УДК 517.972.8

© *А. Г. Ченцов*

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВ ПРИТЯЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОСТРАНСТВА СТОУНА [1]

Рассматривается конструкция расширения абстрактной задачи о достижимости, реализуемая с использованием компакта Стоуна (пространство ультрафильтров алгебры множеств в традиционном оснащении). Исследуются вопросы, связанные с построением множеств притяжения; последние определяют возможности в части достижимости желаемых состояний в топологическом пространстве при использовании асимптотических аналогов обычных решений. Предполагаются заданными ограничения асимптотического характера, которые, в частности, могут возникать при ослаблении стандартных ограничений, используемых в задачах управления (естественным прототипом исследуемой абстрактной задачи может служить задача о построении асимптотического аналога области достижимости управляемой системы при исчезающе малом ослаблении тех или иных ограничений на выбор программного управления). Используя естественную модификацию подхода Дж. Варги, можно ввести наряду с точными так называемые приближенные решения в виде последовательностей обычных решений, соблюдающих с «нарастающей точностью» условия, составляющие в своей совокупности «асимптотические ограничения». В ряде случаев таких (секвенциальных) приближенных решений оказывается недостаточно. Требуются направленности или фильтры. Последние используются в настоящей работе в качестве основного типа (асимптотических по существу) решений при построении множеств притяжения в задачах о достижимости с ограничениями асимптотического характера; более того, в этих построениях удается ограничиться использованием ультрафильтров. Для одного частного случая на этой основе установлена конкретная структура множества притяжения.

Ключевые слова: ультрафильтр, множество притяжения, ограничения асимптотического характера.

Введение

Основные сокращения: ИП (измеримое пространство), МП (множество притяжения), п/м (подмножество), ТП (топологическое пространство), у/ф (ультрафильтр).

В статье рассматривается абстрактная задача о достижимости в ТП при наличии ограничений асимптотического характера. Такие ограничения могут, в частности, возникать в задачах теории управления и математического программирования при последовательном ослаблении стандартных ограничений; они могут, однако, возникать и изначально, определяя ту или иную тенденцию при формировании решений (управлений). Так, в задачах импульсного управления могут представлять интерес режимы, в которых (при мощной энергетике) импульс управления реализуется в течение исчезающе малого промежутка времени.

В случае, когда ограничения асимптотического характера соответствуют ослаблению стандартных ограничений (например, фазовых ограничений в задачах управления), нередко возникает скачкообразное изменение достигаемого качества — отсутствует устойчивость по результату при ослаблении ограничений. Однако данная особенность (отсутствие вышеупомянутой устойчивости) представляется, как это ни странно на первый взгляд, полезной, поскольку получающиеся скачки отвечают расширению наших возможностей, а это позволяет достигать лучших результатов. Поэтому представляют интерес режимы, обеспечивающие соблюдение ограничений «на грани фола» (имеется в виду соблюдение условий с высокой, но все же конечной степенью точности). Формализация таких режимов может осуществляться посредством

[1]Работа выполнена в рамках программ фундаментальных исследований Президиума РАН (проекты 09–П–1–1007, 09–П–1–1014) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09–01–00436, 10–01–96020, 10–01–00356).

«асимптотических ограничений», поскольку степень конкретного ослабления ограничений исходной задачи на определенных этапах исследования зачастую указать невозможно. В [1, гл. III] рассматриваются точные, обобщенные и приближенные решения (задач управления); последние определяются секвенциально, т.е. в виде последовательностей обычных решений. При этом в [1] удалось удачно определить свойство допустимости в асимптотическом смысле (в [1] накладывались также некоторые несущественные для рассматриваемой ниже задачи дополнительные условия). Отметим, что конструкции, использующие аналоги секвенциальных приближенных приближенных решений широко использовались в работах Н. Н. Красовского и его учеников (см. [2–4]), связанных с исследованием дифференциальных игр; это нашло свое отражение в формализации Н. Н. Красовского, в рамках которой была установлена фундаментальная теорема об альтернативе (см. [2]).

Возможна, однако, ситуация, когда секвенциальная природа приближенных решений существенно ограничивает возможности в вопросах достижимости. Это обстоятельство отмечалось в виде замечаний в [5, 6] для задач математического программирования (подобные примеры можно построить и для задач управления). В упомянутой ситуации естественно использовать те или иные несеквенциальные аналоги приближенных решений [1]. По ряду причин оказывается удобным использовать в этом качестве фильтры и, в частности, у/ф (для целей представления элементов притяжения применимы также направленности в пространстве обычных решений; осложнения возникают при рассмотрении совокупностей направленностей нужного типа в виде множеств). На этой основе удается, кстати, отождествить для целого класса практически интересных задач соответствующие аналоги приближенных и обобщенных решений [1]. Возникает, однако, проблема конструктивного описания у/ф нужного типа (поскольку для всех наших целей достаточны у/ф, мы ограничимся обсуждением только этого типа решений), а именно: свободных у/ф (у/ф с пустым пересечением всех своих множеств). Данные у/ф и только они ответственны за варианты асимптотического поведения, нереализуемые в классе обычных решений. Между тем эти у/ф «невизуализируемы»: их явное описание отсутствует, а существование и свойства устанавливаются с использованием леммы Цорна; при этом имеются в виду у /ф семейства всех п/м пространства обычных решений. Ситуация, однако, исправляется для некоторых классов ИП при использовании у/ф соответствующего семейства измеримых множеств. Один из таких классов рассматривается в настоящей работе: речь идет об отрезке вещественной прямой с алгеброй множеств, порожденной семейством всех промежутков (открытых, полуоткрытых и замкнутых), содержащихся в упомянутом отрезке. Для данного ИП удается получить исчерпывающее описание множества всех у/ф, включая свободные у/ф, получая в традиционном оснащении этого множества топологией пространство Стоуна, являющееся нульмерным компактом (см. [7]; в связи с исследованиями конкретных классов компактов Стоуна отметим, в частности, работы [8, 9], в которых рассматриваются вопросы, связанные с расширением Белла [10]). Для упомянутого варианта ИП, точки которого рассматриваются в качестве обычных решений, исследуется задача о достижимости в ТП, являющемся тихоновской степенью ТП, метризуемого полной метрикой.

§ 1. Общие понятия и обозначения

Используем кванторы и пропозициональные связки; def заменяет фразу «по определению» , $\triangleq$ — равенство по определению; как обычно, $\exists\,!$ следует читать: существует и единственно. Принимаем аксиому выбора. Через $\{x\}$, где x — произвольный объект, обозначаем одноэлементное множество, содержащее этот объект x. Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X. Если A и B — множества, то через B^A обозначается множество всех отображений, действующих из A в B (при $f \in B^A$ используем традиционное выражение $f : A \longrightarrow B$); если при этом $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ множества C при действии f. Рассматриваем также образы семейств (здесь и ниже семейством называем множество, все элементы которого — множества): если X и Y — множества, $f \in Y^X$ и $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$, то

$$f^1[\mathcal{X}] \triangleq \{f^1(\mathbb{X}) : \mathbb{X} \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y)) \tag{1.1}$$

интерпретируем как образ семейства $\mathcal{X}$ при действии f.

Элементы топологии. Через $(\mathrm{top})[X]$ обозначаем множество всех топологий множества X, $(\mathrm{top})[X] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$. Если $\tau \in (\mathrm{top})[X]$ и $x \in X$, то семейство $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$ порождает фильтр [11, гл. I] $N_\tau(x) \triangleq \{S \in \mathcal{P}(X) \mid \exists\, G \in N_\tau^0(x) : G \subset S\}$ окрестностей x в ТП (X, τ); наконец, $(x - \mathrm{bas})[\tau] \triangleq \{\mathcal{H} \in \mathcal{P}(N_\tau(x)) \mid \forall\, A \in N_\tau(x)\ \exists\, B \in \mathcal{H} : B \subset A\}$ есть множество всех локальных баз ТП (X, τ) в точке x. Полагаем, что

$$(\mathrm{clos})[X] \triangleq \Big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) \mid (\varnothing \in \mathcal{F})\&(I \in \mathcal{F})\&(A \cup B \in \mathcal{F}\ \ \forall\, A \in \mathcal{F}\ \forall\, B \in \mathcal{F})$$
$$\& \Big(\bigcap_{F \in \mathcal{F}'} F \in \mathcal{F}\ \forall\, \mathcal{F}' \in \mathcal{P}'(\mathcal{F})\Big)\Big\},$$

получая множество всех замкнутых топологий (см. [12, с. 98–99]) множества X; тогда семейства $(\mathrm{top})[X]$ и $(\mathrm{clos})[X]$ находятся в двойственности, устанавливаемой посредством оператора $\mathbf{C}_X :$ $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) \longrightarrow \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$, для которого $\mathbf{C}_X(\mathcal{X}) \triangleq \{X \setminus J : J \in \mathcal{X}\}\ \ \forall\, \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(J))$. При этом $\mathbf{C}_X(\tau) \in (\mathrm{clos})[X]$ при $\tau \in (\mathrm{top})[X]$ и $\mathbf{C}_X(\mathcal{F}) \in (\mathrm{top})[X]$ при $\mathcal{F} \in (\mathrm{clos})[X]$. Пусть

$$(\mathcal{D} - \mathrm{top})[X] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[X] \mid \forall\, x_1 \in X\ \forall\, x_2 \in X \setminus \{x_1\}\ \exists\, H \in N_\tau(x_1) : x_2 \notin H\},$$

$$(\mathrm{top})_0[X] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[X] \mid \forall\, x_1 \in X\ \forall\, x_2 \in X \setminus \{x_1\}$$
$$\exists\, H_1 \in N_\tau(x_1)\ \exists\, H_2 \in N_\tau(x_2) : H_1 \cap H_2 = \varnothing\},$$

$$(\mathbf{r} - \mathrm{top})[X] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[X] \mid N_\tau(x) \cap \mathbf{C}_X(\tau) \in (x - \mathrm{bas})[\tau]\ \ \forall\, x \in X\}$$

(введены топологии, превращающие X в достижимое [13, с. 191], хаусдорфово и регулярное [14, с. 154] ТП соответственно); топологии из множества

$$(\mathbf{top})[X] \triangleq (\mathcal{D} - \mathrm{top})[X] \cap (\mathbf{r} - \mathrm{top})[X] = (\mathrm{top})_0[X] \cap (\mathbf{r} - \mathrm{top})[X] \tag{1.2}$$

превращают X в T_3-пространство (см. [14, с. 154]). Если (X, r), $X \neq \varnothing$, есть метрическое пространство, то топология X, порождаемая [13, с. 222] метрикой r, содержится в множестве (1.2). Если $\tau \in (\mathrm{top})[X]$ и $A \in \mathcal{P}(X)$, то $\mathrm{cl}(A, \tau)$ есть def замыкание [11–14] A в ТП (X, τ).

Специальные отображения. В пределах настоящего пункта фиксируем непустые множества X и Y. Тогда

$$C(X, \tau_1, Y, \tau_2) \triangleq \{f \in Y^X \mid f^{-1}(G) \in \tau_1\ \ \forall\, G \in \tau_2\}\ \ \forall\, \tau_1 \in (\mathrm{top})[X]\ \forall\, \tau_2 \in (\mathrm{top})[Y].$$

Тем самым введены непрерывные отображения. Потребуются также отображения ярусные [15] (в дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая; $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ и $\overline{1,n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant n\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$). Если $\mathcal{X}$ — алгебра п/м X, то через $B_0(X, \mathcal{X}, Y)$ обозначаем множество всех отображений $f \in Y^X$, для каждого из которых существует $n \in \mathbb{N}$, а также кортежи $(y_i)_{i \in \overline{1,n}} : \overline{1,n} \longrightarrow Y$ и $(L_i)_{i \in \overline{1,n}} : \overline{1,n} \longrightarrow \mathcal{X}$ такие, что

$$\big(f(x) = y_j\ \ \forall\, j \in \overline{1,n}\ \forall\, x \in L_j\big)\ \&\ \Big(X = \bigcup_{i=1}^{n} L_i\Big)\ \&\ \big(L_p \cap L_q = \varnothing\ \ \forall\, p \in \overline{1,n}\ \forall\, q \in \overline{1,n} \setminus \{p\}\big).$$

Тем самым введено множество всех ступенчатых отображений из $(X, \mathcal{X})$ в Y. Фиксируем до конца настоящего пункта алгебру $\mathcal{X}$ п/м X, а также метрику $r : Y \times Y \longrightarrow [0, \infty[$ на множестве Y; для обозначения равномерной в смысле (Y, r) сходимости в Y^X используем символ

$\overset{r}{\rightrightarrows}$ (речь идет о сходимости последовательностей в Y^X к отображению из Y^X). Тогда через $B(X, \mathcal{X}, Y, r)$ обозначаем множество всех отображений $f \in Y^X$, для каждого из которых существует последовательность $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow B_0(X, \mathcal{X}, Y)$ со свойством $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \overset{r}{\rightrightarrows} f$. Отображения из $B(X, \mathcal{X}, Y, r)$ называем ярусными, имея в виду аналогию с вещественнозначными функциями, рассматриваемыми в [16] (см. также [17, гл. 2]). Для дальнейших построений важен случай, когда (Y, r) — полное метрическое пространство.

Фильтры и базы фильтров. В пределах настоящего пункта фиксируем непустое множество I. Тогда через $\beta_0[I]$ обозначаем множество всех семейств $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(I))$ таких, что $\forall B_1 \in \mathcal{B}\, \forall B_2 \in \mathcal{B}\, \exists B_3 \in \mathcal{B} :\ B_3 \subset B_1 \cap B_2$ (введены базы фильтров в I). При этом

$$\mathfrak{F}[I] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(I)) \mid (A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F})\ \&\ (\forall F \in \mathcal{F}\ \forall H \in \mathcal{P}(I)\\ (F \subset H) \Longrightarrow (H \in \mathcal{F}))\}$$

есть [11, гл. I] множество всех фильтров, а $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}[I] \mid \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[I]\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\}$ — множество всех у/ф в I. Как обычно [11, гл. I], определяем фильтры посредством баз, полагая

$$(I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \stackrel{\triangle}{=} \{F \in \mathcal{P}(I) \mid \exists B \in \mathcal{B} :\ B \subset F\} \in \mathfrak{F}[I]\ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[I]. \tag{1.3}$$

Разумеется, $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \subset \mathfrak{F}[I] \subset \beta_0[I]$. Если $\tau \in (\mathrm{top})[I]$, $\mathcal{B} \in \beta_0[I]$ и $x \in I$, то, следуя [11, гл. I], полагаем, что

$$\left(\mathcal{B} \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x\right) \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (N_\tau(x) \subset (I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}])\,. \tag{1.4}$$

Посредством (1.4) определена, в частности, сходимость фильтров. Среди всевозможных у/ф в I выделяются тривиальные (отождествляемые с точками I):

$$(I - \mathrm{ult})[x] \stackrel{\triangle}{=} \{F \in \mathcal{P}(I) \mid x \in F\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]\ \ \forall x \in I. \tag{1.5}$$

Фиксируем до конца настоящего раздела алгебру $\mathcal{I}$ п/м множества I, получая ИП $(I, \mathcal{I})$; тогда [18, 19]

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \stackrel{\triangle}{=} \{\ \mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\ \&\ (\ A \cap B \in \mathcal{F}\ \ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F})\ \&\ (\forall F \in \mathcal{F}\ \forall L \in \mathcal{I}\\ (F \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{F}))\} \tag{1.6}$$

есть множество всех фильтров в $(I, \mathcal{I})$, а

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \stackrel{\triangle}{=} \{\ \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\}$$

есть множество всех у/ф в $(I, \mathcal{I})$, $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \neq \varnothing$. Множество свободных у/ф в $(I, \mathcal{I})$ имеет вид

$$\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{I}) \stackrel{\triangle}{=} \left\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \mid \bigcap_{L \in \mathcal{U}} L = \varnothing\right\}.$$

Пусть $\Phi_{\mathcal{I}}(L) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \mid L \in \mathcal{U}\}\ \ \forall L \in \mathcal{I}$. Тогда семейство $(\mathbb{UF})[I; \mathcal{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{I}}(L) :\ L \in \mathcal{I}\}$ есть база топологии $\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[I] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})]$, превращающей $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})$ в компакт (пространство Стоуна)

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}), \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[I]), \tag{1.7}$$

для которого $(\mathbb{UF})[I; \mathcal{I}]$ совпадает с семейством всех п/м $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})$, открыто-замкнутых в ТП (1.7). Тогда, в частности,

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}|\mathcal{H}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \mid \mathcal{H} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} \Phi_{\mathcal{I}}(H) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})}(\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[I])\ \ \forall \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}). \tag{1.8}$$

С учетом компактности ТП (1.7) имеем из (1.8), что каждое из множеств $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}|\mathcal{H})$, $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I})$, компактно в ТП (1.7).

Для последующих построений понадобятся базы фильтров, содержащиеся в $\mathcal{I}$; $\beta^0_{\mathcal{I}}[I] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \beta_0[I] \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{I}\}$ есть множество всех таких баз. Как легко видеть,

$$(I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{I}] \stackrel{\triangle}{=} (I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \cap \mathcal{I} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \ \ \forall \mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{I}}[I]. \tag{1.9}$$

Условимся о соглашении: $(\mathcal{J} - \mathrm{set})[I|\mathcal{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{I} \mid L \cap J \neq \varnothing \ \ \forall J \in \mathcal{J}\} \ \ \forall \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$. Тогда, как легко видеть [19], справедливо следующее представление множества всех баз у/ф в $(I, \mathcal{I})$:

$$\beta^{00}_{\mathcal{I}}[I] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{I}}[I] \mid (\mathbf{I} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{I}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})\big\} = \{\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{I}}[I] \mid \\ \forall L \in (\mathcal{B} - \mathrm{set})[I|\mathcal{I}] \ \exists B \in \mathcal{B} : \ B \subset L\}.$$

С учетом этого в [19] было найдено описание $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})$ для одного конкретного случая ТП (1.7), которое будет использовано в дальнейшем.

Легко видеть, что $((I, \mathcal{I}) - \mathrm{ult})[x] \stackrel{\triangle}{=} (I - \mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{I} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \ \ \forall x \in I$. С учетом данного свойства определяется правило $((I, \mathcal{I}) - \mathrm{ult})[\cdot] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})^I$ вида

$$x \longmapsto ((I, \mathcal{I}) - \mathrm{ult})[x] : \ I \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}); \tag{1.10}$$

(1.10) реализует погружение I в компакт (1.7) в виде всюду плотного [7] п/м:

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) = \mathrm{cl}(((I, \mathcal{I}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(I), \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I]). \tag{1.11}$$

В дополнение к (1.11) отметим следующие очевидные свойства:

$$(\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{I}) \cup ((I, \mathcal{I}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1[I] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})) \ \& \ (\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{I}) \cap ((I, \mathcal{I}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1[I] = \varnothing). \tag{1.12}$$

Отметим здесь же, что при $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I})$ множество-прообраз $((I, \mathcal{I}) - \mathrm{ult})[\cdot]^{-1}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}|\mathcal{H}))$ совпадает с пересечением всех множеств из $\mathcal{H}$.

§ 2. Обобщенные пределы

Всюду в дальнейшем фиксируем ИП $(E, \mathcal{A})$ с алгеброй множеств, $E \neq \varnothing$. Итак, $\mathcal{A}$ есть алгебра п/м непустого множества E. Кроме того, фиксируем далее непустое множество $\mathbf{H}$ и топологию $\tau \in (\mathrm{top})_0[\mathbf{H}]$, получая хаусдорфово ТП $(\mathbf{H}, \tau)$. Учитывая очевидное вложение $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \subset \beta_0[E]$, имеем (см. (1.1), [11, гл. I]), что $f^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[\mathbf{H}] \ \ \forall f \in \mathbf{H}^E \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$. Тогда

$$\mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{A}; \mathbf{H}; \tau] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{f \in \mathbf{H}^E \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \ \exists y \in \mathbf{H} : \ f^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y\Big\} \in \mathcal{P}'\left(\mathbf{H}^E\right) \tag{2.1}$$

(функции-константы из $\mathbf{H}^E$ — суть элементы множества (2.1)). В силу (2.1) и отделимости $(\mathbf{H}, \tau)$ корректно следующее

Определение 2.1. Если $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{A}; \mathbf{H}; \tau]$, то $\varphi_{\lim}[f] \in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})}$ есть def такое отображение, что $f^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} \varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$.

Легко видеть, что $\varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}) \in \mathrm{cl}\left(f^1(A), \tau\right) \ \ \forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{A}; \mathbf{H}; \tau] \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \ \forall A \in \mathcal{U}$. С учетом этого по схеме, близкой к обоснованию [7, предложение 9], устанавливается

Предложение 2.1. Если $\tau \in (\mathbf{top})[\mathbf{H}]$, то $\varphi_{\lim}[f] \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E], \mathbf{H}, \tau) \ \forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{A}; \mathbf{H}; \tau]$.

Отметим еще одно легкопроверяемое свойство:

$$\varphi_{\lim}[f] \circ ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[\cdot] = f \ \ \forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{A}; \mathbf{H}; \tau]; \tag{2.2}$$

свойство (2.2), подобное [7, предложение 10], позволяет (с учетом (1.11)) рассматривать $\varphi_{\lim}[f]$ как продолжение f, которое в случае T_3-пространства $(\mathbf{H}, \tau)$ непрерывно.

§ 3. Представление множества притяжения

Отметим, что для всяких множества Y, $Y \neq \varnothing$, отображения $h \in Y^E$ и у/ф $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[Y]$ ($\mathcal{U} \in \beta_0[E]$, а тогда нужное свойство извлекается из построений [11, гл. I]), а потому при $\mathbf{t} \in (\mathrm{top})[Y]$ и $y \in Y$

$$\left(h^1[\mathcal{U}] \overset{\mathbf{t}}{\Longrightarrow} y\right) \Longleftrightarrow \left(N_{\mathbf{t}}(y) \subset (Y - \mathbf{fi})[h^1[\mathcal{U}]]\right). \tag{3.1}$$

Используя (3.1) и определения [7, 18], полагаем для произвольных ТП $(Y, \mathbf{t})$, $Y \neq \varnothing$, отображения $h \in Y^E$ и семейства $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, что

$$(\mathbf{as})[E; Y; \mathbf{t}; h; \mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \left\{y \in Y \mid \exists\, \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] :\ h^1[\mathcal{U}] \overset{\mathbf{t}}{\Longrightarrow} y\right\}, \tag{3.2}$$

рассматриваем (3.2) как МП на значениях h при использовании $\mathcal{E}$ в качестве ограничений асимптотического характера. Полагаем до конца настоящего раздела, что

$$\tau \in (\mathbf{top})[\mathbf{H}], \tag{3.3}$$

получая в виде $(\mathbf{H}, \tau)$ T_3-пространство. Из построений предыдущего раздела следует при $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{A}; \mathbf{H}; \tau]$, что

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E], ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[\cdot], \varphi_{\lim}[f])$$

есть [20, определение 3.1] $(\mathbf{H}, \tau, f)$-компактификатор, а тогда [20, предложение 3.2]

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; f; \mathcal{E}] = \varphi_{\lim}[f]^1((\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]; ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[\cdot]; \mathcal{E}])\ \ \forall\, \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \tag{3.4}$$

В связи с (3.4) отметим, что [7, предложение 11]

$$(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]; ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[\cdot]; \mathcal{E}] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E})\ \ \forall\, \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{A}). \tag{3.5}$$

Теорема 3.1. Если $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{A}; \mathbf{H}; \tau]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{A})$, то

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; f; \mathcal{E}] = \varphi_{\lim}[f]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E})).$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией (3.4) и (3.5).

Следствие 3.1. Если $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{A}; \mathbf{H}; \tau]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{A})$, то

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; f; \mathcal{E}] = \left\{y \in \mathbf{H} \mid \exists\, \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E}) :\ f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} y\right\}. \tag{3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω множество в правой части (3.6). Выберем произвольно $y_* \in (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; f; \mathcal{E}]$. Тогда согласно теореме 3.1 справедливо равенство $y_* = \varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}_*)$ для некоторого $\mathcal{U}_* \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E})$. Поскольку $\mathcal{U}_* \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$, то (см. определение 2.1) имеем сходимость $f^1[\mathcal{U}_*] \overset{\tau}{\Longrightarrow} y_*$. Поскольку $y_* \in \mathbf{H}$ (см. (3.2)), то $y_* \in \Omega$, чем и завершается проверка вложения

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; f; \mathcal{E}] \subset \Omega. \tag{3.7}$$

Пусть $y^* \in \Omega$. Тогда $y^* \in \mathbf{H}$ и для некоторого у/ф $\mathcal{U}^* \in \mathbf{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E})$

$$f^1[\mathcal{U}^*] \overset{\tau}{\Longrightarrow} y^*. \tag{3.8}$$

Вместе с тем $\mathcal{U}^* \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$, а тогда имеет место сходимость

$$f^1[\mathcal{U}^*] \overset{\tau}{\Longrightarrow} \varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}^*) \tag{3.9}$$

(см. определение 3.1). В силу отделимости ТП $(\mathbf{H}, \tau)$ имеем из (3.8) и (3.9) равенство

$$y^* = \varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}^*). \tag{3.10}$$

С другой стороны, по выбору $\mathcal{U}^*$ имеем с очевидностью, что $\varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}^*) \in \varphi_{\lim}[f]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E}))$, откуда с учетом (3.10) и теоремы 3.1 вытекает включение $y^* \in (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;f;\mathcal{E}]$; итак, установлено, что $\Omega \subset (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;f;\mathcal{E}]$, откуда с учетом (3.7) следует требуемое равенство множеств: $(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;f;\mathcal{E}] = \Omega$. □

Отметим естественную аналогию (3.2) и (3.6), что позволяет в принципе толковать элементы $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E})$, где $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{A})$, как несеквенциальные приближенные решения (имеем в виду аналогию с соответствующим понятием [1, гл. III]) в задаче о достижимости при условии, что «асимптотические ограничения» задаются семейством $\mathcal{E}$. В то же время теорема 3.1 характеризует эти же элементы как обобщенные решения (снова имеется в виду аналогия с [1, гл. III]). Итак, здесь удается отождествить обобщенные и приближенные решения (последние — суть аналоги последовательностей Дж. Варги; см. [1, гл. III]), используя в качестве тех и других у/ф алгебры $\mathcal{A}$. Отметим подобное свойство в [7, следствие 1] и в [18, предложение 3.4], где используются, однако, несколько иные предположения относительно «целевого» оператора f.

Замечание 3.1. В заключении раздела рассмотрим один частный случай, для которого справедлива теорема 3.1. Полагаем, что $\mathbb{H}$ — непустое множество, а $\rho: \ \mathbb{H}\times\mathbb{H} \longrightarrow [0,\infty[$ есть метрика $\mathbb{H}$, причем $(\mathbb{H},\rho)$ есть полное метрическое пространство. Пусть $\mathcal{T} \in (\mathrm{top})[\mathbb{H}]$ есть def топология, порожденная метрикой ρ (метрическая топология, соответствующая ρ). Тогда $\mathcal{T} \in (\mathbf{top})[\mathbb{H}]$, а $(\mathbb{H},\mathcal{T})$ есть T_3-пространство.

Пусть Γ — непустое множество (индексов) и $\mathbf{H} = \mathbb{H}^\Gamma$ в пределах настоящего Замечания. Полагаем теперь, что $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$ есть def топология тихоновской степени (метризуемого полной метрикой) ТП $(\mathbb{H},\mathcal{T})$ с индексным множеством Γ. Итак, $(\mathbf{H},\tau)$ есть в данном Замечании тихоновское произведение [11–14] экземпляров ТП $(\mathbb{H},\mathcal{T})$ при использовании Γ в качестве множества индексов (см. также [21, с. 473]). При этом $\tau \in (\mathbf{top})[\mathbf{H}]$, т.к. тихоновская степень T_3-пространства сама является T_3-пространством (см. [22, 2.3.11]).

Пусть (см. раздел 2) $(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in B(E,\mathcal{A},\mathbb{H},\rho)^\Gamma$. Иными словами, $f_\gamma \in B(E,\mathcal{A},\mathbb{H},\rho)\ \forall\,\gamma\in\Gamma$. Определяем $f \in \mathbf{H}^E$ как отображение

$$x \longmapsto (f_\gamma(x))_{\gamma\in\Gamma}:\ E \longrightarrow \mathbf{H}. \tag{3.11}$$

При этом $f(x)(\gamma) = f_\gamma(x)\ \forall\,x\in E\ \forall\,\gamma\in\Gamma$. Ясно, что компоненты f имеют следующий вид:

$$f(\cdot)(\gamma) \stackrel{\triangle}{=} (f(x)(\gamma))_{x\in E} = f_\gamma\ \ \forall\,\gamma\in\Gamma. \tag{3.12}$$

Следовательно, f есть отображение с ярусными компонентами. Согласно положениям [15] имеем, что $\forall\,s\in B(E,\mathcal{A},\mathbb{H},\rho)\ \forall\,\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})\ \exists\,!m\in\mathbb{H}:$

$$\forall\,\varepsilon\in]0,\infty[\ \exists\,U\in\mathcal{U}:\ \rho(s(x),m)<\varepsilon\ \ \forall\,x\in U.$$

С учетом этого при $s \in B(E,\mathcal{L},\mathbb{H},\rho)$ введем, следуя [15], отображение $\mathfrak{L}[s] \in \mathbb{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})}$, для которого $\forall\,\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})\ \forall\,\varepsilon\in]0,\infty[\ \exists\,U\in\mathcal{U}:$

$$\rho(s(x),\mathfrak{L}[s](\mathcal{U}))<\varepsilon\ \ \forall\,x\in U. \tag{3.13}$$

Из (3.13) следуют, конечно, свойства сходимости

$$f(\cdot)(\gamma)^1[\mathcal{U}] \stackrel{\mathcal{T}}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}[f(\cdot)(\gamma)](\mathcal{U})\ \ \forall\,\gamma\in\Gamma\ \forall\,\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}). \tag{3.14}$$

Из (3.14) с учетом простейших свойств тихоновского произведения (см. [22, с. 127-128]) вытекает, что

$$f^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} (\mathfrak{L}[f_\gamma](\mathcal{U}))_{\gamma\in\Gamma}\ \ \forall\,\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}). \tag{3.15}$$

Это означает, в частности, что отображение (3.11) обладает свойством $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{A};\mathbf{H};\tau]$. Следовательно, в случае отображения (3.11) определен оператор $\varphi_{\lim}[f] \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}),\mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E],\mathbf{H},\tau)$, для которого $\varphi_{\lim}[f] \circ ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[\cdot] = f$. В этой связи отметим, что (см. определение 2.1, (3.12), (3.15))

$$\varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}) = (\mathfrak{L}[f_\gamma](\mathcal{U}))_{\gamma\in\Gamma} \ \ \forall\,\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}). \tag{3.16}$$

Для f (3.11) справедливо утверждение теоремы 3.1. Итак, мы располагаем обширным классом отображений, построенных по принципу (3.11) и являющихся при этом элементами множества $\mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{A}; \mathbf{H}; \tau]$; эти отображения соответствуют используемому в теореме 3.1.

§ 4. Частный случай

Всюду в дальнейшем полагаем, что $E \triangleq [a, b]$, где $a \in \mathbb{R}$ и $b \in]a, \infty[$ (здесь и ниже для обозначения промежутков $\mathbb{R}$ (открытых, полуоткрытых и замкнутых) используем только квадратные скобки). Значения a и b фиксируем. Полагаем в дальнейшем, что

$$\mathcal{L} \triangleq \{L \in \mathcal{P}(E) \mid \exists\, c \in E\ \exists\, d \in E :\ (\,]c, d[\subset L) \ \&\ (L \subset [c, d])\} \tag{4.1}$$

($\mathcal{L}$ — семейство всех промежутков $\mathbb{R}$, содержащихся в E); семейство $\mathcal{L}$ — полуалгебра [23, гл. I] п/м E. Наконец, полагаем далее, что $\mathcal{A}$ есть алгебра п/м E, порожденная полуалгеброй $\mathcal{L}$. Хорошо известно [23, с. 46], что $\mathcal{A}$ есть семейство всех множеств $A \in \mathcal{P}(E)$, каждое из которых допускает конечное разбиение множествами из $\mathcal{L}$. Рассмотрим пространство Стоуна, соответствующее ИП $(E, \mathcal{A})$ вышеупомянутого типа. В [19] показано, что

$$\Big(\mathcal{J}_t^{(-)} \triangleq \{[c, t[:\ c \in [a, t[\} \in \beta_{\mathcal{A}}^{00}[E] \ \ \forall\, t \in\,]a, b]\Big) \ \&\ \Big(\mathcal{J}_t^{(+)} \triangleq \{]t, c] :\ c \in]t, b]\} \in \beta_{\mathcal{A}}^{00}[E] \ \ \forall\, t \in [a, b[\Big) \tag{4.2}$$

(см., в частности, [19, (6.5)]). Тогда [19, предложение 6.1] множества $\mathbb{J}_- \triangleq \{(E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)} \mid \mathcal{A}] :\ t \in]a, b]\}$ и $\mathbb{J}_+ \triangleq \{(E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(+)} \mid \mathcal{A}] :\ t \in [a, b[\}$ исчерпывающим образом характеризуют $\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{A})$:

$$\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{A}) = \mathbb{J}_- \cup \mathbb{J}_+. \tag{4.3}$$

С учетом (1.12) и (4.3) получаем полное описание множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ (полезно иметь в виду, что

$$\begin{gathered} ((E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)} | \mathcal{A}] = \{A \in \mathcal{A} \mid \exists\, c \in [a, t[:\ [c, t[\subset A\} \ \ \forall\, t \in]a, b]) \ \& \\ \&\ ((E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(+)} \mid \mathcal{A}] = \{A \in \mathcal{A} \mid \exists\, c \in]t, b] :\ ]t, c] \subset A\} \ \ \forall\, t \in [a, b[); \end{gathered} \tag{4.4}$$

эти представления вытекают из (1.9) и (4.2)).

Выберем произвольное семейство $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{A})$ и зафиксируем его в дальнейшем; итак, далее $\mathcal{E}$ — непустое подсемейство алгебры $\mathcal{A}$ п/м E. Пусть $E_0 \triangleq \bigcap\limits_{A\in\mathcal{E}} A$ и, кроме того,

$$\begin{gathered} \Big(T_*^{(-)}[\mathcal{E}] \triangleq \{t \in\,]a, b] \mid \forall\, A \in \mathcal{E}\ \exists\, c \in [a, t[:\ [c, t[\subset A\}\Big) \ \& \\ \&\ \Big(T_*^{(+)}[\mathcal{E}] \triangleq \{t \in [a, b[\mid \forall\, A \in \mathcal{E}\ \exists\, c \in]t, b] :\ ]t, c] \subset A\}\Big). \end{gathered} \tag{4.5}$$

В терминах множеств (4.5) конструируем следующие два множества свободных у/ф ИП $(E, \mathcal{A})$:

$$\begin{gathered} \Big(\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}] \triangleq \{(E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)} | \mathcal{A}] :\ t \in T_*^{(-)}[\mathcal{E}]\} \in \mathcal{P}(\mathbb{J}_-)\Big) \ \& \\ \&\ \Big(\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}] \triangleq \{(E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(+)} | \mathcal{A}] :\ t \in T_*^{(+)}[\mathcal{E}]\} \in \mathcal{P}(\mathbb{J}_+)\Big). \end{gathered} \tag{4.6}$$

Предложение 4.1. Справедливо равенство $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E}) = \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}] \cup \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}] \cup ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(E_0)$.

Доказательство. Если $\mathcal{U}_1 \in \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}]$, то подберем, используя (4.6), $t_1 \in T_*^{(-)}[\mathcal{E}]$ так, что $\mathcal{U}_1 = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_{t_1}^{(-)}|\mathcal{A}]$. Тогда $t_1 \in]a, b]$ и при этом

$$\forall A \in \mathcal{E}\ \exists c \in [a, t_1[:\ [c, t_1[\subset A. \tag{4.7}$$

Заметим, что $\mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$. Выберем произвольно $\Sigma_1 \in \mathcal{E}$; тогда, в частности, $\Sigma_1 \in \mathcal{A}$ и при этом (см. (4.7)) для некоторого $c_1 \in [a, t_1[$ имеет место вложение $[c_1, t_1[\subset \Sigma_1$. С учетом (4.4) имеем по выбору t_1, что $\Sigma_1 \in \mathcal{U}_1$. Поскольку выбор Σ_1 был произвольным, установлено, что $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}_1$. Это означает, что (см. (1.8)) $\mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E})$, чем и завершается проверка вложения

$$\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}] \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E}). \tag{4.8}$$

Пусть $\mathcal{U}_2 \in \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}]$. Подберем с учетом (4.6) число $t_2 \in T_*^{(+)}[\mathcal{E}]$ так, что при этом $\mathcal{U}_2 = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_{t_2}^{(+)}|\mathcal{A}]$. Из (4.5) вытекает, что $t_2 \in [a, b[$ и при этом

$$\forall A \in \mathcal{E}\ \exists c \in]t_2, b] :\ ]t_2, c] \subset A. \tag{4.9}$$

Выберем произвольно $\Sigma_2 \in \mathcal{E}$. Тогда, в частности, $\Sigma_2 \in \mathcal{A}$ и согласно (4.9) для некоторого $c_2 \in]t_2, b]$ справедливо вложение $]t_2, c_2] \subset \Sigma_2$. С учетом (4.4) имеем по выбору t_2, что $\Sigma_2 \in \mathcal{U}_2$. Поскольку $\mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$, то согласно (1.8) $\mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E})$. Итак, установлено вложение

$$\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}] \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E}). \tag{4.10}$$

Если же $\mathcal{U}_3 \in ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(E_0)$, то подбираем $x_0 \in E_0$ так, что $\mathcal{U}_3 = ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[x_0]$. Для $\Sigma_0 \in \mathcal{E}$ имеем (по определению E_0), что $x_0 \in \Sigma_0$, где $\Sigma_0 \in \mathcal{A}$; поэтому $\Sigma_0 \in (E - \mathrm{ult})[x_0]$ согласно (1.5) и, как следствие, $\Sigma_0 \in ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[x_0]$, т.е. $\Sigma_0 \in \mathcal{U}_3$. Итак, установлено вложение $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}_3$, а тогда согласно (1.8) $\mathcal{U}_3 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E})$. Поскольку выбор $\mathcal{U}_3$ был произвольным, установлено вложение $((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(E_0) \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E})$. С учетом (4.8) и (4.10) получаем, что

$$\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}] \cup \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}] \cup ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(E_0) \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E}). \tag{4.11}$$

Пусть теперь $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E})$, т.е. $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ и при этом $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}$. Отметим, что согласно (1.12)

$$(\mathcal{V} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{A}))\ \vee\ (\mathcal{V} \in ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(E)). \tag{4.12}$$

Оба случая в (4.12) рассмотрим отдельно.

1) Пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{A})$. Тогда согласно (4.3) $\mathcal{V} \in \mathbb{J}_- \cup \mathbb{J}_+$, т.е.

$$(\mathcal{V} \in \mathbb{J}_-)\ \vee\ (\mathcal{V} \in \mathbb{J}_+). \tag{4.13}$$

Оба случая в (4.13) также рассмотрим отдельно.

1') Пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{J}_-$, т.е. для некоторого $p \in]a, b]$ имеет место представление (см. (4.4))

$$\mathcal{V} = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_p^{(-)}|\mathcal{A}] = \{A \in \mathcal{A} \mid \exists c \in [a, p[:\ [c, p[\subset A\}. \tag{4.14}$$

Выберем произвольно $\Sigma_* \in \mathcal{E}$. Тогда (по выбору $\mathcal{V}$) имеем, в частности, что $\Sigma_* \in \mathcal{V}$, а потому (см. (4.14)) для некоторого $c_* \in [a, p[$ имеет место вложение $[c_*, p[\subset \Sigma_*$. Поскольку выбор Σ_* был произвольным, установлено, что число $p \in]a, b]$ обладает свойством

$$\forall A \in \mathcal{E}\ \exists c \in [a, p[:\ [c, p[\subset A.$$

Из (4.5) вытекает, что $p \in T_*^{(-)}[\mathcal{E}]$ и, как следствие (см. (4.6), (4.14)) $\mathcal{V} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}]$. Рассмотрение случая 1') завершено: установлена импликация

$$(\mathcal{V} \in \mathbb{J}_-) \Longrightarrow (\mathcal{V} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}]). \tag{4.15}$$

1") Пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{J}_+$. Тогда согласно определению $\mathbb{J}_+$ имеем для некоторого $q \in [a, b[$ представление (см. (4.4))

$$\mathcal{V} = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_q^{(+)}|\mathcal{A}] = \{A \in \mathcal{A} \mid \exists\, c \in]q, b] :]q, c] \subset A\}. \tag{4.16}$$

Пусть теперь $\Sigma^* \in \mathcal{E}$. Тогда, в частности, имеем по выбору $\mathcal{V}$, что $\Sigma^* \in \mathcal{V}$. Поэтому согласно (4.16) для некоторого $c^* \in]q, b]$ имеем вложение $]q, c^*] \subset \Sigma^*$. Поскольку выбор Σ^* был произвольным, установлено, что

$$\forall\, A \in \mathcal{E}\ \exists\, c \in]q, b] :]q, c] \subset A.$$

С учетом (4.5) имеем, следовательно, что $q \in T_*^{(+)}[\mathcal{E}]$, откуда согласно (4.6) и (4.16) вытекает, что $\mathcal{V} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}]$. Рассмотрение случая 1") завершено: установлена импликация

$$(\mathcal{V} \in \mathbb{J}_+) \Longrightarrow \Big(\mathcal{V} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}]\Big). \tag{4.17}$$

Из (4.13), (4.15) и (4.17) вытекает, что $\mathcal{V} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}] \cup \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}]$ в рассматриваемом сейчас случае 1). Итак, истинна импликация

$$\big(\mathcal{V} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{A})\big) \Longrightarrow \Big(\mathcal{V} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}] \cup \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}]\Big). \tag{4.18}$$

2) Пусть $\mathcal{V} \in ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(E)$. С учетом (1.10) получаем, что $\mathcal{V} = ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[v]$, где $v \in E$. Поэтому имеем по выбору $\mathcal{V}$, что $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \subset (E - \mathrm{ult})[v]$, а тогда (см. (1.5)) $v \in E_0$ и, следовательно, $\mathcal{V} \in ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(E_0)$. Следовательно, установлена импликация

$$\big(\mathcal{V} \in ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})\,[\cdot]^1(E)\big) \Longrightarrow \big(\mathcal{V} \in ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(E_0)\big). \tag{4.19}$$

Из (4.12), (4.18) и (4.19) вытекает, что во всех возможных случаях

$$\mathcal{V} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}] \cup \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}] \cup ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(E_0),$$

чем и завершается проверка вложения

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E}) \subset \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}] \cup \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}] \cup ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(E_0). \tag{4.20}$$

Из (4.11), (4.20) имеем равенство $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E}) = \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}] \cup \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}] \cup ((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(E_0)$. $\square$

Фиксируем в дальнейшем непустое множество $\mathbf{H}$ и топологию $\tau \in (\mathrm{top})_0[\mathbf{H}]$, получая T_2-пространство $(\mathbf{H}, \tau)$. Кроме того, пусть $\Psi \in \mathbb{F}_{\lim}[[a, b]; \mathcal{A}; \mathbf{H}; \tau]$. Тогда определено отображение $\varphi_{\lim}[\Psi] \in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})}$ (см. определение 3.1). В частности, определены значения $\varphi_{\lim}[\Psi]((E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_\eta^{(-)}|\mathcal{A}])$, $\eta \in]a, b]$, и $\varphi_{\lim}[\Psi]((E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_\zeta^{(+)}|\mathcal{A}])$, $\zeta \in [a, b[$.

Предложение 4.2. Если $t \in]a, b]$, то $p \stackrel{\triangle}{=} \varphi_{\lim}[\Psi]((E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)}|\mathcal{A}]) \in \mathbf{H}$ обладает следующими свойствами:

1) $\forall\, S \in N_\tau(p)\ \exists\, \delta \in]0, \infty[:\ \Psi(x) \in S\ \ \forall\, x \in]t - \delta, t[\cap[a, b]$;

2) $\forall\, y \in \mathbf{H}\ \ (\forall\, S \in N_\tau(y)\ \exists\, \delta \in]0, \infty[:\ \Psi(x) \in S\ \ \forall\, x \in]t - \delta, t[\cap[a, b]) \Longrightarrow (y = p)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{U} \stackrel{\triangle}{=} (E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)}|\mathcal{A}]$. Тогда (см. (4.3), определение 3.1)

$$\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{A} \mid \exists\, c \in [a, t[:\ [c, t[\subset A\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \tag{4.21}$$

и при этом имеет место сходимость

$$\Psi^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} p, \tag{4.22}$$

т.к. $p = \varphi_{\lim}[\Psi](\mathcal{U})$. Из (1.4) и (4.22) вытекает, что $N_\tau(p) \subset (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\Psi^1[\mathcal{U}]]$, где $\Psi^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[\mathbf{H}]$. Иными словами (см. (1.1),(1.3)),

$$\forall\, S \in N_\tau(p)\ \exists\, U \in \mathcal{U}:\ \Psi^1(U) \subset S. \tag{4.23}$$

Установим свойство 1). Фиксируем $S_* \in N_\tau(p)$, после чего подбираем (см. (4.23)) $U_* \in \mathcal{U}$ так, что при этом $\Psi^1(U_*) \subset S_*$. С учетом (4.21) подберем $c_* \in [a,t[$ так, что $[c_*,t[\subset U_*$. Тогда $\Psi^1([c_*,t[) \subset \Psi^1(U_*) \subset S_*$. Поэтому

$$\Psi(x) \in S_* \ \ \forall\, x \in [c_*,t[. \tag{4.24}$$

При этом $\delta_* \overset{\triangle}{=} t - c_* \in]0,\infty[,\ t-\delta_* = c_*$ и $[t-\delta_*,t[=[c_*,t[\subset [a,b]$, а тогда

$$]t-\delta_*,t[=]t-\delta_*,t[\cap[a,b] \subset [c_*,t[.$$

С учетом (4.24) получаем теперь, что

$$\Psi(x) \in S_* \ \ \forall\, x \in]t-\delta_*,t[\cap[a,b]. \tag{4.25}$$

Поскольку выбор S_* был произвольным, свойство 1) установлено.

Проверим свойство 2). Пусть $y^* \in \mathbf{H}$ таково, что

$$\forall\, S \in N_\tau(y^*)\ \exists\, \delta \in]0,\infty[:\ \Psi(x) \in S\ \ \forall\, x \in]t-\delta,t[\cap[a,b]. \tag{4.26}$$

Покажем, что $y^* = p$. В самом деле, допустим противное: $y^* \neq p$. Тогда, используя отделимость ТП $(\mathbf{H},\tau)$, подберем $S_1 \in N_\tau(y^*)$ и $S_2 \in N_\tau(p)$, для которых $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. С учетом (4.26) подберем $\delta_1 \in]0,\infty[$ так, что

$$\Psi(x) \in S_1 \ \ \forall\, x \in]t-\delta_1,t[\cap[a,b]. \tag{4.27}$$

Кроме того, используя уже установленное свойство 1), подберем $\delta_2 \in]0,\infty[$ так, что

$$\Psi(x) \in S_2 \ \ \forall\, x \in]t-\delta_2,t[\cap[a,b]. \tag{4.28}$$

Введем в рассмотрение $\eta_1 \overset{\triangle}{=} \inf(\{\delta_1; t-a\}) \in]0,\infty[$ и $\eta_2 \overset{\triangle}{=} \inf(\{\delta_2; t-a\}) \in]0,\infty[$. Тогда

$$]t-\eta_1,t[\subset]t-\delta_1,t[\cap[a,b],$$

при $x \in]t-\eta_1,t[$ определено значение $\Psi(x) \in \mathbf{H}$ отображения Ψ и при этом (см. (4.27)) $\Psi(x) \in S_1$. Аналогичным образом

$$]t-\eta_2,t[\subset]t-\delta_2,t[\cap[a,b],$$

при $x \in]t-\eta_2,t[$ определено значение $\Psi(x) \in \mathbf{H}$ отображения Ψ и (см. (4.28)) $\Psi(x) \in S_2$. Для $\eta \overset{\triangle}{=} \inf(\{\eta_1;\eta_2\}) \in]0,\infty[$ имеем очевидное свойство

$$\frac{\eta}{2} \in]0,\infty[:\ \Big(t - \frac{\eta}{2} \in]t-\eta_1,t[\Big)\ \&\ \Big(t-\frac{\eta}{2} \in]t-\eta_2,t[\Big).$$

Поэтому реализуется следующее включение

$$\Psi\left(t-\frac{\eta}{2}\right) \in S_1 \cap S_2,$$

что невозможно. Полученное в предположении $y^* \neq p$ противоречие показывает, что на самом деле $y^* = p$ (при условии (4.26)). Итак (см. (4.26)),

$$(\forall\, S \in N_\tau(y^*)\ \exists\, \delta \in]0,\infty[:\ \Psi(x) \in S\ \ \forall\, x \in]t-\delta,t[\,\cap\,[a,b]) \Longrightarrow (y^* = p). \tag{4.29}$$

Поскольку выбор y^* был произвольным, свойство 2) также установлено. □

Из предложения 4.2 следует, что $\forall\, t \in]a,b]\ \exists!\, h \in \mathbf{H}:$

$$\forall\, S \in N_\tau(h)\ \exists\, \delta \in]0,\infty[:\ \Psi(x) \in S\ \ \forall\, x \in]t-\delta,t[\cap[a,b].$$

С учетом этого свойства корректно следующее

Определение 4.1. Если $t \in]a,b]$, то def $(\tau - \mathrm{LIM}_{\xi\uparrow t})[\Psi(\xi)] \in \mathbf{H}$ есть такой единственный элемент $\mathbf{H}$, что

$$\forall\, S \in N_\tau((\tau - \mathrm{LIM}_{\xi\uparrow t})[\Psi(\xi)])\ \exists\, \delta \in\ ]0,\infty[:\ \Psi(x) \in S\ \ \forall\, x \in\ ]t-\delta, t[\cap[a,b]. \tag{4.30}$$

Из предложения 4.2 и определения 4.1 следует, конечно, что (см. (4.30))

$$(\tau - \mathrm{LIM}_{\xi\uparrow t})[\Psi(\xi)] = \varphi_{\lim}[\Psi]\Big((E-\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)}|\mathcal{A}]\Big)\ \ \forall\, t \in]a,b]. \tag{4.31}$$

Предложение 4.3. Если $t \in [a,b[$, то $q \stackrel{\triangle}{=} \varphi_{\lim}[\Psi]\Big((E-\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(+)}|\mathcal{A}]\Big) \in \mathbf{H}$ обладает следующими свойствами:

1) $\forall\, S \in N_\tau(q)\ \exists\, \delta \in\ ]0,\infty[:\ \Psi(x) \in S\ \ \forall\, x \in]t, t+\delta[\cap[a,b]$;

2) $\forall\, y \in \mathbf{H}\ \ (\forall\, S \in N_\tau(y)\ \exists\, \delta \in]0,\infty[:\ \Psi(x) \in S\ \ \forall\, x \in\ ]t, t+\delta[\,\cap\,[a,b]) \Longrightarrow (y = q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{U} = (E-\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(+)}|\mathcal{A}]$. Тогда (см. (4.4), определение 2.1)

$$\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{A} \mid \exists\, c \in\ ]t,b] :\ ]t,c] \subset A\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \tag{4.32}$$

и при этом $\Psi^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} q$, поскольку $q = \varphi_{\lim}[\Psi](\mathcal{U})$. С учетом (1.4) получаем вложение $N_\tau(q) \subset (\mathbf{H}-\mathbf{fi})\left[\Psi^1[\mathcal{U}]\right]$, где $\Psi^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[\mathbf{H}]$. С учетом (1.1) и (1.3) реализуется свойство

$$\forall\, S \in N_\tau(q)\ \exists\, U \in \mathcal{U} :\ \Psi^1(U) \subset S. \tag{4.33}$$

Проверим свойство 1). Пусть $S_* \in N_\tau(q)$. С учетом (4.33) подбираем $U_* \in \mathcal{U}$ так, что при этом $\Psi^1(U_*) \subset S_*$. Используя (4.32), получаем, что $U_* \in \mathcal{A}$ и, кроме того, для некоторого $c_* \in]t,b]$ имеем вложение $]t,c_*] \subset U_*$, откуда извлекаем цепочку вложений

$$\Psi^1(]t,c_*]) \subset \Psi^1(U_*) \subset S_*,$$

где $]t,c_*] \subset [a,b]$. Это означает, что

$$\Psi(x) \in S_*\ \ \forall\, x \in]t,c_*]. \tag{4.34}$$

При этом $\delta_* \stackrel{\triangle}{=} c_* - t \in]0,\infty[,\ \ t+\delta_* = c_*$ и $]t,t+\delta_*[=\ ]t,c_*[\ \subset\ [a,b]$. С учетом (4.34) имеем теперь, что

$$\Psi(x) \in S_*\ \ \forall\, x \in\ ]t, t+\delta_*[\cap[a,b].$$

Поскольку выбор S_* был произвольным, свойство 1) установлено.

Проверим свойство 2), фиксируя $y^* \in \mathbf{H}$. Пусть при этом

$$\forall\, S \in N_\tau(y^*)\ \exists\, \delta \in]0,\infty[:\ \Psi(x) \in S\ \ \forall\, x \in\ ]t,t+\delta[\cap[a,b]. \tag{4.35}$$

Покажем, что $y^* = q$. В самом деле, допустим противное: $y^* \neq q$. Тогда, используя отделимость ТП $(\mathbf{H},\tau)$, подберем окрестности $H_1 \in N_\tau(y^*)$ и $H_2 \in N_\tau(q)$, для которых $H_1 \cap H_2 = \varnothing$. Используя (4.35), подберем $\delta_1 \in\ ]0,\infty[$ так, что

$$\Psi(x) \in H_1\ \ \forall\, x \in\ ]t, t+\delta_1[\,\cap\,[a,b]. \tag{4.36}$$

С учетом уже установленного свойства 1) подберем $\delta_2 \in\ ]0,\infty[$ так, что при этом

$$\Psi(x) \in H_2\ \ \forall\, x \in\ ]t, t+\delta_2[\,\cap\,[a,b]. \tag{4.37}$$

Введем в рассмотрение $\eta_1 \stackrel{\triangle}{=} \inf(\{\delta_1; b-t\})$ и $\eta_2 \stackrel{\triangle}{=} \inf(\{\delta_2; b-t\})$; разумеется, $0 < \eta_1$ и $0 < \eta_2$. При этом $]t,t+\eta_1[\subset\ ]t,t+\delta_1[\cap[a,b]$; для $x \in\ ]t,t+\eta_1[$ определено значение $\Psi(x) \in \mathbf{H}$ отображения Ψ, причем $\Psi(x) \in H_1$. Аналогичным образом $]t,t+\eta_2[\ \subset\ ]t,t+\delta_2[\cap[a,b]$; для $x \in\ ]t,t+\eta_2[$ определено значение $\Psi(x) \in \mathbf{H}$ отображения Ψ и согласно (4.37) $\Psi(x) \in H_2$. Для $\eta \triangleq \inf(\{\eta_1; \eta_2\}) \in]0, \infty[$ имеем следующую цепочку неравенств

$$t < t + \frac{\eta}{2} < \inf(\{t + \eta_1; t + \eta_2\}),$$

а тогда получаем два очевидных следствия: во-первых,

$$t + \frac{\eta}{2} \in]t, t + \eta_1[$$

и, стало быть, $\Psi(t + \frac{\eta}{2}) \in H_1$; во вторых, имеем, что

$$t + \frac{\eta}{2} \in]t, t + \eta_2[$$

и потому $\Psi(t + \frac{\eta}{2}) \in H_2$. В итоге $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает (при условии (4.35)) равенство $y^* = q$. Итак (см. (4.35)),

$$(\forall\, S \in N_\tau(y^*)\ \exists\, \delta \in]0, \infty[:\ \Psi(x) \in S\ \ \forall\, x \in]t, t + \delta[\cap [a, b]) \Longrightarrow (y^* = q)\,.$$

Поскольку и выбор y^* был произвольным, свойство 2) также установлено. $\square$

Из предложения 4.3 следует, в частности, что $\forall\, t \in [a, b[\ \exists !h \in \mathbf{H}$:

$$\forall\, S \in N_\tau(h)\ \exists\, \delta \in]0, \infty[:\ \Psi(x) \in S\ \ \forall\, x \in]t, t + \delta[\cap [a, b].$$

С учетом этого корректно следующее естественное

Определение 4.2. Если $t \in [a, b[$, то def $(\tau - \mathrm{LIM}_{\xi \downarrow t})[\Psi(\xi)] \in \mathbf{H}$ есть такой единственный элемент $\mathbf{H}$, что

$$\forall\, S \in N_\tau((\tau - \mathrm{LIM}_{\xi \downarrow t})[\Psi(\xi)])\ \exists\, \delta \in]0, \infty[:\ \Psi(x) \in S\ \forall\, x \in]t, t + \delta[\cap [a, b]. \tag{4.38}$$

Из предложения 4.3 и определения 4.2 следует, что (см. (4.38))

$$(\tau - \mathrm{LIM}_{\xi \downarrow t})[\Psi(\xi)] = \varphi_{\lim}[\Psi]\left((E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(+)} | \mathcal{A}]\right)\ \ \forall\, t \in [a, b[. \tag{4.39}$$

Отметим, в частности, с учетом (4.5), определений 4.1 и 4.2, что, в частности,

$$\left((\tau - \mathrm{LIM}_{\xi \uparrow t})[\Psi(\xi)] \in \mathbf{H}\ \ \forall\, t \in T_*^{(-)}[\mathcal{E}]\right)\ \&\ \left((\tau - \mathrm{LIM}_{\xi \downarrow t})[\Psi(\xi)] \in \mathbf{H}\ \ \forall\, t \in T_*^{(+)}[\mathcal{E}]\right).$$

Теорема 4.1. Если $\tau \in (\mathbf{top})[\mathbf{H}]$, то справедливо равенство

$$\begin{gathered}(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \Psi; \mathcal{E}] = \{(\tau - \mathrm{LIM}_{\xi \uparrow t})[\Psi(\xi)] :\ t \in T_*^{(-)}[\mathcal{E}]\} \cup \\ \cup \{(\tau - \mathrm{LIM}_{\xi \downarrow t})[\Psi(\xi)] :\ t \in T_*^{(+)}[\mathcal{E}]\} \cup \Psi^1(E_0).\end{gathered} \tag{4.40}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\tau \in (\mathbf{top})[\mathbf{H}]$. Введем следующие вспомогательные обозначения

$$\mathbb{H}_- \triangleq \left\{(\tau - \mathrm{LIM}_{\xi \uparrow t})[\Psi(\xi)] :\ t \in T_*^{(-)}[\mathcal{E}]\right\}, \tag{4.41}$$

$$\mathbb{H}_+ \triangleq \left\{(\tau - \mathrm{LIM}_{\xi \downarrow t})[\Psi(\xi)] :\ t \in T_*^{(+)}[\mathcal{E}]\right\}; \tag{4.42}$$

$\mathbb{H}_- \in \mathcal{P}(\mathbf{H})$, $\mathbb{H}_+ \in \mathcal{P}(\mathbf{H})$. С учетом теоремы 3.1 и предложения 4.1 имеем равенство

$$\begin{gathered}(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \Psi; \mathcal{E}] = \varphi_{\lim}[\Psi]^1\left(\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}]\right) \cup \\ \cup \varphi_{\lim}[\Psi]^1\left(\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}]\right) \cup \varphi_{\lim}[\Psi]^1\left(((E, \mathcal{A}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(E_0)\right).\end{gathered} \tag{4.43}$$

Из (2.2) вытекает следующая очевидная цепочка равенств

$$\varphi_{\lim}[\Psi]^1\left(((E,\mathcal{A})-\mathrm{ult})[\cdot]^1(E_0)\right)=(\varphi_{\lim}[\Psi]\circ((E,\mathcal{A})-\mathrm{ult})\,[\cdot])^1(E_0)=\Psi^1(E_0). \tag{4.44}$$

Далее, из (4.6), (4.31) и (4.41) следует равенство

$$\varphi_{\lim}[\Psi]^1\left(\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}]\right)=\mathbb{H}_-. \tag{4.45}$$

В самом деле, пусть $y_*\in\varphi_{\lim}[\Psi]^1\left(\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}]\right)$. Тогда $y_*\in\mathbf{H}$ и для некоторого $\mathcal{U}_*\in\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}]$ справедливо равенство $y_*=\varphi_{\lim}[\Psi](\mathcal{U}_*)$, где согласно (4.6) $\mathcal{U}_*=(E-\mathbf{fi})\left[\mathcal{J}_{t_*}^{(-)}|\mathcal{A}\right]$ для некоторого $t_*\in T_*^{(-)}[\mathcal{E}]$. В итоге (см. (4.31), (4.41))

$$y_*=\varphi_{\lim}[\Psi]\left((E-\mathbf{fi})[\mathcal{J}_{t_*}^{(-)}|\mathcal{A}]\right)=(\tau-\mathrm{LIM}_{\xi\uparrow t_*})[\Psi(\xi)]\in\mathbb{H}_-.$$

Тем самым установлено, что $\varphi_{\lim}[\Psi]^1\left(\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}]\right)\subset\mathbb{H}_-$. Пусть теперь $y^*\in\mathbb{H}_-$, а $t^*\in T_*^{(-)}[\mathcal{E}]$ обладает (см. (4.41)) свойством

$$y^*=(\tau-\mathrm{LIM}_{\xi\uparrow t^*})[\Psi(\xi)]. \tag{4.46}$$

Тогда согласно (4.6) $\mathcal{V}\overset{\triangle}{=}(E-\mathbf{fi})[\mathcal{J}_{t^*}^{(-)}|\mathcal{A}]\in\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}]$, причем (поскольку $t^*\in\,]a,b]$ в силу (4.5)) из (4.31) и (4.46) следует равенство $y^*=\varphi_{\lim}[\Psi](\mathcal{V})$, откуда, в свою очередь, имеем включение $y^*\in\varphi_{\lim}[\Psi]^1\left(\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}]\right)$. Итак, $\mathbb{H}_-\subset\varphi_{\lim}[\Psi]^1\left(\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(-)}[\mathcal{E}]\right)$, чем и завершается проверка требуемого равенства (4.45).

Заметим теперь, что из (4.6), (4.39) и (4.42) вытекает равенство

$$\varphi_{\lim}[\Psi]^1\left(\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}]\right)=\mathbb{H}_+. \tag{4.47}$$

Действительно, пусть $y_0\in\varphi_{\lim}[\Psi]^1(\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}])$; тогда $y_0=\varphi_{\lim}[\Psi](\mathcal{U}_0)$ для некоторого $\mathcal{U}_0\in\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}]$. Согласно (4.6) $\mathcal{U}_0=(E-\mathbf{fi})[\mathcal{J}_{t_0}^{(+)}|\mathcal{A}]$ для некоторого $t_0\in T_*^{(+)}[\mathcal{E}]$, а потому согласно (4.42)

$$(\tau-\mathrm{LIM}_{\xi\downarrow t_0})[\Psi(\xi)]\in\mathbb{H}_+. \tag{4.48}$$

С другой стороны, согласно (4.39) имеем (поскольку $t_0\in[a,b[$ в силу (4.5)) цепочку равенств

$$y_0=\varphi_{\lim}[\Psi]\left((E-\mathbf{fi})[\mathcal{J}_{t_0}^{(+)}|\mathcal{A}]\right)=(\tau-\mathrm{LIM}_{\xi\downarrow t_0})[\Psi(\xi)],$$

откуда с учетом (4.48) следует включение $y_0\in\mathbb{H}_+$, чем завершается проверка вложения

$$\varphi_{\lim}[\Psi]^1\left(\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}]\right)\subset\mathbb{H}_+. \tag{4.49}$$

Выберем произвольно $y^0\in\mathbb{H}_+$. Тогда $y^0\in\mathbf{H}$ и при этом справедливо равенство

$$y^0=(\tau-\mathrm{LIM}_{\xi\downarrow t^0})[\Psi(\xi)], \tag{4.50}$$

где $t^0\in T_*^{+}[\mathcal{E}]$. С учетом (4.6) имеем у/ф $\mathcal{U}^0\overset{\triangle}{=}(E-\mathbf{fi})[\mathcal{J}_{t^0}^{(+)}|\mathcal{A}]\in\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}]$. Поскольку $t^0\in[a,b[$ в силу (4.5), из (4.39) вытекает, что

$$(\tau-\mathrm{LIM}_{\xi\downarrow t^0})[\Psi(\xi)]=\varphi_{\lim}[\Psi](\mathcal{U}^0)\in\varphi_{\lim}[\Psi]^1\left(\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}]\right),$$

чем и завершается проверка вложения $\mathbb{H}_+\subset\varphi_{\lim}[\Psi]^1\left(\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}^{(+)}[\mathcal{E}]\right)$. С учетом (4.49) получаем требуемое равенство (4.47). Комбинируя (4.43) – (4.45) и (4.47), мы получаем требуемое (см. (4.41), (4.42)) равенство $(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\Psi;\mathcal{E}]=\mathbb{H}_-\cup\mathbb{H}_+\cup\Psi^1(E_0)$. □

В заключении раздела коснемся некоторых вопросов, связанных с конкретным выбором отображения Ψ и семейства $\mathcal{E}$; в этой связи приведем два замечания.

Замечание 4.2. В качестве конкретного варианта триплета $(\mathbf{H}, \tau, \Psi)$ отметим конструкцию заключительной части раздела 3 (см. замечание 3.1) при условии $E = [a, b]$, принятом в настоящем разделе. Речь пойдет о случае, когда заданы полное метрическое пространство $(\mathbb{H}, \rho)$, $\mathbb{H} \neq \varnothing$, и непустое множество Γ (множество индексов); $\mathbf{H}$ определяется при этом в виде $\mathbb{H}^{\Gamma}$, а τ есть топология тихоновской степени метризуемого ТП $(\mathbb{H}, \mathcal{T})$, где $\mathcal{T}$ — метрическая топология $\mathbb{H}$, порожденная (индуцированная [22, с. 371]) метрикой ρ. Кроме того, как и в замечании 3.1, полагаем заданными (ярусные) отображения: $f_\gamma \in B(E, \mathcal{A}, \mathbb{H}, \rho)$ $\forall \gamma \in \Gamma$. Отображение Ψ отождествляется с (3.11) и обладает требуемым свойством $\Psi \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{A}; \mathbf{H}; \tau]$. Прочие элементы данной конкретизации легко извлекаются из построений раздела 3. Заметим, что в качестве $(\mathbb{H}, \rho)$ можно, в частности, использовать вещественную прямую $\mathbb{R}$ с метрикой-модулем.

Замечание 4.3. Напомним, что в отношении (непустого) семейства $\mathcal{E}$ предполагалось выполненным условие $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Отметим одну естественную возможность построения счетного семейства с упомянутым свойством.

Пусть $\mathfrak{A} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{A} \setminus \{\varnothing\}$ и при этом $\mathbb{A} \stackrel{\triangle}{=} \big\{m \in \mathfrak{A}^{\mathfrak{A}} \mid m(A) \subset A \ \ \forall A \in \mathfrak{A}\big\}$. Пусть, кроме того, задана последовательность отображений из $\mathbb{A}$: фиксируем последовательность $(m_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$. Фиксируя, кроме того, $A_0 \in \mathfrak{A}$, конструируем последовательность $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} : \ \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{A}$ посредством рекуррентной процедуры: $A_s = m_s(A_{s-1})$ $\forall s \in \mathbb{N}$. Полагаем затем $\mathcal{E} \stackrel{\triangle}{=} \{A_k : \ k \in \mathbb{N}\}$, получая линейно упорядоченное по вложению непустое подсемейство $\mathcal{A}$ (в частности, $\mathcal{E} \in \beta^0_{\mathcal{A}}[E]$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 518 с.
4. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
5. Даффин Р.Дж. Бесконечные программы // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Иностранная литература, 1959. С. 263–267.
6. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
7. Ченцов А.Г. Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 268–293.
8. Бастрыков Е.С. О некоторых точках расширения Белла счетного дискретного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 4. С. 3–6.
9. Грызлов А.А., Бастрыков Е.С., Головастов Р.А. О точках одного бикомпактного расширения $\mathbb{N}$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17.
10. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. 1980. Vol. 5. P. 11–25.
11. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
12. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 368 с.
13. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. М.: Высшая школа, 1979. 336 с.
14. Келли Дж.Л. Общая топология. М.: Наука, 1981. 431 с.
15. Ченцов А.Г. Конструирование операций предельного перехода с использованием ультрафильтров измеримых пространств // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 208–222.
16. Меленцов А.А., Байдосов В.А., Змеев Г.М. Элементы теории меры и интеграла. Свердловск: УрГУ, 1980. 100 с.
17. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры. I. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2008. 388 с.
18. Ченцов А.Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142.

19. Ченцов А.Г. Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4. С. 293–311.
20. Ченцов А.Г. Расширения абстрактных задач о достижиости: несеквенциальная версия // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13. № 2. С. 184–217.
21. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры. II. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2010. 541 с.
22. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
23. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.

Поступила в редакцию 10.11.2011

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, заведующий отделом управляемых систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

A. G. Chentsov
About an example of the attraction set construction with employment of Stone space

Keywords: attraction set, constraints of asymptotic character, ultrafilter.

Mathematical Subject Classifications: 28A33

The extension construction of the abstract problem of attainability realized with employment of the Stone compactum (the space of ultrafilters in the traditional equipment) is considered. The questions connected with the structure of attraction sets are investigated; these attraction sets define possibilities for attainability of desired states in topological space under employment of asymptotic analogs of usual solutions. Constraints of asymptotic character are given. This constraints can be arising under the weakening of standard constraints used in control theory (the natural prototype of the investigated abstract problem is the problem about the construction of the asymptotic analog of the attainability domain for the control system under vanishingly small weakening of some constraints on the choice of the programmed control). Using the natural modification of Warga approach, we can introduce (along with precise solutions) so-called approximate solutions in the form of sequences of usual solutions satisfying the conditions (realizing in the totality «asymptotic constraints») «with reinforcing exactness». Sometimes, the employment of only such (sequential) approximate solutions can be insufficient. Nets or filters are required. The last objects are used as the basic type of (asymptotic in essence) solutions in this investigation under construction of attraction sets in the attainability problem with constraints of asymptotic character. And what is more, in these constructions, we can confine ourselves to the employment of ultrafilters. For a particular case, on this basis, the concrete structure of attraction set is established.

REFERENCES

1. Warga J. *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami* (Optimal control of differential and functional equations), Moscow: Nauka, 1977, 624 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
3. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi. Zadacha o minimume garantirovannogo rezul'tata* (Control of dynamic systems. Problem of the minimum guaranteed result), Moscow: Nauka, 1985, 518 p.
4. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Optimization guarantees in control problems), Moscow: Nauka, 1981, 287 p.
5. Duffin R.J. Infinite programs, *Linear inequalities and related systems*, Annals of Mathematics Studies, no. 38, Princeton Univ. Press, 1956, pp. 157–170.
6. Gol'shtein E.G. *Teoriya dvoistvennosti v matematicheskom programmirovanii i ee prilozheniya* (Duality theory in mathematical programming and its applications), Moscow: Nauka, 1971, 351 p.
7. Chentsov A.G. Ultrafilters of measurable spaces as generalized solutions in problems with constraints of asymptotic character, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, Yekaterinburg, 2011, vol. 17, no. 1, pp. 268–293.

8. Bastrykov E.S. About some points of Bell's compactification of countable discrete space, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 4, pp. 3–6.

9. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. About points of compactification of ℕ, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 10–17.

10. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight, *Topology Proceedings*, 1980, vol. 5, pp. 11–25.

11. Burbaki N. *Obshchaya topologiya. Osnovnye struktury* (General topology. The basic structures), Moscow: Nauka, 1968, 272 p.

12. Aleksandrov P.S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* (Introduction in sets theory and general topology), Moscow: Izd. LKI, 2008, 368 p.

13. Aleksandryan R.A., Mirzakhanyan E.A. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Vysshaya shkola, 1979, 336 p.

14. Kelli J.L. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Nauka, 1981, 431 p.

15. Chentsov A.G. Constructing of the limit passage operation with employment of ultrafilters of measurable spaces, *Avtomatika i Telemekhanika*, 2007, no. 11, pp. 208–222.

16. Melentsov A.A., Baidosov V.A., Zmeev G.M. *Elementy teorii mery i integrala* (Elements of measure theory and integral), Sverdlovsk: Ural State University, 1980, 100 p.

17. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, I* (Elements of a finitely additive measure theory, I), Yekaterinburg: USTU–UPI, 2008, 388 p.

18. Chentsov A.G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 113–142.

19. Chentsov A.G. About en example of representation of the ultrafilter space of sets algebra, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, Yekaterinburg, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 293–311.

20. Chentsov A.G. Extension of abstract problems of attainability: nonsequential version, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, Yekaterinburg, 2007, vol. 13, no. 2, pp. 184–217.

21. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, II* (Elements of a finitely additive measure theory, II), Yekaterinburg: USTU–UPI, 2010, 541 p.

22. Engelking R. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Mir, 1986, 751 p.

23. Neve J. *Matematicheskie osnovy teorii veroyatnostei* (Mathematical foundations of probability theory), Moscow: Mir, 1969, 309 p.

Received 10.11.2011

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru