

УДК 539.3

© Д. С. Бурлаков, А. А. Сеславина

**О ДВИЖЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ШАЙБЫ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ<sup>1</sup>**

Рассматривается задача о скольжении однородного прямого цилиндра произвольной формы (шайбы) по горизонтальной плоскости под действием сил сухого трения. Пятно контакта цилиндра с плоскостью совпадает с его основанием. Одной из центральных гипотез в работе является выбор математической модели взаимодействия малого элемента поверхности шайбы с плоскостью. Предполагается, что данное явление описывается законом сухого трения Амонтона–Кулона. В данной работе основное внимание уделено качественному анализу уравнений движения системы, который позволит описать динамику при малых значениях кинетической энергии системы (финальную динамику). Сформулированы и доказаны качественные свойства динамики произвольных шайб. Приведены примеры, показывающие различие финальной динамики шайб, опирающихся на шероховатую плоскость круглым основанием, центрально-симметричным и произвольной формы.

*Ключевые слова:* сухое трение, закон Амонтона–Кулона, шайба, финальная динамика, устойчивость.

**Введение**

Рассмотрим скольжение прямого цилиндра (далее шайбы) по горизонтальной плоскости под действием силы тяжести и сил сухого трения. Шайбу будем считать абсолютно твердым телом. Основание цилиндра — ограниченная плоская фигура произвольной формы.

Динамика шайбы с круглым основанием подробно рассмотрена в [1, 3]. В работах [1, 2] приведены экспериментальные данные исследования движения круглой шайбы, которые неплохо согласуются с теоретическими результатами в [1, 3]. В работах [3–5] особое внимание уделено телам, опирающимся на шероховатую плоскость тремя точками.

В работе используются следующие гипотезы:

**Гипотеза 1.** *Пятно контакта  $D$  при любом движении шайбы совпадает с основанием тела.*

**Гипотеза 2.** *Закон взаимодействия элемента поверхности шайбы с плоскостью:*

$$d\vec{F} = -f \frac{\vec{u}}{u} dN,$$

где  $f$  — коэффициент трения,  $\vec{u}$  — скорость участка (корректно определенная, когда участок  $dS$  стягивается в точку),  $u = |\vec{u}|$ ,  $dN = \sigma dS$  — модуль силы нормальной реакции, приходящейся на участок  $dS$ .

**Гипотеза 3.** *Высота шайбы невелика так, что на любых движениях  $\sigma > 0$  на пятне контакта.*

**Обозначения**

Пусть  $\omega$  — угловая скорость тела,  $\vec{v}_c$  — скорость центра масс тела,  $J_z$  — момент инерции шайбы относительно оси  $Oz$  перпендикулярной плоскости движения шайбы,  $m$  — масса шайбы,  $d = \sqrt{J_z/m}$ ,  $T_0$  — кинетическая энергия в начальный момент времени,  $Q = \sqrt{2T/m} = \sqrt{v_c^2 + d^2 \omega^2}$ .

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках гранта Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1 и при финансовой поддержке гранта РФФИ 12-01-00441.

**Свойство 0**

Предположим, что плотность нормального давления  $\sigma = \sigma(\vec{v}_c, \vec{\omega}, \vec{\rho})$  ограничена на пятне контакта. Тогда шайба произвольной формы остановится за время  $k_2 \sqrt{T_0/m} \leq gt \leq k_1 \sqrt{T_0/m}$ , причем  $T_0 - k_4 t \leq T \leq T_0 - k_3 t$ , где  $k_i$  — константы, не зависящие от начальных условий.

**Свойства 1, 2**

**Свойство 1.** Если угловая скорость шайбы в начальный момент времени равняется нулю, то движение будет поступательным.

**Свойство 2.** Знак угловой скорости  $\omega$  постоянен на любых движениях шайбы.

Отметим, что свойства 1 и 2 верны для произвольного распределения давления, более того они верны и для неоднородных шайб.

**Свойства 3–9**

Далее мы сравниваем качественные свойства движения в случаях шайбы с круглым, центрально симметричным и произвольным основанием. Шайба с круглым основанием рассматривалась в [1]. Наиболее подробный анализ задачи в предположении о линейности  $\sigma$  как функции от  $\rho_x$  и  $\rho_y$  содержится в [1].

Сформулированные ниже свойства доказаны в предположении.

**Гипотеза 4.** Шайба однородна и распределение давления — линейная функция декартовых координат:

$$\sigma = a + b\rho_x + c\rho_y,$$

где  $\vec{\rho}$  — радиус вектор данной точки контакта. Коэффициенты  $a, b$  и  $c$ , вообще говоря, зависят от скорости центра масс шайбы и ее угловой скорости. Использование линейного распределения давления по пятну контакта продиктовано тем, что это самое простое после постоянного, а также невозможностью компенсировать момент силы трения в случае  $\sigma = \text{const}$  [3].

В статье [6] проведено подробное исследование шайб с осесимметрическими, треугольными и трехточечными основаниями при том же наборе гипотез.

Далее мы покажем, что гипотезы 3 и 4 согласованы, а именно, мы найдем значения параметра  $\delta = \frac{hf}{d}$  такие, что гипотеза 3 выполнена на всех движениях.

Назовем движение шайбы особым, если на нем либо скорость центра масс, либо угловая скорость тождественно равны нулю.

Поскольку любое движение шайбы заканчивается за конечное время, все движения устойчивы по Ляпунову по теореме о непрерывной зависимости решения от начальных условий. Обсуждаемое далее свойство  $\tau$ -устойчивости более тонкое. Оно состоит в следующем.

Уравнения движения шайбы сводятся к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям в трехмерном фазовом пространстве  $P = \mathbb{R}_+ \times S^2$ . Здесь  $\mathbb{R}_+$  — положительная вещественная полуось с координатой  $Q$ , а  $S^2$  — двумерная сфера. Система диссипативна, так что за конечное время любое решение  $Q$  превращается в ноль и движение прекращается. Однако после замены времени  $mQd\tau = dt$  проекция задающего динамику векторного поля на сферу  $S^2$  теряет зависимость от  $Q$  при  $Q \rightarrow 0$  и, более того, не стремится к нулю. Полученное таким образом предельное  $U$  на  $S^2$  несет ответственность за динамику шайбы при небольших значениях энергии.

Многие важные режимы движения шайбы отвечают особым точкам поля  $U$ . Таковыми являются, в частности, особые движения: поступательные движения и чистые вращения шайбы. Устойчивость по Ляпунову таких особых точек мы называем  $\tau$ -устойчивостью соответствующих динамических режимов.

С механической точки зрения  $\tau$ -устойчивость характеризует тенденции финальной динамики: приближаются ли близкие траектории к исследуемому режиму или уходят от него.

**Свойство 10**

Для круглой шайбы в [1] рассмотрена задача о максимуме функционала длины пути, пройденного центром масс шайбы. Там показывается, что глобальным максимумом в этой задаче является прямолинейное движение. В данной работе была рассмотрена та же задача, но для центрально симметричной шайбы. Оказалось, что для сколь угодно тонкой шайбы существует такая центрально симметричная форма основания шайбы, что прямолинейное движение вдоль некоторого направления доставляет локальный минимум функционалу длины пути.

	Круглая	Центрально симметричная	Произвольной формы
3	Поступательное движение $\tau$ -неустойчиво		Поступательное движение шайбы может быть $\tau$ -устойчивым
4	Возможно чисто вращательное движение		Режима чистого вращения может не быть
5	Чистое вращение $\tau$ -неустойчиво	Построен пример, когда чистое вращение $\tau$ -устойчиво	----- -----
6	В обратном времени любое движение стремится к особому	Гипотеза: в обратном времени любое движение стремится к особому	Приведен пример, когда в обратном времени движение стремится к не особому положению равновесия
7	Если $\omega > 0$ , то траектория центра масс отклоняется вправо	Построен пример, когда $\omega > 0$ , но одни движения отклоняются вправо, а другие влево	
8	В процессе движения траектория центра масс отклоняется в одну сторону	Есть пример, когда кривизна траектории центра масс меняет знак	
9	Существует неособое решение, на котором отношение модуля скорости центра масс к угловой скорости постоянно	Построен пример обратного.	
10	Прямолинейное движение доставляет глобальный максимум функционалу длины пути, пройденного центром масс	Построен пример, когда прямолинейное движение является локальным минимумом функционала длины пути, пройденного центром масс	

## § 1. Уравнения движения

### Система координат

Введем систему координат  $Oxyz$ , жестко связанную с телом, где  $O$  — проекция центра масс тела на его основание, ось  $Oz$  перпендикулярна плоскости движения, оси  $Ox$  и  $Oy$  совпадают с главными осями инерции в точке  $O$  однородной пластинки, совпадающей с основанием шайбы. В случае однородной шайбы отсюда следуют равенства

$$\iint_D x \, dx \, dy = \iint_D y \, dx \, dy = \iint_D xy \, dx \, dy = 0. \quad (1.1)$$

Введем также удобные обозначения

$$I_{xx} = \iint_D \rho y^2 \, dx \, dy, \quad I_{yy} = \iint_D \rho x^2 \, dx \, dy, \quad (1.2)$$

где  $\rho = m/S$ , а  $S$  — это площадь основания шайбы.

Скорость точки пятна контакта по формуле Эйлера равна

$$\vec{v} = \vec{v}_c + [\vec{\omega}, \vec{\rho}],$$

где  $\vec{v}_c$  — скорость центра масс,  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$  — угловая скорость тела. Запишем силу трения  $\vec{F}$  и реакцию опоры  $\vec{F}^\sigma$ :

$$\vec{F} = -f \iint_D \sigma \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \, dS, \quad \vec{F}^\sigma = \iint_D \sigma \vec{e}_z \, dS.$$

Запишем проекции момента силы трения относительно точки  $O$  и реакции опоры на ось  $\vec{e}_z$  и на плоскость  $Oxy$ :

$$\begin{aligned} \vec{M}_z &= -f \iint_D \sigma \frac{[\vec{\rho}, \vec{v}]}{|\vec{v}|} \, dS, & \vec{M}_{xy} &= -f \iint_D \sigma \frac{[-h\vec{e}_z, \vec{v}]}{|\vec{v}|} \, dS = [-h\vec{e}_z, \vec{F}], \\ \vec{M}_z^\sigma &= \iint_D [h\vec{e}_z, \sigma \vec{e}_z] \, dS = 0, & \vec{M}_{xy}^\sigma &= \iint_D [\vec{\rho}, \sigma \vec{e}_z] \, dS, \end{aligned}$$

где  $\vec{v}$  — скорость точки пятна контакта,  $h$  — высота центра масс (половина высоты шайбы).

Сформулируем условие нормировки и компенсации моментов для  $\sigma$ :

$$\vec{F}^\sigma = \vec{N} = mg\vec{e}_z, \quad \vec{M}_{xy}^\sigma + \vec{M}_{xy} = 0. \quad (1.3)$$

Умножая векторно (1.3) на  $\vec{e}_z$ , получим

$$\vec{F} = -\frac{1}{h} \iint_D \sigma \vec{\rho} \, dS. \quad (1.4)$$

### Уравнения движения

Запишем уравнения движения:

$$m\dot{\vec{v}}_c + m[\vec{\omega}, \vec{v}_c] = \vec{F}, \quad J_z \dot{\omega} = M_z. \quad (1.5)$$

Сделаем следующую сферическую замену в уравнениях (1.5):

$$\begin{aligned} v_c^x &= Q \cos \varphi \cos \psi \\ v_c^y &= Q \cos \varphi \sin \psi, & \varphi &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \psi \in [0, 2\pi]. \\ d\omega &= Q \sin \varphi \end{aligned}$$

где  $\psi$  — угол между осью  $\vec{e}_x$  и вектором скорости центра масс  $\vec{v}_c$ .

Плотность  $\sigma$  является функцией переменных  $Q, \varphi, \psi, x, y$ . Из закона Амонтона–Кулона следует, что  $\sigma$  не зависит от  $Q$ . Для вычисления  $\sigma$  требуются дополнительные предположения о ее структуре (например, линейность по  $x, y$ ). Однако в случае центрально–симметричной шайбы можно утверждать, что  $\sigma(\varphi, -\psi, x, y) = \sigma(\varphi, \psi, -x, -y)$ . Если у основания шайбы имеется ось симметрии, то угол  $\psi$  естественно отсчитывать от этой оси и тогда  $\sigma(-\varphi, -\psi, x, y) = \sigma(\varphi, \psi, x, -y)$ . Положим

$$\begin{aligned}\vec{e}_{\parallel} &= \vec{e}_x \cos \psi + \vec{e}_y \sin \psi, & F_{\parallel} &= F_x \cos \psi + F_y \sin \psi = (\vec{F}, \vec{e}_{\parallel}), \\ \vec{e}_{\perp} &= -\vec{e}_x \sin \psi + \vec{e}_y \cos \psi, & F_{\perp} &= -F_x \sin \psi + F_y \cos \psi = (\vec{F}, \vec{e}_{\perp}).\end{aligned}$$

В частности, если шайба центрально–симметрична, то  $F_{\parallel}(\varphi, -\psi) = F_{\parallel}(\varphi, \psi)$  и  $F_{\perp}(\varphi, -\psi) = -F_{\perp}(\varphi, \psi)$ . Если имеется осевая симметрия, то  $F_{\parallel}(-\varphi, -\psi) = F_{\parallel}(\varphi, \psi)$  и  $F_{\perp}(-\varphi, -\psi) = -F_{\perp}(\varphi, \psi)$ . С учетом этих обозначений  $\dot{Q}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ :

$$\begin{aligned}m\dot{Q} &= F_{\parallel} \cos \varphi + \frac{M_z}{d} \sin \varphi, & mQ\dot{\varphi} &= -F_{\parallel} \sin \varphi + \frac{M_z}{d} \cos \varphi, \\ mQ\dot{\psi} \cos \varphi &= F_{\perp} - \frac{m}{d} Q^2 \sin \varphi \cos \varphi.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Сделаем замену времени  $mQ d\tau = dt$ ,  $d/d\tau = ()'$ . Получим

$$\begin{aligned}Q' &= Q \left( F_{\parallel} \cos \varphi + \frac{M_z}{d} \sin \varphi \right), & \varphi' &= -F_{\parallel} \sin \varphi + \frac{M_z}{d} \cos \varphi, \\ \psi' \cos \varphi &= F_{\perp} - \frac{m}{d} Q^2 \sin \varphi \cos \varphi.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Уравнения движения (1.7) допускают при  $Q \rightarrow 0$  следующие дискретные симметрии. В случае центрально–симметричной шайбы  $(\varphi, \psi) \rightarrow (\varphi, -\psi)$  и в случае осевой симметрии  $(\varphi, \psi) \rightarrow (-\varphi, -\psi)$ .

### Геометрический смысл уравнений движения

Угол  $\psi$ , который мы ввели как угол между вектором скорости и фиксированной в теле прямой, не всегда удобен. В связи с этим введем угол  $\xi$  между вектором скорости и фиксированной в абсолютном пространстве прямой. По теореме о сложении скоростей получим

$$\dot{\xi} = \dot{\psi} + \omega.$$

Пользуясь уравнениями движения (1.6), получим

$$\dot{\xi} = \frac{F_{\perp}}{mQ \cos \varphi}.$$

В переменных  $Q, \varphi, \xi$  уравнения движения (1.6) примут вид

$$m\dot{Q} = F_{\parallel} \cos \varphi + \frac{M_z}{d} \sin \varphi, \quad mQ\dot{\varphi} = -F_{\parallel} \sin \varphi + \frac{M_z}{d} \cos \varphi, \quad mQ\dot{\xi} \cos \varphi = F_{\perp}.$$

В случае  $Q \ll 1$  разница между производными  $\dot{\psi}$  и  $\dot{\xi}$  имеет порядок  $O(Q)$ . Тогда можно пренебречь последним членом в третьем уравнении системы (1.7) и считать, что  $\xi \approx \psi + \text{const}$ .

### Максимально допустимая высота шайбы в линейной модели

**Определение 1.**  $h_{\max}(\varphi, \psi)$  — максимальная высота шайбы, при которой  $\sigma(\varphi, \psi, h_{\max}) \geq 0$  на всем пятне контакта.

Заметим, что при этом прямая  $\sigma(\varphi, \psi, h_{max}) = 0$  пересекается с границей пятна контакта.

Рассмотрим частный случай – прямолинейное движение шайбы. При таком движении сила трения

$$F = -fmg(\cos \psi e_x + \sin \psi e_y). \quad (1.8)$$

Пользуясь (1.1), распишем выражение (1.4) в координатах:

$$F = -\frac{1}{h} \iint_D (xe_x + ye_y)(a + bx + cy) dS = -\frac{1}{h} \iint_D bx^2 e_x + cy^2 e_y dS = -\frac{bI_{yy} + cI_{xx}}{\rho h}. \quad (1.9)$$

Приравнивая выражения (1.8) и (1.9), находим параметры  $b, c$ , а из условий нормировки (1.3) – параметр  $a$ :

$$a = \rho g, \quad b = \frac{fmg h \rho \cos \psi}{I_{yy}}, \quad c = \frac{fmg h \rho \sin \psi}{I_{xx}}. \quad (1.10)$$

Заметим, что варьируя  $h, \psi$ , можно получить любые параметры  $b, c$ . Сформулируем и докажем следующую лемму.

**Лемма 1.** Если  $\sigma \geq 0$  на любом прямолинейном движении, то  $\sigma \geq 0$  на любом движении шайбы

**Доказательство.** Переформулируем лемму:  $\inf_{\varphi, \psi} h_{max}(\varphi, \psi) = \inf_{\psi} h_{max}(0, \psi)$ . Докажем, что для любых  $\varphi_1, \psi_1$  существует такой  $\psi_2$ , что  $h_1 = h_{max}(\varphi_1, \psi_1) \geq h_{max}(0, \psi_2)$ , из чего и будет следовать утверждение леммы. Для данного движения выпишем (1.4):

$$F_1 = -\frac{1}{h_1} \iint_D (xe_x + ye_y) \sigma_1 dS.$$

Найдем параметры  $h_2, \psi_2$  для некоторого прямолинейного движения так, чтобы  $\sigma_1$  совпало с  $\sigma_2$ , где  $\sigma_2$  – распределение давления по основанию шайбы при прямолинейном движении с параметрами  $h_2, \psi_2$ . Заметим, что  $h_2 = h_{max}(0, \psi_2)$ , так как  $\sigma_2$  совпадает с  $\sigma_1$ ; значит, на прямой  $\sigma_2 = 0$  есть точки пятна контакта, и следовательно, при увеличении  $h_2$ ,  $\sigma_2$  в этих точках станет отрицательным.

$$F_2 = -\frac{1}{h_2} \iint_D (xe_x + ye_y) \sigma_2 dS = -\frac{1}{h_2} \iint_D (xe_x + ye_y) \sigma_1 dS = F_1 \frac{h_1}{h_2}.$$

Заметим, что  $|F_1| \leq |F_2|$ ; действительно,

$$|F_1| = f \left| \iint_D \sigma_1 \frac{v}{|v|} dS \right| \leq f \iint_D \sigma_1 dS = fmg = |F_2|.$$

Откуда следует неравенство  $h_2 < h_1$ . □

Следовательно, для нахождения максимальной высоты шайбы, при которой  $\sigma \geq 0$  на любом движении, достаточно вычислить  $\inf h_{max}$  на прямолинейных движениях. Запишем  $\sigma(h)$  в произвольной точке  $(p, q)$ , получим выражение

$$\sigma(0, \psi) = \rho g \left( 1 - fmh \left( \frac{p \cos \psi}{I_{yy}} + \frac{q \sin \psi}{I_{xx}} \right) \right).$$

Найдем минимум этого выражения, получим, что  $\min_{\psi} \sigma(0, \psi) = \rho g \left( 1 - fmh \sqrt{\frac{p^2}{I_{yy}^2} + \frac{q^2}{I_{xx}^2}} \right)$ . Отсюда получим, что  $h \leq \frac{I_{xx} I_{yy}}{fm \sqrt{p^2 I_{xx}^2 + q^2 I_{yy}^2}}$ . После чего получаем выражение для  $h_{max}$

$$h_{max} = \inf_{(p,q) \in D} \frac{I_{xx} I_{yy}}{fm \sqrt{p^2 I_{xx}^2 + q^2 I_{yy}^2}}. \quad (1.11)$$

§ 2. Доказательства свойств 0–10

Доказательство свойства 0

Запишем кинетическую энергию тела  $T = \frac{1}{2}(\vec{v}_c, m\vec{v}_c) + \frac{1}{2}(\vec{\omega}, J_z\vec{\omega}) = \frac{m}{2}(v_c^2 + (d\omega)^2)$ . Взяв производную в силу системы от  $T$ , получим

$$\dot{T} = -f \iint_D \sigma |\vec{v}| dS, \quad |\vec{v}| = \sqrt{v_c^2 + \omega^2 \rho^2 + 2(v_c, [\omega, \rho])}.$$

**Лемма 2.** Пусть  $\lambda \in [0, \pi]$  – угол, удовлетворяющий равенствам

$$\cos \lambda = \frac{d^2 - \rho^2}{d^2 + \rho^2}, \quad \sin \lambda = \frac{2\rho d}{d^2 + \rho^2}. \tag{2.1}$$

Тогда

$$|\vec{v}| = \frac{Q\sqrt{d^2 + \rho^2}}{\sqrt{2}d} \sqrt{1 + \cos \lambda \cos 2\varphi - \sin \lambda \sin 2\varphi \sin \theta}, \tag{2.2}$$

где  $\theta$  – угол между вектором  $\vec{\rho}$  и  $\vec{e}_{v_c}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\vec{e}_\rho$  – единичный вектор, направленный по вектору  $\vec{\rho}$ .

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \cos \theta \vec{e}_{v_c} + \sin \theta [e_z, \vec{e}_{v_c}], \\ (\vec{e}_{v_c}, [\vec{e}_z, \vec{e}_\rho]) &= (\vec{e}_{v_c}, [\vec{e}_z, \cos \theta \vec{e}_{v_c} + \sin \theta [\vec{e}_z, \vec{e}_{v_c}]]) = \\ &= \cos \theta (\vec{e}_{v_c}, [\vec{e}_z, \vec{e}_{v_c}]) + \sin \theta \vec{e}_{v_c}, [\vec{e}_z, [\vec{e}_z, \vec{e}_{v_c}]] = -\sin \theta. \end{aligned}$$

Следовательно,  $|\vec{v}| = \sqrt{v_c^2 + \omega^2 \rho^2 - 2v_c \omega \rho \sin \theta} = Q\sqrt{\cos^2 \varphi + \rho^2 d^{-2} \sin^2 \varphi - 2\rho d^{-1} \sin 2\varphi \sin \theta}$ . Пользуясь формулами двойного угла и сделав замену (2.1), получим (2.2).  $\square$

**Лемма 3.** Пусть пятно контакта лежит в круге радиуса  $R$ . Верны следующие оценки на  $|\vec{v}|$ :

$$\frac{Q\sqrt{2}}{3} |\cos \theta| \sin \lambda \leq |\vec{v}| \leq Q \frac{R}{d} \sqrt{3}.$$

**Доказательство.** Заметим, что

$$|\vec{v}| \geq \frac{Q}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \lambda \cos^2 \theta}}.$$

Воспользуемся неравенством  $\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \geq \frac{2}{3}|x|$ ,  $x \in (0, 1)$ . Получим оценку снизу. Используя неравенства:  $|\cos \lambda \cos 2\varphi| \leq 1$  и  $|\sin \lambda \sin 2\varphi \sin \theta| \leq 1$ , получим оценку сверху:

$$|\vec{v}| = \frac{Q\sqrt{d^2 + \rho^2}}{\sqrt{2}d} \sqrt{1 + \cos \lambda \cos 2\varphi - \sin \lambda \sin 2\varphi \sin \theta} \leq \frac{Q\sqrt{d^2 + R^2}}{\sqrt{2}d} \sqrt{3} \leq Q \frac{R}{d} \sqrt{3}. \square$$

**Лемма 4.** Для некоторых постоянных  $k_1, k_2$ , не зависящих от начальных условий, выполнены следующие неравенства:  $-k_2\sqrt{T} \leq \dot{T} \leq -k_1\sqrt{T}$ .

**Доказательство.** Напомним:  $\iint_D \sigma dS = N = mg = \text{const}$ ,  $A = \sup \sigma < \infty$ . Обозначим  $\tilde{D} = D \setminus \{(x, y) : |\cos \theta| \sin \lambda < \varepsilon\}$ , где  $\varepsilon$  такое, что

$$\mu\{D \setminus \tilde{D}\} = \mu\{(x, y) \in D : |\cos \theta| \sin \lambda < \varepsilon\} < \frac{N}{2A}.$$

Оценим  $\min_{\tilde{D}} |v|$ . Имеем  $\min_{\tilde{D}} |v| = \min_{\tilde{D}} \frac{Q\sqrt{2}}{3} |\cos \theta| \sin \lambda \geq \frac{Q\sqrt{2}}{3} \varepsilon$ . Оценим снизу интеграл  $\iint_D \sigma |v| dS$ . Имеем

$$\begin{aligned} \iint_D \sigma |v| dS &\geq \min_{\tilde{D}} |v| \iint_{\tilde{D}} \sigma dS = \min_{\tilde{D}} |v| \left( \iint_D \sigma dS - \iint_{D \setminus \tilde{D}} \sigma dS \right) \geq \\ &\geq \min_{\tilde{D}} |v| \left( N - A\mu\{D \setminus \tilde{D}\} \right) \geq \frac{N}{2} \min_{\tilde{D}} |v|. \end{aligned}$$

Тогда  $\iint_D \sigma |v| dS \geq \frac{NQ}{3\sqrt{2}} \varepsilon$ . Оценим сверху интеграл  $\iint_D \sigma |v| dS$ :

$$\iint_D \sigma |v| dS \leq \max_D |v| \iint_D \sigma dS = N \max_D |v| \leq \frac{NQR\sqrt{3}}{d}.$$

Следовательно, получим  $NQ \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2}} \leq \iint_D \sigma |v| dS \leq \frac{NQR\sqrt{3}}{d}$ . Поскольку  $Q = \sqrt{\frac{2T}{m}}$ , получим:  $-k_1 \sqrt{T} \leq \dot{T} \leq -k_2 \sqrt{T} \leq 0$ , где  $k_1 = \frac{fNR\sqrt{6}}{d\sqrt{m}}$ ,  $k_2 = fN \frac{\varepsilon}{3\sqrt{m}}$ .  $\square$

Откуда и следует главное утверждение

$$\frac{d}{fR\sqrt{6}} \sqrt{\frac{T_0}{m}} = \frac{2g\sqrt{T_0}}{k_1} \leq gt \leq \frac{2g\sqrt{T_0}}{k_2} = \frac{3}{f\varepsilon} \sqrt{\frac{T_0}{m}},$$

где  $t$  — время остановки.  $\square$

### Доказательство свойства 1

Положим  $\omega = 0$ , пользуясь условием компенсации момента силы трения (1.3), распишем силу и момент трения:

$$F_{\parallel} = -f \iint_D \sigma \frac{(\vec{v}_c, \vec{e}_{\parallel})}{|\vec{v}_c|} dS = -fN, \quad F_{\perp} = -f \iint_D \sigma \frac{(\vec{v}_c, \vec{e}_{\perp})}{|\vec{v}_c|} dS = 0, \quad (2.3)$$

$$M_z = -f \iint_D \sigma \frac{(\vec{e}_z, [\vec{\rho}, \vec{v}_c])}{|\vec{v}_c|} dS = f \iint_D \sigma (\vec{\rho}, \vec{e}_{\perp}) dS = f (\vec{e}_{\perp}, \iint_D \sigma \vec{\rho} dS). \quad (2.4)$$

Подставим условие на моменты (1.4) в (2.4):

$$M_z \stackrel{(2.4)}{=} f (\vec{e}_{\perp}, \iint_D \sigma \vec{\rho} dS) \stackrel{(1.4)}{=} -f (\vec{e}_{\perp}, h\vec{F}) = -fhF_{\perp}. \quad (2.5)$$

Рассмотрим уравнения движения (1.7), откуда

$$mQ\dot{\varphi}|_{\varphi=0} \stackrel{(1.7)}{=} \frac{M_z}{d} \stackrel{(2.5)}{=} -\frac{fh}{d} F_{\perp} \stackrel{(2.3)}{=} 0.$$

Следовательно поверхность  $\{\varphi = 0\}$  инвариантна в фазовом пространстве, при произвольном  $\sigma$ , компенсирующем момент силы трения.  $\square$

### Доказательство свойства 2

Это свойство является следствием свойства 1 и теоремы существования и единственности.  $\square$



**Доказательство свойства 3**

В окрестности экватора на сфере  $\{\varphi = 0\}$  распишем, пользуясь формулами (1.1), условие компенсации моментов (1.4) и условие нормировки (1.3) с точностью до линейных членов

$$\sigma = a + bx + cy, \quad a = a(\varphi, \psi), \quad b = b(\varphi, \psi), \quad c = c(\varphi, \psi),$$

$$\iint_D \rho g dS = \iint_D \sigma dS = \iint_D (a + bx + cy) dx dy = \iint_D a dS,$$

$$F_x = -f \iint_D \sigma \frac{(\vec{v}, \vec{e}_x)}{|\vec{v}|} dS = -f \iint_D \left( a \cos \psi - b\varphi \frac{x^2 \cos \psi \sin \psi}{d} - c\varphi \frac{y^2 \sin^2 \psi}{d} \right) dx dy + O(\varphi^2),$$

$$F_y = -f \iint_D \sigma \frac{(\vec{v}, \vec{e}_y)}{|\vec{v}|} dS = -f \iint_D \left( a \sin \psi + b\varphi \frac{x^2 \cos^2 \psi}{d} + c\varphi \frac{y^2 \cos \psi \sin \psi}{d} \right) dx dy + O(\varphi^2).$$

С другой стороны, из (1.4) получим

$$F_x = -\frac{1}{h} \iint_D \sigma x dx dy = -\frac{1}{h} \iint_D bx^2 dx dy, \quad F_y = -\frac{1}{h} \iint_D \sigma y dx dy = -\frac{1}{h} \iint_D cy^2 dx dy.$$

Откуда получим

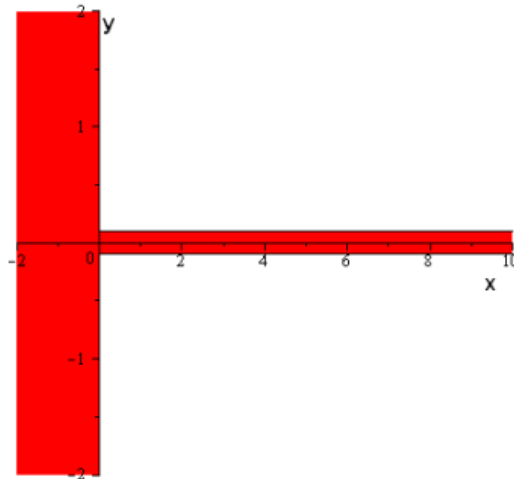
$$a = \rho g, \quad b = \frac{mghf\rho}{dI_{yy}} (d \cos \psi - \varphi h f \sin \psi), \quad c = \frac{mghf\rho}{dI_{xx}} (d \sin \psi + \varphi h f \cos \psi),$$

$$M_z = \varphi \frac{gf}{d} (-I_{xx} \sin^2 \psi - I_{yy} \cos^2 \psi + mh^2 f^2 + \Lambda) + O(\varphi^2), \quad (2.6)$$

$$\varphi' = \varphi \frac{gf}{d^2} (I_{xx} \cos^2 \psi + I_{yy} \sin^2 \psi + mh^2 f^2 + \Lambda) + O(\varphi^2),$$

$$\psi' = -\varphi \frac{m}{d} (hgf^2 + Q^2) + O(\varphi^2),$$

где  $\Lambda = \iint_D (p_1 x + q_1 y) x^2 dS + \iint_D (p_2 x + q_2 y) y^2 dS, \quad d = \sqrt{\frac{I_{xx} + I_{yy}}{m}}.$



**Рис. 1.** Пример тела, у которого на экваторе существуют  $\tau$ -устойчивые положения равновесия

Пусть шайба центрально симметрична. Тогда  $\Lambda$  равно нулю, следовательно, в окрестности экватора  $\{\varphi = 0\}$  уравнения (2.6) примут вид

$$\varphi' = K(\psi) \varphi + O(\varphi^2), \quad \psi' = -C(Q) \varphi + O(\varphi^2), \quad (2.7)$$

где  $K(\psi), C(Q) > 0$  для любого  $\psi$ . Из этого следует, что любая точка экватора, которая по свойству 1 является положением равновесия,  $\tau$ -неустойчива.  $\square$

Это свойство грубое: малые деформации тела не сделают это положение равновесия устойчивым.

**Пример к свойству 3.** Приведем пример не центрально симметричного тела, для которого при некоторых  $\psi$  положение равновесия ( $\varphi = 0, \psi$ )  $\tau$ -устойчиво при некоторых  $\psi$ . А именно, на экваторе  $\varphi = 0$  будет существовать целый отрезок, состоящий из устойчивых положений равновесия.

При  $hf = 0, 3$ , в окрестности  $\psi = 0$  получим, что

$$I_{xx} \cos^2 \psi + I_{yy} \sin^2 \psi + (hf)^2 m + \Lambda \approx -5.5.$$

Тем самым, в окрестности  $\psi = 0, \varphi = 0$  уравнения (2.6) примут вид (2.7), где  $K(\psi)|_{\psi=0} < 0$ . Откуда следует, что будет существовать отрезок  $\varphi = 0, \psi = [-\varepsilon, \varepsilon]$   $\tau$ -устойчивых положений равновесия. При этом на любом движении на пятне контакта  $\sigma > 0, 055$ . Поток на сфере в окрестности точки  $\varphi = 0, \psi = 0$  выглядит следующим образом:

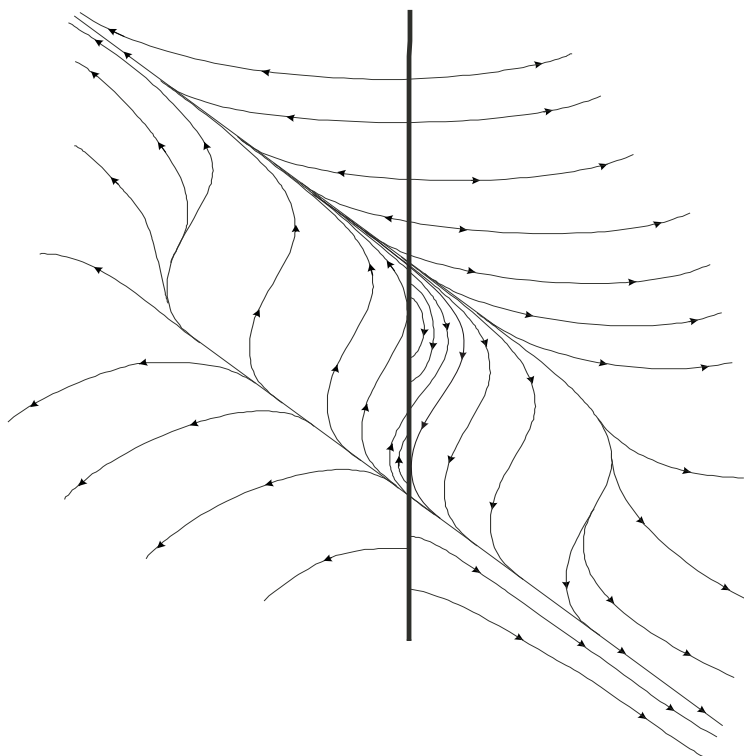


Рис. 2. Поток на сфере для тела с рисунка 1. Жирная линия обозначает кусок экватора  $\{\varphi = 0\}$

#### Доказательство свойства 4

Запишем уравнения движения (1.6) в точке  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ .

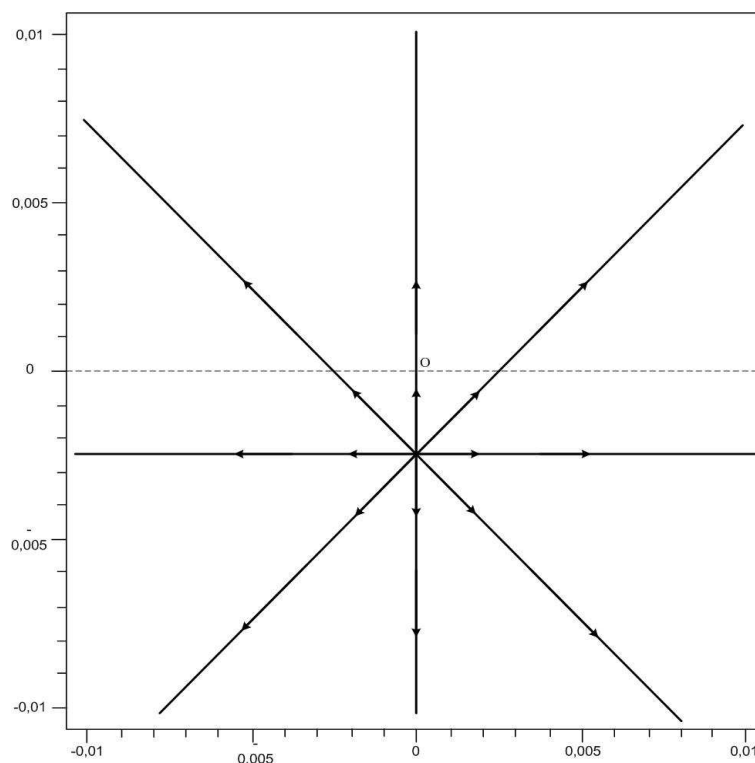
$$mQ\dot{\varphi}|_{\varphi=\pm\frac{\pi}{2}} \stackrel{(1.7)}{=} \pm F_{\parallel} = \mp f \iint_D \sigma \frac{[\vec{\omega}, \vec{\rho}]}{\omega \rho} dS = \mp f \iint \sigma \rho \sin(\psi - \theta) d\rho d\theta. \quad (2.8)$$

Для центрально симметричных тел из соотношения на моменты (1.4) при  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  получим, что  $b = 0, c = 0$ , то есть  $\sigma = \text{const}$ . Тогда из выражения (2.8) получим, что  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  — особое движение для центрально симметричных тел.  $\square$

**Пример к свойству 4.** Приведем пример, когда для тел произвольной формы это несправедливо. Рассмотрим цилиндр с основанием в виде равнобедренного треугольника. В окрестности  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  введем полярные координаты  $r, u$ :

$$\varphi = \operatorname{arctg} r, \quad \psi = u.$$

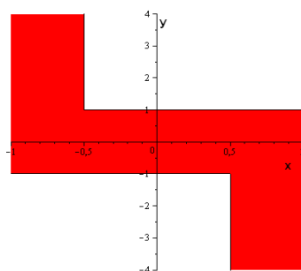
В них локальный фазовый портрет при  $h = 0$  и  $Q \rightarrow 0$  будет такой:



**Рис. 3.** Поток на сфере в полярных координатах для шайбы с основанием в виде равнобедренного треугольника

### Пример к свойству 5

Приведем пример центрально симметричного тела, для которого положение равновесия  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  будет  $\tau$ -устойчиво в некоторой окрестности  $h = 0$ .



**Рис. 4.** Форма тела, у которого положение равновесия  $\varphi = \frac{\pi}{2}$   $\tau$ -устойчиво

Поток на сфере выглядит следующим образом:

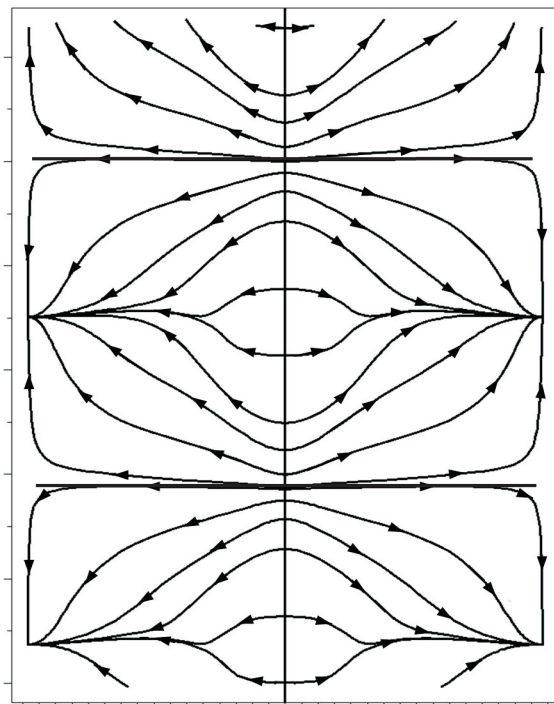


Рис. 5. Поток на сфере для тела с рисунка 4

В полярных координатах при  $h = 0$  фазовый портрет будет такой:

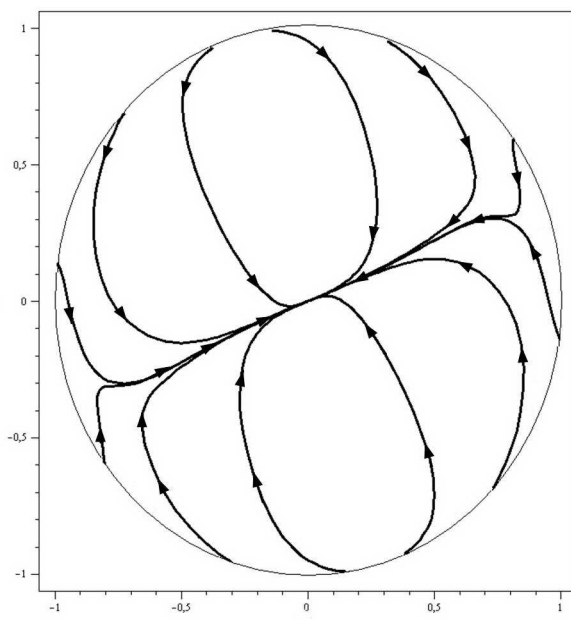


Рис. 6. Поток на сфере в полярных координатах для тела с рисунка 4

■

#### Доказательство свойства 6

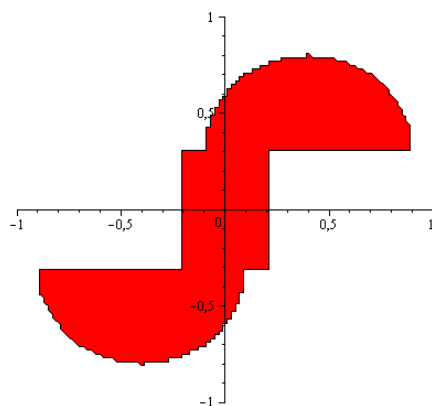
Малая деформация шайбы может немного подвинуть исходное положение равновесия  $\varphi = 0$  для круглой шайбы, не сделав его  $\tau$ -устойчивым. Следовательно, в обратном времени, в некоторой окрестности нового положения равновесия движения будут стремиться к нему, а не к особому. В качестве примера рассмотрим рисунок 3 из свойства 4, на нем видно, что в обратном времени траектории не стремятся к особым. □

**Доказательство свойства 7**

Свойство 7 равносильно тому, что  $\operatorname{sgn} \dot{\xi} = -\operatorname{sgn} \omega$ . Все вышеприведенные примеры свидетельствуют о том, что  $\operatorname{sgn} \dot{\xi}' \neq -\operatorname{sgn} \omega$ , но лучше всего это видно на рисунке 5.  $\square$

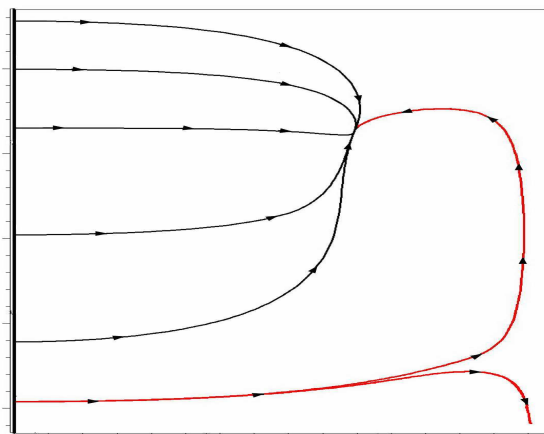
**Доказательство свойства 8**

Приведем пример центрально симметричного тела, для которого траектория центра масс в процессе движения отклоняется в разные стороны:



**Рис. 7.** Пятно контакта тела, для которого траектория центра масс в процессе движения отклоняется в разные стороны

Векторный поток на сфере для такого тела при  $h = 0$  выглядит следующим образом:



**Рис. 8.** Поток на сфере для тела с рисунка 7

Здесь красными линиями отмечены траектории, на которых  $\dot{\xi}'$  сначала больше нуля, а потом становится меньше.  $\blacksquare$

**Доказательство свойства 9**

Пример такого поведения хорошо виден на рисунке 5.  $\square$

**Доказательство свойства 10**

Рассмотрим функционал длины пути  $L$ , где  $|v_c|$  — скорость центра масс:

$$L = \int_0^{\infty} |v_c| dt.$$

Сделаем замену переменной  $t \mapsto T(t)$ , где  $T(t)$  — кинетическая энергия в момент  $t$ :

$$L = \int_{T_0}^0 \frac{|v_c|}{\dot{T}(t)} dT.$$

В случае круглой шайбы прямолинейное движение доставляет минимум подинтегральному выражению при любом  $t$ . Построим пример центрально симметричного основания шайбы, при котором прямолинейное движение вдоль некоторого направления доставляло бы максимум подинтегральному выражению при любом  $t$ . Для этого воспользуемся формулами полученными при доказательстве свойства 0 и свойства 3, для того чтобы расписать подинтегральное выражение в окрестности прямолинейного движения  $\{\varphi = 0\}$ . Также все формулы будем писать в предположении того, что основание шайбы является центрально симметричным.

$$\frac{\dot{T}}{|v_c|} = -f \iint_D \sigma \frac{|v|}{|v_c|} dS = -fg \left( m + \frac{\varphi^2}{d^2} \left( \frac{I_{xx} \sin^2 \psi + I_{yy} \cos^2 \psi}{2} - mh^2 f^2 \right) \right) + O(\varphi^2). \quad (2.9)$$

Из выражения (2.9) видно, что прямолинейное движение является экстремалью. Коэффициент при  $\varphi^2$  в выражении (2.9) равен

$$-fg \frac{I_{xx} \sin^2 \psi + I_{yy} \cos^2 \psi - 2mh^2 f^2}{2d^2}. \quad (2.10)$$

При достаточно большом  $h$  выражение (2.10) будет отрицательно, то есть  $\{\varphi = 0\}$  будет локальным минимумом выражения (2.9). Рассмотрим шайбу, основание которой представляет из себя четыре окружности радиусом  $\lambda$  с центрами в точках  $(\pm 1, \pm \lambda)$ , где  $\lambda \ll 1$ . Параметры этого основания такие:

$$m = 4\pi\lambda^2\rho, \quad I_{xx} = 5\lambda^2m, \quad I_{yy} = 4m + m\lambda^2.$$

Подставим их в выражение (2.10) и выразим из него  $h$ , а также выпишем условия того, что нашу шайбу можно катать в любом направлении (1.11):

$$\frac{\lambda}{f} \sqrt{\frac{5}{2}} \leq \frac{1}{f\sqrt{2}} \sqrt{4\cos^2 \psi + 4\lambda^2 \sin^2 \psi + \lambda^2} \leq h \leq \frac{5\lambda(4 + \lambda^2)}{f\sqrt{29\lambda^4 + 50\lambda^3 + 57\lambda^2 + 64}}.$$

Заметим, что при  $\lambda < 1$  левая часть неравенства меньше правой. А левая часть может быть сколь угодно малой. Следовательно, для сколь угодно тонкой шайбы существует форма основания, при котором некоторое прямолинейное движение будет доставлять локальный максимум подинтегральному выражению, а следовательно, локальный минимум функционалу длины пути.  $\square$

Авторы выражают благодарность профессору Д. В. Трещеву за привлечение внимания к этой задаче, а также за полезные обсуждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сальникова Т.В., Трещев Д.В., Галлямов С.Р. Движение свободной шайбы по шероховатой горизонтальной плоскости // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 1. С. 83–101.
2. Farkas Z., Bartels G., Unger T., Wolf D. Frictional coupling between sliding and spinning motion // Phys. Rev. Letters. 2003. Vol. 90. № 24. P. 248–302.
3. Иванов А.П. Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твердого тела // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 2. С. 189–203.
4. Розенблат Г.М. Об интегрировании уравнений движения тела, опирающегося на шероховатую плоскость тремя точками // Доклады академии наук. Механика. 2010. Т. 435. № 4. С. 475–478.
5. Field P. On the motion of a disk with three supports on a rough plane // Phys. Rev. (Series I). 1912. Vol. 35. P. 177–184.
6. Трещев Д.В., Ермакова Н.Н., Иванова Т.Б. О финальном движении цилиндрических тел по шероховатой плоскости // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 3. С. 585–603.

Поступила в редакцию 15.09.2012

Бурлаков Даниил Сергеевич, студент, кафедра теоретической механики и мехатроники, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1.  
E-mail: burlada@mail.ru

Сеславина Анна Андреевна, студентка, кафедра теоретической механики и мехатроники, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1.  
E-mail: annasesl@gmail.com

***D. S. Burlakov, A. A. Seslavina***  
**On free movement of puck on horizontal plane**

*Keywords:* dry friction, Amontons–Coulomb law, puck, final dynamics, stability.

Mathematical Subject Classifications: 70F40, 70F35, 70E18

We consider the problem of a homogeneous direct cylinder of an arbitrary form (a puck) sliding on a horizontal surface under the action of dry friction forces. The surface contact spot of the cylinder coincides with its base. One of the central hypotheses in the work is the choice of a mathematical model of interaction between a small surface element of a puck and a plane. It is assumed, that the current effect is described by the Amontons–Coulomb’s law of friction. In the present work the basic attention is given to the qualitative analysis of the equations of motion for systems, the one which allow to describe dynamics at small values of the system’s kinetic energy (final dynamics). Qualitative properties of dynamics for arbitrary pucks are formulated and proved. We present examples illustrating the difference in final dynamics for pucks with round, centrosymmetrical and arbitrary bases on a rough surface.

#### REFERENCES

1. Sal’nikova T.V., Treschev D.V., Gallyamov S.R. On the motion of free disc on the rough horizontal plane, *Nelineinaya Dinamika*, 2012, vol. 8, no. 1, pp. 83–101.
2. Farkas Z., Bartels G., Unger T., Wolf D. Frictional coupling between sliding and spinning motion, *Phys. Rev. Letters*, 2003, vol. 90, no. 24, pp. 248–302.
3. Ivanov A.P. Dynamic collaborative model of contact stress at the plane motion of a rigid body, *Prikl. Mat. Mekh.*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 189–203.
4. Rosenblat G.M. On the integration of the equation of motion of the body, based on a rough plane by three points, *Doklady Akademii Nauk, Mekhanika*, 2010, vol. 435, no. 4, pp. 475–478.
5. Field P. On the motion of a disk with three supports on a rough plane, *Phys. Rev. (Series I)*, 1912, vol. 35, pp. 177–184.
6. Treschev D.V., Erdakova N.N., Ivanova T.B. On the final movement of cylindrical bodies on a rough plane, *Nelineinaya Dinamika*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 585–603.

Received 15.09.2012

Burlakov Daniil Sergeevich, student, Department of Theoretical Mechanics and Mechatronics, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991, Russia.  
E-mail: burlada@mail.ru

Seslavina Anna Andreevna, student, Department of Theoretical Mechanics and Mechatronics, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991, Russia.  
E-mail: annasesl@gmail.com