлена вертикально вниз (см. рис. 1). Обозначим через G_s — центр масс оболочки, а через G_t — центр масс волчка, расстояние между ними $R_t = |G_s G_t|$, R_o — внешний радиус оболочки. Вектор n направлен вдоль оси симметрии волчка.

Прежде чем анализировать устойчивость данной системы, приведем уравнения движения, инвариантную меру и первые интегралы данной системы, указанные в [2].

¹Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «УдГУ» в рамках гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. №11.G34.31.0039). Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.1935.

Кинетическая энергия системы записывается в виде

$$T = \frac{1}{2}(M\mathbf{V}^2 + I\boldsymbol{\Omega}^2) + \frac{1}{2}(m\mathbf{v}^2 + i\boldsymbol{\omega}^2 + j(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})^2),$$

где $\mathbf{V}, \boldsymbol{\Omega}$ — скорость центра и угловая скорость оболочки, M, I — ее масса и момент инерции, $\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс и угловая скорость волчка, m, i, j — его масса и компоненты тензора инерции.

Уравнения движения системы имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + mR_o^2[\mathbf{k} \times [\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{k}]] - mR_oR_t[\mathbf{k} \times [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{n}]] &= mR_oR_t[\mathbf{k} \times [\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{n}}]], \\ i\dot{\boldsymbol{\omega}} + mR_t^2[\mathbf{n} \times [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{n}]] - mR_oR_t[\mathbf{n} \times [\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{k}]] &= \\ &= -j(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})\dot{\mathbf{n}} - mR_t^2[\mathbf{n} \times [\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{n}}]] + mgR_t[\mathbf{n} \times \mathbf{k}], \\ \dot{\mathbf{n}} &= [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}], \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{J} = \text{diag}(I + MR_o^2, I + MR_o^2, I)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, g — ускорение поля тяжести. Скорость точки контакта связана с угловой скоростью следующим образом:

$$\mathbf{V} = R_o[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega}]. \tag{2}$$

Для сокращения записи формул введем обозначения:

$$\tilde{I} = I + (M + m)R_o^2, \quad \mu = \frac{j\tilde{I} - mR_t^2(I + MR_o^2)}{i\tilde{I} + mR_t^2(I + MR_o^2)}, \quad \mathbf{J}_s = \text{diag}(\tilde{I}, \tilde{I}, I).$$

Параметр μ зависит от формы волчка и принимает отрицательные значения, если волчок вытянутый, или положительные значения, если волчок сплюснутый.

Инвариантная мера $\rho d\boldsymbol{\Omega} d\boldsymbol{\omega} d\mathbf{n}$ имеет плотность вида

$$\rho(n_3) = \frac{(i + mR_t^2)\tilde{I}}{m^2R_t^2R_o^2} - n_3^2, \tag{3}$$

Система допускает семь первых интегралов:

<i>геометрический</i>	$\mathbf{n}^2 = 1,$
<i>энергия</i>	$E = \frac{1}{2}(M\mathbf{V}^2 + I\boldsymbol{\Omega}^2) + \frac{1}{2}(m\mathbf{v}^2 + i\boldsymbol{\omega}^2 + j(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})^2) - mgR_t(\mathbf{n}, \mathbf{k}),$
<i>векторный интеграл Чаплыгина</i>	$\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} + mR_o[\mathbf{v} \times \mathbf{k}],$
<i>линейные интегралы</i>	$F_1 = \omega_3 + \mu(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})n_3,$
	$F_2 = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}),$

где $\mathbf{V} = R_o[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega}]$, $\mathbf{v} = R_o[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega}] + R_t[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}]$.

На уровне первых интегралов $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\chi}} = \{(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) \mid n^2 = 1, \mathbf{K} = \boldsymbol{\kappa}, F_1 = \chi_1, F_2 = \chi_2\}$ рассматриваемая система приводится к одной степени свободы (n_3 — обобщенная координата) и энергия системы представляется в форме

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{J}_s^{-1}\boldsymbol{\kappa}) + \frac{m^2R_o^2R_t^2}{2\tilde{I}} \frac{\rho(n_3)\dot{n}_3^2}{1 - n_3^2} + U_{\boldsymbol{\chi}}(n_3) - mgR_t n_3, \\ U_{\boldsymbol{\chi}} &= \frac{1}{2(1 - n_3^2)} \left[\left(i + \frac{mR_t^2(I + MR_o^2)}{\tilde{I}} \right) \chi_1^2 - 2(i + j)n_3\chi_1\chi_2 + (i + j)(1 + \mu n_3^2)\chi_2^2 \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, на фиксированном уровне интеграла энергии

$$E = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{J}_s^{-1}\boldsymbol{\kappa}) + H$$

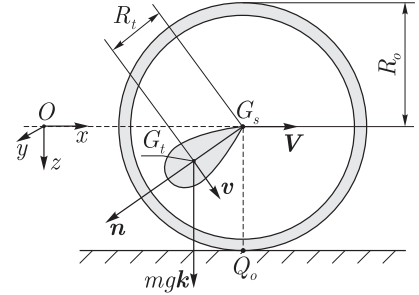


Рис. 1.

эволюция n_3 описывается уравнением

$$\dot{n}_3^2 = \frac{2\tilde{I}(1 - n_3^2)}{m^2 R_o^2 R_t^2 \rho(n_3)} (H + mgR_t n_3 - U_{\mathbf{x}}(n_3)), \quad (4)$$

где в скобках стоит гироскопическая функция рассматриваемой системы:

$$f = H + mgR_t n_3 - \frac{1}{2(1 - n_3^2)} \left[\left(i + \frac{mR_t^2(I + MR_o^2)}{\tilde{I}} \right) \chi_1^2 - 2(i + j)n_3\chi_1\chi_2 + (i + j)(1 + \mu n_3^2)\chi_2^2 \right]. \quad (5)$$

§ 2. Линейный анализ устойчивости

Согласно (4), значения $n_3 = \pm 1$ соответствуют неподвижным точкам системы. В этом параграфе мы проанализируем линейную устойчивость этих двух самых простых решений: когда волчок находится в верхнем ($n_3 = -1$) и в нижнем ($n_3 = 1$) положении.

Система (1) из девяти уравнений может быть сведена к системе из шести уравнений, которую можно записать в векторной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (6)$$

где $\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, n_1, n_2, n_3)$, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ — вектор-функция размерности $N = 6$.

Обозначим $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$, где \mathbf{x}^* — неподвижная точка системы (1). Раскладывая правые части уравнения (6) около $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, приходим к следующему линеаризованному уравнению:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{L}\mathbf{y},$$

где \mathbf{L} — матрица линеаризации системы

$$L_{i,j} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6.$$

Проанализируем устойчивость частного решения $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. При этом вектор угловой скорости направлен вдоль оси симметрии волчка, то есть $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_0)$, ω_0 определяется из начальных условий. Это решение соответствует нижнему положению волчка, который вращается вокруг собственной оси симметрии с угловой скоростью ω_0 .

Выбирая единицы измерения длины и времени ($x_0 = gt_0^2$, где x_0 — единица измерения длины, $t_0 = \sqrt{\frac{i+j}{mgR_t}}$ — единица измерения времени), вводя безразмерную переменную в виде

$$\beta = \frac{mgR_t \tilde{I}}{i\tilde{I} + mR_t^2(I + MR_o^2)},$$

получаем матрицу линеаризации

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -\mu\omega_0 & 0 & 0 & \mu\omega_0^2 + \beta & 0 \\ \mu\omega_0 & 0 & 0 & -\mu\omega_0^2 - \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\omega_0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица характеризуется шестью собственными значениями λ_i , которые являются корнями характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{E}) = 0, \quad (7)$$

где \mathbf{E} — единичная матрица.

Решая уравнение (7), получаем следующие корни:

$$\lambda = \left\{ 0, 0, i\frac{1}{2}\sqrt{m_1 + p_1}, -i\frac{1}{2}\sqrt{m_1 + p_1}, i\frac{1}{2}\sqrt{m_1 - p_1}, -i\frac{1}{2}\sqrt{m_1 - p_1} \right\}, \quad (8)$$

где

$$m_1 = 2\mu^2\omega^2 + 4\beta + 4\mu\omega^2 + 2\omega^2, \\ p_1 = 2\sqrt{8\beta\mu\omega^2 + 4\beta\omega^2 + 4\beta\mu^2\omega^2 + 6\mu^2\omega^4 + 4\mu\omega^4 + 4\mu^3\omega^4 + \omega^4 + \mu^4\omega^4}.$$

Для примера рассмотрим случай, когда маятник, закрепленный в центре оболочки, представляет собой вытянутый конус. Тогда $\mu = -0.9$ и $\beta = 0.09$. Два нулевых собственных числа (8) соответствуют существованию интегралов движения. При данных значениях констант μ и β все четыре ненулевых корня (8) будут чисто мнимыми независимо от значения ω_0 . Положение равновесия в этом случае — центр. Это означает, что данное решение всегда является устойчивым при любых угловых скоростях ω_0 .

Аналогично проанализируем устойчивость решения $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$, $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_0)$. Это решение соответствует верхнему положению волчка, вращающегося вокруг собственной оси симметрии с угловой скоростью ω_0 .

В этом случае матрица линеаризации выглядит следующим образом:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & \mu\omega_0 & 0 & 0 & \mu\omega_0^2 + \beta & 0 \\ -\mu\omega_0 & 0 & 0 & -\mu\omega_0^2 - \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\omega_0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из характеристического уравнения (7) получаем собственные значения в виде

$$\lambda = \left\{ 0, 0, i\frac{1}{2}\sqrt{m_2 + p_2}, -i\frac{1}{2}\sqrt{m_2 + p_2}, i\frac{1}{2}\sqrt{m_2 - p_2}, -i\frac{1}{2}\sqrt{m_2 - p_2} \right\}, \quad (9)$$

где

$$m_2 = 2\mu^2\omega^2 - 4\beta + 4\mu\omega^2 + 2\omega^2, \\ p_2 = 2\sqrt{-8\beta\mu\omega^2 - 4\beta\omega^2 - 4\beta\mu^2\omega^2 + 6\mu^2\omega^4 + 4\mu\omega^4 + 4\mu^3\omega^4 + \omega^4 + \mu^4\omega^4}.$$

При заданных значениях констант $\mu = -0.9$ и $\beta = 0.09$ ненулевые корни (9) образуют две пары комплексно-сопряженных чисел, одна из которых имеет положительную действительную часть (в этом случае состояние равновесия — неустойчивый фокус), а другая — отрицательную (состояние равновесия — устойчивый фокус). Начиная с определенного значения $\omega_0^* = 7$, все ненулевые корни становятся чисто мнимыми. Таким образом, при достаточно больших угловых скоростях $\omega > \omega_0^*$ это решение является устойчивым в линейном приближении.

Отметим, что при всей важности линейного анализа устойчивости, его не достаточно для представления полной картины поведения динамической системы и описания возможных в системе бифуркаций. Далее мы проводим исследование устойчивости с помощью построения бифуркационной диаграммы. Данный метод является более наглядным, с его помощью можно определить области существования и устойчивости периодических решений системы.

§ 3. Топологический анализ устойчивости

Замечание 1. Гироскопическая функция, аналогичная (5), встречается во многих задачах динамики твердого тела (в частности, в задаче о движении волчка Лагранжа [3], при исследовании катящегося без проскальзывания уравновешенного динамически несимметричного шара по горизонтальной плоскости [1]), при исследовании динамики жидкого самогравитирующего эллиптического цилиндра [4] и многих других, что позволяет применить сходный подход к анализу устойчивости рассматриваемой системы.

I. Случай $F_2 = 0$

Рассмотрим частный случай данной задачи, а именно, $F_2 = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0$. В этом случае интеграл $F_1 = \omega_3 + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = \omega_3$. Данные значения соответствуют одному из наиболее простых движений — когда волчок не совершает вращения вокруг собственной оси симметрии, то есть является сферическим маятником. В дальнейшем мы увидим, что бифуркационная диаграмма для такой системы представляет собой сечение поверхности регулярных прецессий общей системы при $F_2 = 0$.

Гироскопическая функция системы (4) при $F_2 = 0$ имеет вид

$$f(n_3) = H + mgR_t n_3 - \frac{1}{2(1-n_3^2)} \left(i + \frac{mR_t^2(I + MR_o^2)}{\tilde{I}} \right) F_1^2. \quad (10)$$

Для сокращения записи переобозначим переменные следующим образом:

$$\frac{H}{mgR_t} \rightarrow H, \quad \frac{mR_o^2 \rho(n_3)}{2\tilde{I}} \rightarrow \rho(n_3), \quad F_1 \sqrt{\frac{mR_t^2}{i+j}} \rightarrow F_1$$

и введем безразмерную переменную $b = \frac{i\tilde{I} + mR_t^2(I + MR_o^2)}{(i+j)\tilde{I}}$. Тогда уравнение (4) и гироскопическая функция переписутся в виде

$$\dot{n}_3^2 = \frac{1-n_3^2}{\rho(n_3)} f(n_3), \quad f(n_3) = \left(H + n_3 - \frac{bF_1^2}{2(1-n_3^2)} \right).$$

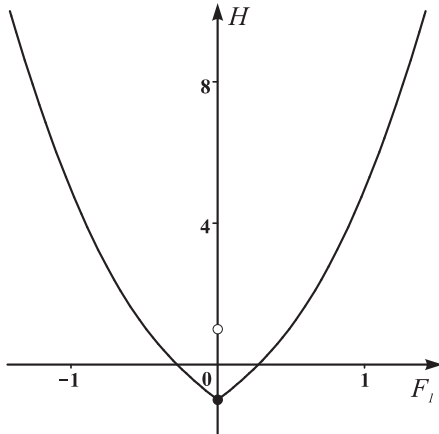


Рис. 2. Бифуркационная кривая для случая $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0$

$H(F_1) = H(n_3, F_1(n_3))$.

Полученная зависимость позволяет построить бифуркационную кривую для рассматриваемой системы (рис. 2). Данная кривая определяет область регулярных прецессий. Точки на кривой соответствуют периодическим решениям системы, а область внутри соответствует разрешенным значениям интеграла F_1 . Черная точка соответствует устойчивому положению системы — когда волчок находится в нижнем положении и не вращается, белая точка соответствует верхнему (неустойчивому) положению волчка.

Для каждой точки бифуркационной кривой можно восстановить значения угловых и линейных скоростей реальной системы, то есть определить параметры устойчивого движения сферической оболочки с закрепленным в центре волчком.

Уравнения для определения периодических решений

$$\dot{n}_3 = 0, \quad \frac{\partial \dot{n}_3}{\partial n_3} = 0$$

приводятся к виду

$$f(n_3) = 0, \quad \frac{\partial f(n_3)}{\partial n_3} = 0 \quad (11)$$

или в явном виде

$$H + n_3 - \frac{bF_1^2}{2(1-n_3^2)} = 0, \quad \frac{bF_1^2 n_3}{(1-n_3^2)^2} - 1 = 0. \quad (12)$$

Выражая из второго уравнения (12) $F_1(n_3)$ и подставляя в первое, получим неявную зависимость

II. Случай $F_2 \neq 0$

Аналогично предыдущему случаю переобозначим (обезразмерим) переменные следующим образом:

$$\frac{H}{mgR_t} \rightarrow H, \quad F_1 \sqrt{\frac{mR_t^2}{i+j}} \rightarrow F_1, \quad F_2 \sqrt{\frac{mR_t^2}{i+j}} \rightarrow F_2, \quad \frac{mR_o^2 \rho(n_3)}{2\tilde{I}} \rightarrow \rho(n_3).$$

Тогда уравнение (4) перепишется в виде

$$\dot{n}_3^2 = \frac{1 - n_3^2}{\rho(n_3)} \left(H + n_3 - \frac{1}{2(1 - n_3^2)} [F_1^2 b - 2n_3 F_1 F_2 + (1 + \mu n_3^2) F_2^2] \right).$$

Так как уравнения (11) не изменятся при умножении гироскопической функции на $(1 - n_3^2)$, можно записать (5) с учетом переобозначений в виде

$$f = 2(H + n_3)(1 - n_3^2) - (F_1^2 b - 2n_3 F_1 F_2 + (1 + \mu n_3^2) F_2^2).$$

Как и в предыдущем случае, чтобы найти область регулярных прецессий, нам необходимо решить систему уравнений (11):

$$\begin{cases} 2(H + n_3)(1 - n_3^2) - (F_1^2 b - 2n_3 F_1 F_2 + (1 + \mu n_3^2) F_2^2) = 0 \\ -6n_3^2 + (-2\mu F_2^2 - 4h)n_3 + 2 + 2F_1 F_2 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Из данной системы получаем неявную зависимость энергии H от интегралов F_1, F_2 в виде:

$$\begin{cases} H = H(F_2, n_3) \\ F_1 = F_1(F_2, n_3). \end{cases}$$

Полученная зависимость позволяет построить поверхность, соответствующую регулярным прецессиям в пространстве первых интегралов (H, F_1, F_2) , и ее сечения при различных F_1 и F_2 .

На рис. 3 показана поверхность регулярных прецессий — граница области разрешенных значений интегралов. На ней можно выделить две кривые в плоскостях $bF_1 \pm F_2 = 0$ (одна из кривых $bF_1 + F_2 = 0$ не доходит до начала координат и начинается в точке $F_2 = bF_1 = 7$), которые отвечают неподвижным точкам системы, когда волчок стоит в верхнем положении равновесия и в нижнем положении и при этом вращается вокруг своей оси. Одно решение

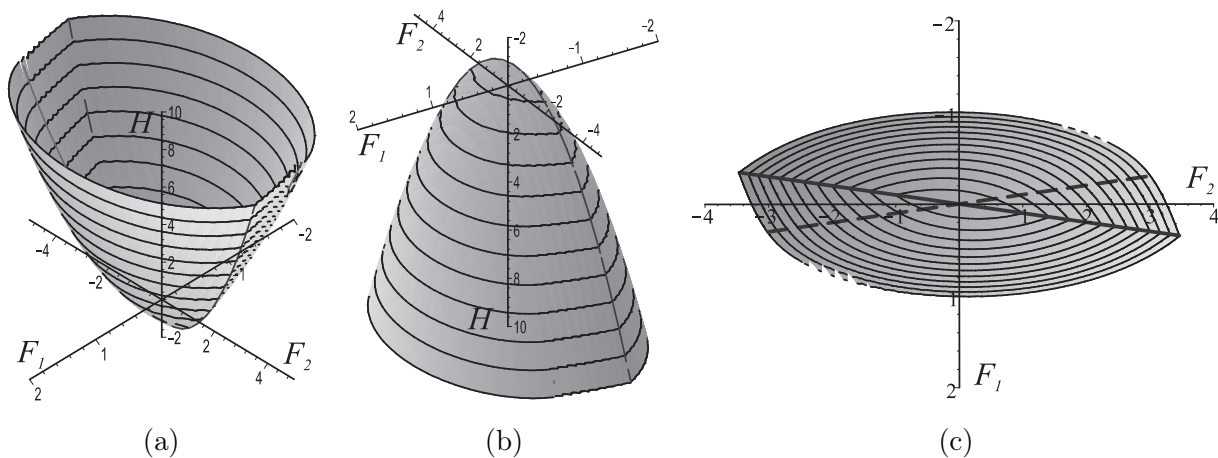


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма рассматриваемой системы в пространстве интегралов F_1, F_2, H . На рисунке (с) сплошной линией обозначена кривая, соответствующая значению $n_3 = 1$, пунктирной линией — $n_3 = -1$

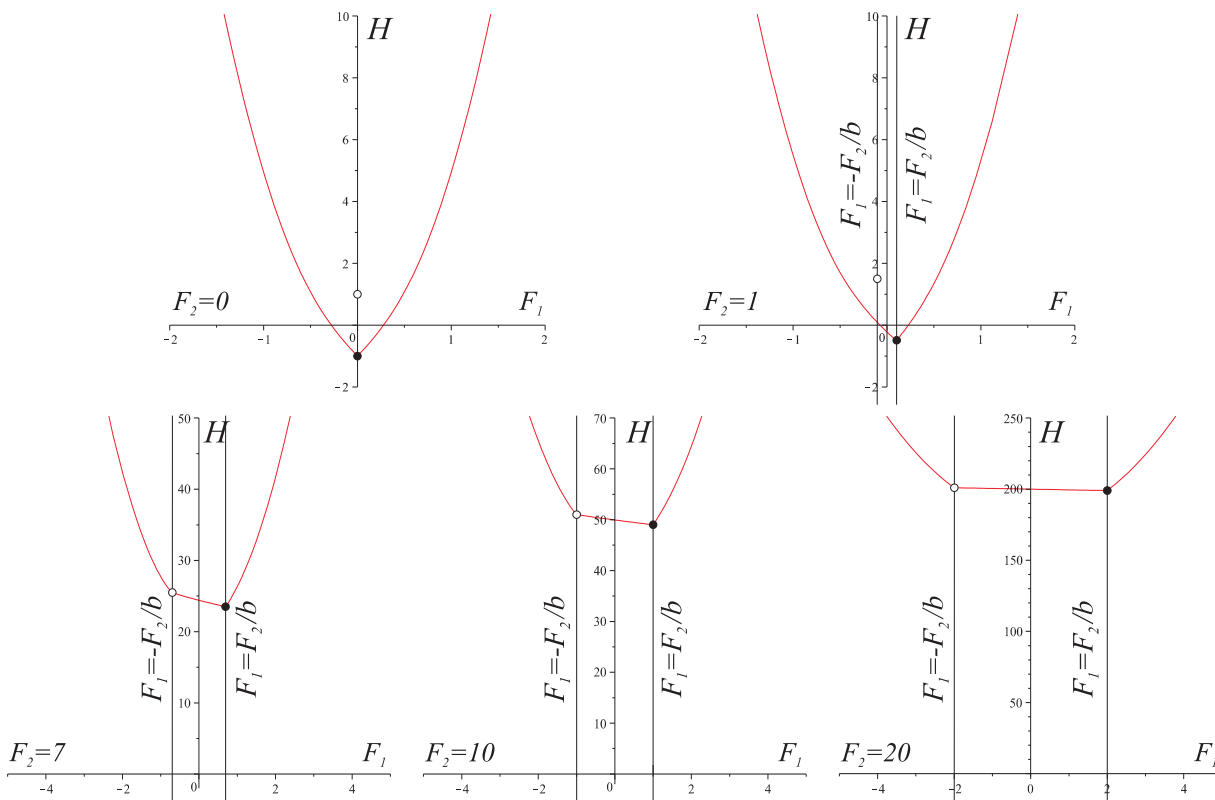


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма на плоскости (H, F_1) при различных постоянных значениях F_2 . Черные точки соответствуют значению $n_3 = 1$, белые — $n_3 = -1$ ($\mu = -0.9, b = 10$)

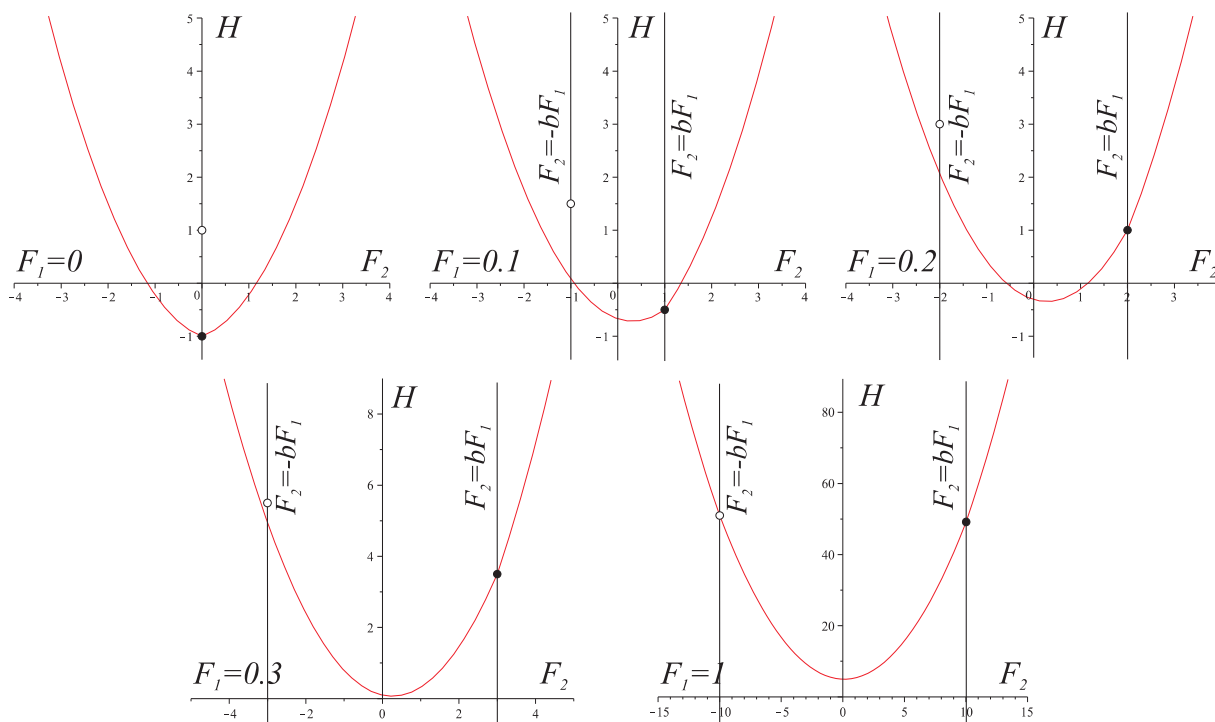


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма на плоскости (H, F_2) при различных постоянных значениях F_1 . Черные точки соответствуют значению $n_3 = 1$, белые — $n_3 = -1$ ($\mu = -0.9, b = 10$)

($n_3 = 1$ — нижнее положение волчка) всегда располагается на бифуркационной поверхности и поэтому является устойчивым, а другое ($n_3 = -1$ — верхнее положение волчка) при значениях интегралов $F_1 \geq 0.7$, $F_2 \geq 7$ выходит на поверхность, а при $F_1 < 0.7$, $F_2 < 7$ оно находится внутри бифуркационной поверхности и соответствует неустойчивому положению равновесия, что совпадает с результатами анализа устойчивости в линейном приближении.

На рис. 4 и 5 показаны сечения поверхности регулярных прецессий при различных постоянных значениях интегралов F_2 и F_1 . На них также видно, что нижнее положение волчка всегда устойчиво (черные точки), а верхнее начинает быть устойчивым со значений интегралов $F_1 = 0.7$, $F_2 = 7$ (белые точки).

§ 4. Траектория точки контакта

Первые две компоненты векторного интеграла Чаплыгина \mathbf{K} можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} K_1 &= R_o(V_2(M_1 + m) + mR_t[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}]_2), \\ K_2 &= -R_o(V_1(M_1 + m) + mR_t[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}]_1), \end{aligned} \quad (14)$$

где $M_1 = M + \frac{I}{R_o^2}$. Кроме того, можно показать, что проекции K_1, K_2 связаны с проекциями импульса системы \mathbf{P} следующим образом:

$$K_1 = R_o P_2, \quad K_2 = -R_o P_1, \quad (15)$$

где P_1, P_2 — проекции импульса на неподвижную систему координат.

Для построения и анализа траектории точки контакта воспользуемся системой (6), а также выражением для скорости, которую с учетом (14), (15) представим следующим образом:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P} - mR_t[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}]}{(M_1 + m)} = \dot{\mathbf{r}}_s,$$

где \mathbf{r}_s — радиус-вектор точки контакта. Решая систему из восьми дифференциальных уравнений, можно определить зависимость координат x, y точки контакта от времени t .

На плоскости движения Oxy направление оси Ox будем выбирать вдоль направления начального импульса системы. Таким образом, поскольку импульс системы постоянный, проекция $P_2 = 0$.

Рассмотрим сначала движение системы, когда волчок находится в нижнем положении ($n_3 = 1$). Для этого возьмем точку с бифуркационной диаграммы с параметрами $H = 51$, $F_1 = 1$, $F_2 = 10$. Проекция начального импульса при этом равна $P_1 = 10$. Тогда получим, что система движется по прямой вдоль оси Ox с постоянной скоростью $V_1 = 3.75$. Очевидно, такая же траектория (прямая) будет и для верхнего положения волчка.

На рис. 6 показаны траектории точки контакта оболочки с плоскостью для различных точек бифуркационной поверхности. Из рисунка видно, что при ненулевом начальном импульсе система движется вдоль оси Ox по периодической траектории, а при $K_1 = K_2 = 0$ совершает периодические вращения вокруг неподвижной точки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С. Обобщение преобразования Чаплыгина и явное интегрирование шарового подвеса // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 2. С. 313–338.
2. Борисов А.В., Мамаев И.С. Две неголомомные интегрируемые связи твердых тел // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 3. С. 559–568.
3. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела: гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.

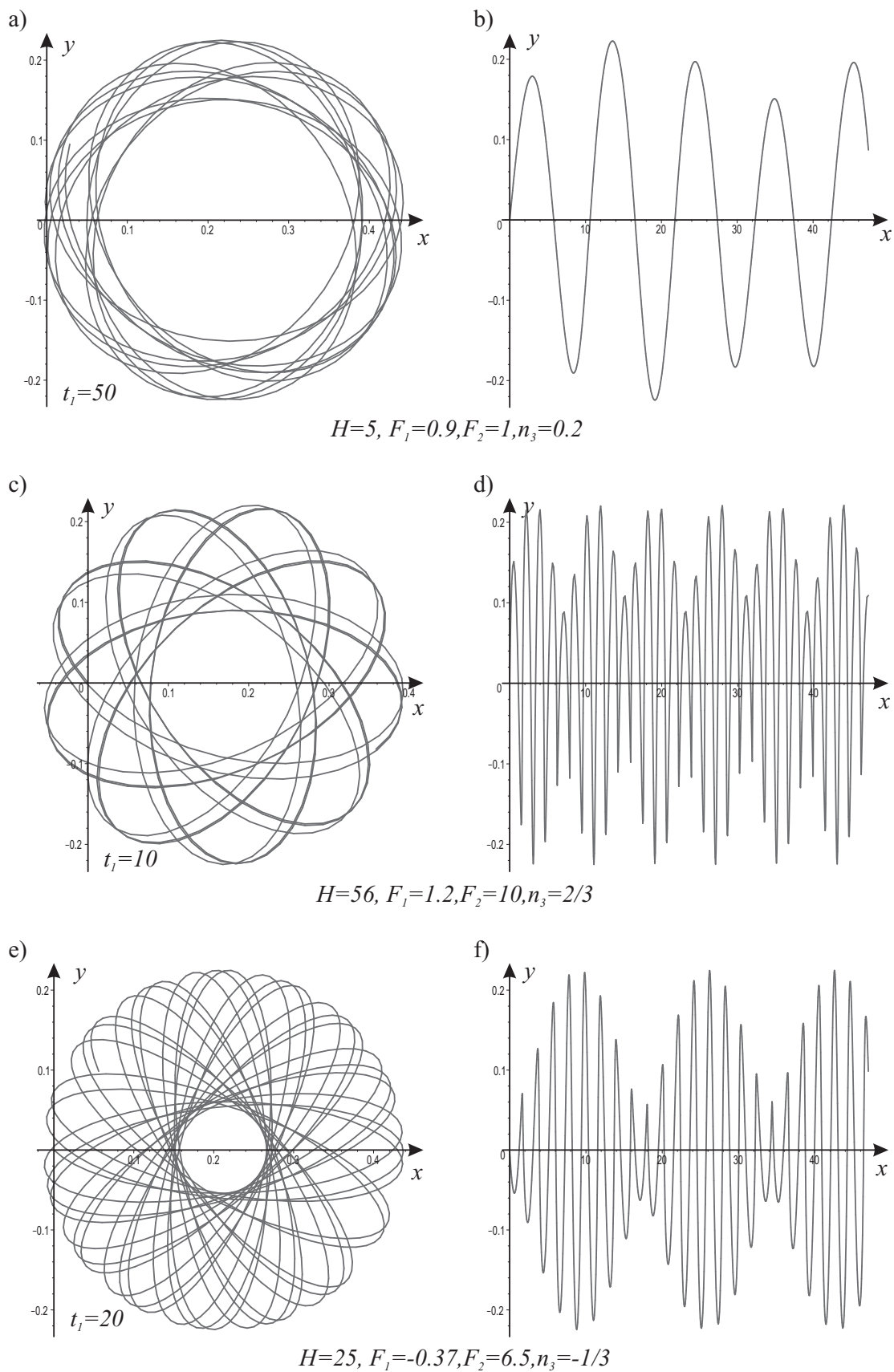


Рис. 6. Траектория точки контакта на плоскости xy . На рисунках а), с), е) показаны траектории при значениях проекций импульса $P_1 = 0, P_2 = 0$ за время $t = t_1$, на рисунках б), д), ф) — $P_1 = 10, P_2 = 0, t = 50$

4. Борисов А.В., Мамаев И.С., Иванова Т.Б. Устойчивость жидкого самогравитирующего эллиптического цилиндра с внутренним вращением // *Нелинейная динамика*. 2010. Т. 6. № 4. С. 807–822.
5. Чаплыгин С.А. О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров // Чаплыгин С.А. Сбор. соч. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. Т. 1. С. 26–56.
6. Alves J., Dias J. Design and control of a spherical mobile robot // *J. Systems and Control Engineering*. 2003. Vol. 217. P. 457–467.
7. Camicia C., Conticelli F., Bicchi A. Nonholonomic kinematics and dynamics of the sphericle // *Proc. of the 2000 IEEE/RSJ Internat. Conf. on Intelligent Robots and Systems*. 2000. P. 805–810.

Поступила в редакцию 13.08.2012

Пивоварова Елена Николаевна, студент, кафедра теоретической физики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: l.n.pivovarova@gmail.com

Иванова Татьяна Борисовна, к. ф.-м. н., старший преподаватель, кафедра теоретической физики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, Удмуртия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: tbesp@rcd.ru

E. N. Pivovarova, T. B. Ivanova

Stability analysis of periodic solutions in the problem of the rolling of a ball with a pendulum

Keywords: rolling motion, stability, Lagrange's gyroscope, bifurcational diagram

Mathematical Subject Classifications: 37J60

In the paper we study the stability of a spherical shell rolling on a horizontal plane with Lagrange's gyroscope inside. A linear stability analysis is made for the upper and lower position of a top. A bifurcation diagram of the system is constructed. The trajectories of the contact point for different values of the integrals of motion are constructed and analyzed.

REFERENCES

1. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. Generalized Chaplygin's transformation and explicit integration of a system with a spherical support, *Nelin. Dinam.*, 2011, vol. 7, no. 2, pp. 313–338.
2. Borisov A.V., Mamaev I.S. Two non-holonomic integrable systems of coupled rigid bodies, *Nelin. Dinam.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 559–568.
3. Borisov A.V., Mamaev I.S. *Dinamika tverdogo tela: Gamil'tonovy metody, integriruemost', khaos* (Rigid body dynamics: Hamiltonian methods, integrability, chaos), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2005, 576 p.
4. Borisov A.V., Mamaev I.S., Ivanova T.B. Stability of a liquid self-gravitating elliptic cylinder with intrinsic rotation, *Nelin. Dinam.*, 2010, vol. 6, no. 4, pp. 807–822.
5. Chaplygin S.A. On some generalization of the area theorem with applications to the problem of rolling balls, *Sbornik sochinenii* (Collection of works, vol. 1), Moscow–Leningrad: Gostekhizdat, 1948, pp. 26–56.
6. Alves J., Dias J. Design and control of a spherical mobile robot, *J. Systems and Control Engineering*, 2003, vol. 217, pp. 457–467.
7. Camicia C., Conticelli F., Bicchi A. Nonholonomic kinematics and dynamics of the sphericle, *Proc. of the 2000 IEEE/RSJ Internat. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, 2000, pp. 805–810.

Received 13.08.2012

Pivovarova Elena Nikolaevna, student, Department of Theoretical Physics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: l.n.pivovarova@gmail.com

Ivanova Tat'yana Borisovna, Lecturer, Department of Theoretical Physics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: tbesp@rcd.ru