УДК 517.977.58

© *А. В. Ушаков*

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ РАЗРЕШАЮЩИХ УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О СБЛИЖЕНИИ [1]

Рассматривается стационарная управляемая система в евклидовом пространстве, заданная на конечном промежутке времени. Изучается одна из центральных в теории управления задач — задача о сближении управляемой системы с множеством в фазовом пространстве системы в фиксированный (конечный) момент времени. Эта задача тесно связана с многими ключевыми задачами теории управления, например, с задачей об оптимальном быстродействии. В связи с этим представляется важным иметь эффективные алгоритмы построения решений этой задачи. Из-за сложности задачи невозможно аналитическое описание решений даже в относительно простых случаях. Построение приближенных решений задачи связано с конструированием интегральной воронки управляемой системы, но обращенной во времени. В работе приводится один алгоритм приближенного построения интегральной воронки, представляющей собой конечную аппроксимацию множества разрешимости задачи о сближении. В работе также описана процедура приближенного вычисления разрешающего управления, которая включает в себя запоминание локальных управлений. Приводится иллюстрирующий пример механической управляемой системы.

Ключевые слова: задача о сближении, управляемая система, множество достижимости, интегральная воронка, управление, обратный маятник.

Введение

Рассматривается стационарная управляемая система в евклидовом пространстве, заданная на конечном промежутке времени. Изучается одна из центральных в теории управления задач — задача о сближении управляемой системы с множеством в фазовом пространстве системы в фиксированный (конечный) момент времени. Эта задача тесно связана с другими важными задачами теории управления, в частности, с задачей о сближении системы с целевым множеством к фиксированному моменту времени и с задачей об оптимальном быстродействии. В связи с этим представляется важным иметь эффективные алгоритмы построения решений в задаче о сближении в фиксированный момент времени. При этом из-за сложности задачи (в общей постановке) речь идет не о точном вычислении решений, а о разработке алгоритмов приближенного вычисления решений. С задачей о сближении управляемой системы в фиксированный момент времени сопряжена задача о построении множества достижимости и интегральной воронки этой системы, но обращенной во времени. Настоящая работа есть продолжение и дополнение работы [1], в которой изложена общая схема приближенного вычисления множеств достижимости и интегральных воронок управляемых систем и дифференциальных включений. Здесь приведен один алгоритм приближенного вычисления множеств достижимости и интегральных воронок (для управляемой системы, обращенной во времени), представляющий собой конкретное воплощение упомянутой общей схемы. Фактически этот алгоритм можно трактовать как алгоритм приближенного попятного (по времени) вычисления множества W разрешимости задачи о сближении. При этом множество W^a, аппроксимирующее множество

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №11–01–00427–а «Алгоритмы и динамические процедуры решения в дифференциальных играх и задачах управления»), программы Президента РФ по поддержке ведущей научной школы №НШ–5927.2012.1 и программы фундаментальных исследований Президиума РАН №12–П–1–1002 «Управление в условиях конфликта и неопределенности. Позиционные стратегии и гамильтоновы конструкции в задачах управления» при финансовой поддержке УрО РАН.

W, формируется как конечное множество. В работе также описана процедура построения разрешающего управления для начальных позиций, содержащихся в W^a. Эта процедура дополняет многочисленные имеющиеся процедуры построения решений задачи о сближении, в частности, процедуры, основывающиеся на применении принципа экстремального прицеливания Н.Н. Красовского [2, 3]. Работа примыкает к исследованиям [4–8], посвященным вопросам инвариантности и оценки множеств достижимости и интегральных воронок управляемых систем.

§ 1. Задача о сближении

На промежутке $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$ задана управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n; \tag{1.1}$$

здесь u — вектор управления такой, что

$$u \in P, \tag{1.2}$$

P — компакт в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^P$.

Предполагается, что выполняются условия:

Условие 1. Вектор-функция $f(x, u)$ определена и непрерывна на $\mathbb{R}^n \times P$, и для любой ограниченной и замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ существует такая постоянная $L = L(\Omega) \in (0, \infty)$, что

$$\|f(x^{(1)}, u) - f(x^{(2)}, u)\| \leqslant L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \quad (x^{(i)}, u) \in \Omega \times P, \quad i = 1, 2. \tag{1.3}$$

Условие 2. Существует такая постоянная $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\|f(x, u)\| \leqslant \gamma(1 + \|x\|), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times P; \tag{1.4}$$

здесь $\|f\|$ — норма вектора f в евклидовом пространстве.

Условие 3. Множество $F(x) = \{f(x, u) : u \in P\}$ выпукло при любых $x \in \mathbb{R}^n$.

Сформулируем задачу о сближении системы (1.1) с компактом из $\mathbb{R}^n$ в момент времени ϑ. Предварительно напомним некоторые определения.

Под допустимым управлением $u(t)$ понимаем измеримую по Лебегу вектор-функцию $u(t) \in P$ на $[t_0, \vartheta]$. Движением системы (1.1) на $[t_0, \vartheta]$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ назовем такую абсолютно непрерывную вектор-функцию $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, что

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(x(t), u(t)\big)$$

почти всюду на $[t_0, \vartheta]$.

Пусть $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $t_0 \leqslant t_* \leqslant t^* \leqslant \vartheta$. Введем обозначения.

$X(t^*, t_*, x_*) = \big\{x^* \in \mathbb{R}^n : x^* = x(t^*)$, где $x(t)$ — движение системы (1.1) на $[t_*, \vartheta]$, $x(t_*) = x_*\big\}$ — множество достижимости системы (1.1) в момент t^*;

$X(t_*, x_*) = \bigcup\limits_{t^* \in [t_*, \vartheta]} \big(t^*, X\big(t^*, t_*, x_*\big)\big)$ — интегральная воронка системы (1.1) с исходной позицией (t_*, x_*); здесь $(t^*, X^*) = \{(t^*, x^*) : x^* \in \mathbb{R}^n\}$.

При условиях, наложенных на систему (1.1), множество достижимости $X(t^*, t_*, x_*)$ системы (1.1) совпадает с множеством достижимости $Y(t^*, t_*, x_*)$ дифференциального включения

$$\frac{dx}{dt} \in F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.5}$$

и, следовательно, является замкнутым множеством в $\mathbb{R}^n$. Поскольку $X(t^*, t_*, x_*)$ к тому же и ограничено, то $X(t^*, t_*, x_*)$ — компакт в $\mathbb{R}^n$ при любых $x_* \in \mathbb{R}^n, t_0 \leqslant t_* \leqslant t^* \leqslant \vartheta$. Множество $X(t_*, x_*) \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ также компакт в $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$.

Пусть M — некоторый компакт в $\mathbb{R}^n$.

Сформулируем две задачи, относящиеся к сближению системы (1.1) с множеством M в момент ϑ.

Задача 1. Требуется выделить в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ множество W всех тех исходных позиций (t_*, x_*) системы (1.1), для каждой из которых существует допустимое управление $u(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, переводящее систему (1.1) в момент ϑ на M (то есть $x(\vartheta) \in M$).

Задача 2. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Требуется выяснить, удовлетворяет ли x_0 включению $(t_0, x_0) \in W$, и найти допустимое управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, порождающее движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x_0$ системы (1.1), для которого $x^*(\vartheta) \in M$.

Для решения задачи 1 наряду с «прямым» временем $[t_0, \vartheta]$ будем рассматривать так называемое «обратное» время $\tau \in [t_0, \vartheta] : \tau = t_0 + \vartheta - t$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Поставим в соответствие системе (1.1) управляемую систему, отвечающую «обратному» времени τ

$$\frac{dz}{d\tau} = f^0(z, \upsilon), \quad \tau \in [t_0, \vartheta]; \tag{1.6}$$

здесь $f^0(z, \upsilon) = -f(z, \upsilon)$, $(z, \upsilon) \in \mathbb{R}^n \times P$.

Целевому множеству M поставим в соответствие интегральную воронку $Z = \bigcup\limits_{z_0 \in M} Z(t_0, z_0)$ системы (1.6); здесь $Z(t_0, z_0)$ - интегральная воронка системы (1.6) с начальной точкой (t_0, z_0).

Можно сказать, что множество $Z \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ есть интегральная воронка системы (1.6), начинающаяся в множестве (t_0, M).

Далее задаем множество $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ при помощи равенств

$$W(t) = Z(\tau), \quad t = t_0 + \vartheta - \tau, \quad \tau \in [t_0, \vartheta]. \tag{1.7}$$

Поскольку множество Z — компакт в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, то и W — компакт в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$. Кроме того, W есть множество разрешимости в задаче о сближении системы (1.1) с M в момент ϑ, то есть множество всех тех исходных позиций $(t_*, x_*) \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, из которых разрешима задача 2.

Учитывая компактность множества M и условия 1, 2, наложенные на систему (1.1), мы, не нарушая общности рассуждений, можем считать, что существует такая достаточно большая ограниченная и замкнутая область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, для которой множества Z и W содержатся в $\mathbb{R}^n$. Также можем считать, не нарушая общности рассуждений, что в области Ω содержатся и все те движения, которые возникают в разрешающей конструкции задачи о сближении. Именно эту область Ω мы имеем в виду в последующих построениях.

Согласно равенству (1.7) множество W может быть представлено в терминах «обратного» времени τ как интегральная воронка $Z = Z(t_0, M)$ системы (1.6).

Зададим на оси τ разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с равными шагами $\Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i = \Delta > 0$, $i = \overline{0, N-1}$, где диаметр Δ мал. Справедливо рекуррентное соотношение

$$Z(\tau_{i+1}) = Z\big(\tau_{i+1}, \tau_i, Z(\tau_i)\big), \quad i = \overline{0, N-1}; \tag{1.8}$$

здесь $Z\big(\tau_{i+1}, \tau_i, Z(\tau_i)\big)$ — множество достижимости системы (1.6) в момент τ_{i+1} с исходным множеством $Z(\tau_i)$, отвечающим моменту τ_i.

Если бы для разбиения Γ с малым диаметром Δ мы умели точно вычислять множества $Z(\tau_{i+1})$ по $Z(\tau_i)$ то мы бы, продвигаясь последовательно вперед по моментам τ_i разбиения Γ, вычислили множества $Z(\tau_{i+1}), i = \overline{0, N-1}$ — сечения интегральной воронки $Z(t_0, M)$. Однако даже при малых $\Delta > 0$ мы не умеем вычислять точно множества $Z(\tau_{i+1})$ (1.8).

Мы в состоянии осуществить лишь приближенное вычисление множеств $W(t_j) = Z(\tau_i)$, $i = \overline{0, N}$, $i + j = N$.

Придерживаясь равенства (1.8), как недостижимого идеала, и используя аналогичное ему рекуррентное соотношение, будем, продвигаясь вперед по времени τ, строить конечные аппроксимации (конечные множества) $Z^a(\tau_i)$, $i = \overline{0, N}$, множества $Z(\tau_i)$. При этом мы аппроксимируем и начальное сечение $Z(\tau_0) = M$ некоторым конечным множеством $Z^a(\tau_0) \subset Z(\tau_0)$.

Таким образом, пятясь во времени t от последнего множества $W^a(\vartheta) = Z^a(\tau_0) \subset M$, состоящего из конечного числа точек, мы получим последовательно аппроксимации $W^a(t_j) = Z^a(\tau_i)$, $j = \overline{N-1, 0}$, $i + j = N$, сечений $W(t_j)$ множества разрешимости W.

Множества $W^a(t_j) = Z^a(\tau_i)$ будем формировать как множества, состоящие из конечного числа точек, являющихся узлами некоторых ломаных Эйлера системы (1.6), начинающихся в момент τ_0 на множестве $Z^a(\tau_0)$.

Схема построения аппроксимаций $W^a(t_j) = Z^a(\tau_i)$, $j = \overline{N-1, 0}$, $i + j = N$, достаточно общего вида, в том числе аппроксимаций, представляющих собой несчетные множества в $\mathbb{R}^n$, изложена в §1 работы [1].

Здесь мы опишем эту схему в применении к ситуации, когда множества $Z^a(\tau_i)$ формируются как конечные множества в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $t_0 \leqslant \tau_* \leqslant \tau^* \leqslant \vartheta$, $\delta = \tau^* - \tau_* > 0$, $z_* \in \mathbb{R}^n$ и Z_* — конечные множества в $\mathbb{R}^n$. Зададим многозначное отображение $(\tau^*, \tau_*, Z_*) \mapsto Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ равенством

$$Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, Z_*) = \bigcup_{z_* \in Z_*} Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, z_*),$$

где $Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, z_*) = z_* - \delta F^{(\delta)}(z_*)$ и отображение $z_* \mapsto F^{(\delta)}(z_*)$ есть некоторая конечнозначная аппроксимация отображения $z_* \mapsto F(z_*)$ на Ω, такая что

$$F^{(\delta)}(z_*) \subset F(z_*) \quad \text{при} \quad z_* \in \Omega \quad \text{и} \quad \sup_{z_* \in \Omega} d\big(F^{(\delta)}(z_*), F(z_*)\big) \leqslant \varphi^*(\delta).$$

Здесь $d(F^{(1)}, F^{(2)})$ — хаусдорфово расстояние между компактами $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ в $\mathbb{R}^n$, $\varphi^*(\delta) \downarrow 0$ при $\varphi \downarrow 0$.

Далее каждое множество $Z^a(\tau_{i+1}), i = \overline{0, N-1}$, задаем рекуррентным соотношением

$$Z^a(\tau_{i+1}) = Z^{(\Delta)}\big(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^a(\tau_i)\big). \tag{1.9}$$

Начальное множество $Z^a(\tau_0)$ в (1.9) задаем как множество в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее неравенству $d(Z^a(\tau_0), Z(\tau_0)) \leqslant \sigma^*(\Delta)$, где $\sigma^*(\Delta) \downarrow 0$ при $\Delta \downarrow 0$. Функцию $\sigma^*(\Delta)$ выбираем по своему усмотрению; она влияет на скорость сходимости приближений $Z^a(\tau_0)$ к $Z(\tau_0)$.

Из работы [1] непосредственно вытекает, что при тех условиях, которые наложены на систему (1.1) и множества $Z^a(\tau_i), i = \overline{0, N}$, справедлива оценка

$$d(Z^a(\tau_0), Z(\tau_0)) \leqslant e^{L(\tau_i - \tau_0)}\{\sigma^*(\Delta) + (\tau_i - \tau_0)(\varphi^*(\Delta) + LK\Delta)\}; \tag{1.10}$$

здесь $L = L(\Omega)$ и $K = \max\limits_{(z,u) \in \Omega \times P} \|f(z, u)\|$.

Из оценки (1.10) и определения функций $\varphi^*(\delta)$, $\sigma^*(\delta)$ на $(0, \infty)$ следует, что $d\big(Z^a(\tau_0), Z(\tau_0)\big) \mapsto 0$ и при этом порядок стремления к нулю величины $d\big(Z(\tau_i), Z^a(\tau_i)\big)$при $\Delta \downarrow 0$ определяется порядком стремления к нулю функций $\varphi^*(\Delta)$, $\sigma^*(\Delta)$ и $KL\Delta$, а точнее — минимальным из порядков этих функций при $\Delta \downarrow 0$. Так, например, если порядок функций $\varphi^*(\Delta)$ и $\sigma^*(\Delta)$ не ниже, чем первый порядок, то порядок стремления к нулю правой части оценки (1.10) равен единице. Если же порядок функций $\varphi^*(\Delta)$ и $\sigma^*(\Delta)$ ниже, чем первый, то порядок стремления к нулю правой части оценки (1.10) будет равен минимальному из порядков функций $\varphi^*(\Delta)$ и $\sigma^*(\Delta)$ при $\Delta \downarrow 0$. Для множеств $W(t_j)$ и их аппроксимаций $W^a(t_j)$, $t_j + t_i = t_0 + \vartheta$, $i = \overline{0, N}$, оценка (1.10) принимает вид

$$d\Big(W\big(t_j, W^a(t_j)\big)\Big) \leqslant e^{L(\vartheta - t_j)}\{\sigma^*(\Delta) + (\vartheta - t_j)(\varphi^*(\Delta) + LK\Delta)\}. \tag{1.11}$$

Для иллюстрации приведенных рассуждений и выкладок, относящихся к приближенному вычислению множеств $W(t_j)$, $j = \overline{0, N}$, рассмотрим частный случай управляемой системы (1.1) на $[t_0, \vartheta]$ — систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + B(x)u; \tag{1.12}$$

здесь $u \in P = \left\{ u = \mathrm{col}\,(u_1, \ldots, u_p) \in \mathbb{R}^P : \max\limits_{i=\overline{1,p}} |u_j| \leqslant \mu \right\}$, где $\mu \in (0, \infty)$.

Предполагается, что вектор-функция $f(x)$ и матрица-функция $B(x)$ таковы, что $f(x, u) = f(x) + B(x)u$ удовлетворяет условиям 1 и 2; условие 3 выполняется для (1.12) очевидным образом.

Множества $W(t_j)$, $j = \overline{0, N}$ (t_j — момент разбиения Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром Δ) связаны с сечениями $Z(\tau_i)$, $i + j = N$ интегральной воронки $Z = Z(t_0, M)$ системы (1.6) равенством

$$W(t_j) = Z(\tau_i), \quad i = \overline{0, N}, \quad j + i = N.$$

В этом случае, как и в случае системы (1.1), мы конструируем аппроксимации $W^a(t_j)$ множеств $W(t_j)$, как аппроксимации $Z^a(\tau_i)$ множеств $Z(\tau_i)$, согласно равенствам

$$W^a(t_j) = Z^a(\tau_i), \quad i = \overline{0, N}, \quad j + i = N$$

последовательно по шагам, начиная с $W^a(t_N) = Z^a(t_0)$, по рекуррентной формуле (1.9).

Задав некоторую функцию $\sigma^*(\Delta) \downarrow 0$ при $\Delta \downarrow 0$, определяем множество $Z^a(t_0)$, состоящее из конечного числа точек и удовлетворяющее неравенству

$$d\big(Z^a(t_0), Z(t_0)\big) \leqslant \sigma^*(\Delta). \tag{1.13}$$

Множества $Z^a(\tau_{i+1})$, $i = \overline{0, N-1}$ определяются, согласно (1.9), как множества

$$Z^{(\Delta)}\big(\tau_{i+1}, \tau_i, z(\tau_i)\big) = \bigcup_{z(\tau_i) \in Z^a(\tau_i)} Z^{(\Delta)}\big(\tau_{i+1}, \tau_i, z(\tau_i)\big),$$

где $Z^{(\Delta)}\big(\tau_{i+1}, \tau_i, z(\tau_i)\big) = z(\tau_i) - \Delta F^{(\Delta)}(z(\tau_i))$.

При этом отображение $z_* \mapsto F^{(\Delta)}(z_*)$ — конечнозначная аппроксимация отображения $z_* \mapsto F(z_*) = f(z_*) - \Delta B(z_*)P$ на множестве Ω удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} F^{(\Delta)}(z_*) \subset F(z_*), \quad z_* \in \Omega; \\ \sup_{z_* \in \Omega} d\big(F^{(\Delta)}(z_*), F(z_*)\big) \leqslant \varphi^*(\Delta), \text{ где } \varphi^*(\Delta) \downarrow 0 \text{ при } \Delta \downarrow 0. \end{gathered} \tag{1.14}$$

Считаем, что функция $\varphi^*(\Delta)$ нами уже задана, подобно тому как уже задана функция $\sigma^*(\Delta)$. Опишем подробнее отображение $z_* \mapsto F^{(\Delta)}(z_*)$ на Ω. Для этого введем множество $P^{(\Delta)} \subset P$, которое задает отображение

$$z_* \mapsto F^{(\Delta)}(z_*) = z_* - \Delta B(z_*) P^{(\Delta)}. \tag{1.15}$$

Множество $P^{(\Delta)}$ в (1.15) определим как конечную равномерную сетку точек в кубе P; эти точки являются вершинами маленьких кубов одинакового размера, на которые разбивается куб P.

Итак, введем разбиение $\mathcal{J} = \{p_0 = -\mu, p_1, \ldots, p_k, \ldots, p_{\rho-1} = +\mu\}$ отрезка $[-\mu, +\mu]$, где $p_{k+1} = p_k + \dfrac{2\mu}{\rho - 1}$, $k = \overline{0, \rho - 1}$. Согласно определению разбиение $\mathcal{J}$ состоит из ρ равномерно распределенных в $[-\mu, +\mu]$ точек p_k.

Полагаем $P^{(\Delta)} = \underbrace{\mathcal{J} \times \mathcal{J} \times \ldots \times \mathcal{J}}_{p \text{ раз}} \subset P$. При таком определении сетки $P^{(\Delta)}$ справедливо $d\big(F(z_*), F^{(\Delta)}(z_*)\big) = d(B(z_*)P, B(z_*)P^{(\Delta)}) = h(B(z_*)P, B(z_*)P^{(\Delta)}) \leqslant K_* h(P, P^{(\Delta)})$, где $K_* = \max\limits_{z_* \in \Omega} \|B(z_*)\| \in (0, \infty)$; $\|B(z_*)\|$ - норма матрицы $B(z_*)$.

Учитывая равенство $h(P, P^{(\Delta)}) = \dfrac{\sqrt{p}}{\rho - 1}\mu$, получаем при любых $z_* \in \Omega$ оценку

$$d\big(F(z_*), F^{(\Delta)}(z_*)\big) \leqslant K_* \frac{\sqrt{p}}{\rho - 1}\mu. \tag{1.16}$$

Принимая во внимание (1.16), получаем, что для выполнения второго из соотношений (1.14) при заданных $\varphi^*(\delta)$ и $P^{(\Delta)}$ достаточно, чтобы

$$K_*\frac{\sqrt{p}}{\rho-1}\mu \leqslant \varphi^*(\delta). \tag{1.17}$$

Следовательно, для сетки $P^{(\Delta)}$, которая отвечает разбиению $\mathcal{J}$ отрезка $[-\mu,+\mu]$ с числом точек p_k, равным ρ и удовлетворяющим неравенству

$$\rho \geqslant K_*\frac{\sqrt{p}}{\varphi^*(\Delta)}\mu + 1, \tag{1.18}$$

справедлива оценка

$$\sup_{z_*\in\Omega} d\bigl(F(z_*),F^{(\Delta)}(z_*)\bigr) \leqslant \varphi^*(\Delta).$$

С помощью такого отображения $z_* \mapsto F^{(\Delta)}(z_*)$ определим конечные множества $W^a(t_j) = Z^a(\tau_i)$, $i+j=N$, $i=\overline{0,N}$. Оценим число точек в $W^a(t_j)$, $j=\overline{0,N}$. Для этого обозначены мощность произвольного множества Z через $m(Z)$. Для каждого множества $Z^{(\Delta)}\bigl(\tau_{i+1},\tau_i,z(\tau_i)\bigr)$, $z(\tau_i)\in\Omega$, справедливо $m\Bigl(Z^{(\Delta)}\bigl(\tau_{i+1},\tau_i,z(\tau_i)\bigr)\Bigr) \leqslant \rho^p$ и при этом не исключено равенство. В случае выполнения равенства может оказаться, что

$$m\bigl(Z^a(\tau_{i+1})\bigr) = m\bigl(Z^a(\tau_0)\bigr)(\rho^p)^{i+1}.$$

В этом случае при $i=N-1$ получаем

$$m\bigl(Z^a(\tau_N)\bigr) = m\bigl(Z^a(\tau_0)\bigr)(\rho^p)^{Np}.$$

Если числа $m\bigl(Z^a(\tau_0)\bigr)$, ρ, p, N велики, то вполне может оказаться, что вычисление множества $Z^a(\vartheta)=Z^a(\tau_N)$ невозможно. Возникает необходимость в прореживании $Z^a(\tau_i), i=\overline{0,N}$, для того чтобы иметь множества, доступные для вычисления. Опишем одну такую процедуру прореживания множеств $Z^a(\tau_i)$.

Разобьем пространство $\mathbb{R}^n$ на кубы $U_\alpha, \alpha\in\mathbb{N}$ с длиной ребер $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\varkappa(\Delta)$; здесь $\varkappa(\delta)$ — некоторая выбранная нами функция, такая что $\varkappa(\delta)=\delta\varkappa^*(\delta)$, $\varkappa^*(\delta)\downarrow 0$ при $\delta\downarrow 0$. Обозначим через $S^{(\Delta)}$ сетку в $\mathbb{R}^n$ — множество, состоящее из вершин кубов U_α, $\alpha\in\mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Каждому конечному множеству Z в $\mathbb{R}^n$ сопоставим множество $H^{(\Delta)}(Z)$ в $\mathbb{R}^n$, организованное по следующей схеме. Обозначив $\mathcal{A}=\{\alpha\in N : U_\alpha\bigcap Z\neq\varnothing\}$, выделим в каждом кубе U_α, $\alpha\in\mathcal{A}$ по точке z_α из Z. Из выделенных точек z_α, $\alpha\in\mathcal{A}$ составим множество $H^{(\Delta)}(Z)$. Отображение $Z\mapsto H^{(\Delta)}(Z)$ введено для сокращения элементов множества Z. Можно трактовать это отображение как операцию прореживания множества Z при помощи сетки $S^{(\Delta)}$. Эта сетка предназначена служить своеобразным ситом. При таком прореживании число элементов множества Z во всяком случае не увеличивается и в большинстве случаев уменьшается: $m\bigl(H^{(\Delta)}(Z)\bigr)\leqslant m(Z)$.

Из определения множества $H^{(\Delta)}(Z)$ следует

$$d\bigl(Z,H^{(\Delta)}(Z)\bigr) = h\bigl(Z,H^{(\Delta)}(Z)\bigr) \leqslant \varkappa(\Delta). \tag{1.19}$$

Зададим множества $\mathcal{Z}^a(\tau_i)$, $i=\overline{0,N}$ в $\mathbb{R}^n$ соотношениями

$$\mathcal{Z}^a(\tau_0) = H^{(\Delta)}\bigl(Z^a(\tau_0)\bigr), \tag{1.20}$$

$\mathcal{Z}^a(\tau_{i+1}) = H^{(\Delta)}\Bigl(Z^\Delta\bigl(\tau_{i+1},\tau_i,\mathcal{Z}^a(\tau_i)\bigr)\Bigr)$, $i=\overline{0,N-1}$.

Множества $\mathcal{Z}^a(\tau_i)$, $i=\overline{0,N}$ конечны и $m(\mathcal{Z}^a(\tau_i))\leqslant m(\mathcal{A})$ при $i=\overline{0,N}$. Во многих случаях число $m(\mathcal{A})$ может быть не очень большим, так что множества $\mathcal{Z}^a(\tau_i)$, $i=\overline{0,N}$ оказываются вполне приемлемыми для вычисления.

Считая, что множества $\mathcal{Z}^a(\tau_i)$, $i=\overline{0,N}$ приемлемы для вычисления, приступим к выводу оценки (сверху) рассогласования этих множеств и множеств $Z(\tau_i)$, $i=\overline{0,N}$. Для этого сначала оценим сверху величину рассогласования множеств $Z^a(\tau_i)$ и $\mathcal{Z}^a(\tau_i)$, $i=\overline{0,N}$. Для начального момента τ_0 разбиения Γ имеем

$$d\big(Z^a(\tau_0),\mathcal{Z}^a(\tau_0)\big)\leqslant\varkappa(\Delta). \tag{1.21}$$

Для следующего момента τ_1 разбиения Γ имеем

$$\begin{gathered}d\big(Z^a(\tau_1),\mathcal{Z}^a(\tau_1)\big)\leqslant d\Big(Z^{(\Delta)}\big(\tau_1,\tau_0,Z^a(\tau_0)\big),Z^{(\Delta)}\big(\tau_1,\tau_0,\mathcal{Z}^a(\tau_0)\big)\Big)+\\ +d\bigg(Z^{(\Delta)}\big(\tau_1,\tau_0,\mathcal{Z}^a(\tau_0)\big),H^{(\Delta)}\Big(Z^{(\Delta)}\big(\tau_1,\tau_0,\mathcal{Z}^a(\tau_0)\big)\Big)\bigg)\leqslant e^{L\Delta}d\big(Z^a(\tau_0),\mathcal{Z}^a(\tau_0)\big)+\\ +\varkappa(\Delta)\leqslant(1+e^{L\Delta})\varkappa(\Delta).\end{gathered} \tag{1.22}$$

Для момента τ_2 разбиения Γ имеем

$$\begin{gathered}d\big(Z^a(\tau_2),\mathcal{Z}^a(\tau_2)\big)\leqslant d\Big(Z^{(\Delta)}\big(\tau_2,\tau_1,Z^a(\tau_1)\big),Z^{(\Delta)}\big(\tau_2,\tau_1,\mathcal{Z}^a(\tau_1)\big)\Big)+\\ +d\bigg(Z^{(\Delta)}\big(\tau_2,\tau_1,\mathcal{Z}^a(\tau_1)\big),H^{(\Delta)}\Big(Z^{(\Delta)}\big(\tau_2,\tau_1,\mathcal{Z}^a(\tau_1)\big)\Big)\bigg)\leqslant e^{L\Delta}d\big(Z^a(\tau_1),\mathcal{Z}^a(\tau_1)\big)+\\ +\varkappa(\Delta)\leqslant(1+e^{L\Delta}+e^{2L\Delta})\varkappa(\Delta).\end{gathered} \tag{1.23}$$

Для моментов τ_i, $i=\overline{3,N}$, также справедлива оценка, аналогичная оценкам (1.21)—(1.23) для τ_i, $i=\overline{0,2}$

$$d\big(Z^a(\tau_i),\mathcal{Z}^a(\tau_i)\big)\leqslant\sum_{k=0}^{i}e^{kL\Delta}\varkappa(\Delta). \tag{1.24}$$

Из оценок (1.21)–(1.24) следует

$$d\big(Z^a(\tau_i),\mathcal{Z}^a(\tau_i)\big)\leqslant\frac{e^{(i+1)L\Delta}-1}{e^{L\Delta}-1}\varkappa(\Delta),\quad i=\overline{0,N}. \tag{1.25}$$

Считаем теперь, что разбиение Γ промежутка $[t_0,\vartheta]$ выбрано так, что его диаметр Δ удовлетворяет неравенству $\omega<\Delta\leqslant\dfrac{1}{L}\ln 2$. При таком выборе разбиения Γ получаем

$$\frac{e^{(i+1)L\Delta}-1}{e^{L\Delta}-1}\varkappa(\Delta)\leqslant\frac{2e^{L(\tau_i-t_0)}}{L\Delta},$$

и, значит, справедливо неравенство при $i=\overline{0,N}$

$$d\big(Z^a(\tau_i),\mathcal{Z}^a(\tau_i)\big)\leqslant\frac{2}{L}e^{L(\tau_i-t_0)}\varkappa^*(\Delta). \tag{1.26}$$

Введя обозначение $\mathcal{W}^a(t_j)=\mathcal{Z}^a(\tau_i)$, $i+j=N$, $i=\overline{0,N}$, запишем (1.26) в виде

$$d\big(W^a(t_j),\mathcal{W}^a(t_j)\big)\leqslant\frac{2}{L}e^{L(\vartheta-t_j)}\varkappa^*(\Delta),\quad j=\overline{0,N}. \tag{1.27}$$

Таким образом, мы оценили сверху величину рассогласования множеств $W^a(t_j)$ и $\mathcal{W}^a(t_j)$, $j=\overline{0,N}$. Теперь оценим величину рассогласования множеств $W(t_j)$ и $\mathcal{W}^a(t_j)$, $j=\overline{0,N}$. Из оценок (1.11) и (1.27) следует

$$d\big(W(t_j),\mathcal{W}^a(t_j)\big)\leqslant e^{L(\vartheta-t_j)}\{\sigma^*(\Delta)+\frac{2}{L}\varkappa^*(\Delta)+(\vartheta-t_j)(\varphi^*(\Delta)+LK\Delta)\},\quad j=\overline{0,N}. \tag{1.28}$$

Из (1.28) следует

$$\max_{j=\overline{0,N}}d\big(W(t_j),\mathcal{W}^a(t_j)\big)\mapsto 0 \text{ при } \Delta\downarrow 0$$

и, значит, последовательность $W^a(t_j)$, $j = \overline{0,N}$ является аппроксимирующей для последовательности $W(t_j)$, $j = \overline{0,N}$ при $\Delta \downarrow 0$, причем порядок сходимости к нулю величины $\max\limits_{j=\overline{0,N}} d(W(t_j), \mathcal{W}^a(t_j))$ при $\Delta \downarrow 0$ не ниже, чем минимальный из порядков величины $\sigma^*(\Delta)$, $\varkappa(\Delta)$, $\varkappa^*(\Delta)$ и Δ.

Если мы выберем величины $\sigma^*(\Delta)$, $\varkappa^*(\Delta)$, $\varphi^*(\Delta)$ порядков (по $\Delta \downarrow 0$) значительно меньших, чем 1, то порядок правой части оценки (1.28) будет мал. Это может повлечь медленную сходимость величины $\max\limits_{j=\overline{0,N}} d\big(W(t_j), \mathcal{W}^a(t_j)\big)$ к нулю при $\Delta \downarrow 0$, что нежелательно.

С другой стороны, выбор величин $\sigma^*(\Delta)$, $\varkappa^*(\Delta)$, $\varphi^*(\Delta)$ порядков (по $\Delta \downarrow 0$), близких к 1, может привести к существенному увеличению объема вычислений при построении аппроксимирующих множеств $\mathcal{W}^a(t_j)$, $j = \overline{0,N}$, что также нежелательно.

Принимая во внимание эти замечания, заключаем, что имеет смысл выбирать величины $\sigma^*(\Delta)$, $\varkappa^*(\Delta)$, $\varphi^*(\Delta)$ порядков $\gamma_i \in (0,1)$, $i = 1,2,3$, достаточно удаленных от 0 и 1. В качестве таких чисел γ_i можно выбрать, например, середину отрезка $[0,1]$, то есть $\dfrac{1}{2}$.

Этими замечаниями относительно выбора величин $\sigma^*(\Delta)$, $\varkappa^*(\Delta)$, $\varphi^*(\Delta)$ мы закончим рассуждения о приближенном вычислении множеств $W(t_j)$, $j = \overline{0,N}$ в задаче о сближении системы (1.12) с M.

В следующем разделе опишем процедуру построения разрешающего управления в задаче о сближении с M системы (1.12). В этой процедуре используются множества $\mathcal{W}^a(t_j)$, $j = \overline{0,N}$.

§ 2. Построение разрешающего управления в задаче о сближении системы (1.1) с множеством M

В этом параграфе исходим из того, что множества $\mathcal{W}^a(t_j) = \mathcal{Z}^a(\tau_i)$, $i + j = N$, $i = \overline{0,N}$, уже вычислены. Выберем произвольную точку $x^{(0)} \in \mathcal{W}^a(t_0)$; для нее найдется такая ломаная Эйлера $\overline{z}(\tau)$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$, уравнения (1.6), которая удовлетворяет краевому условию $\overline{z}(\tau_N) = x^{(0)}$, и узловые точки $\overline{z}^{(i)} = \overline{z}(\tau_i)$, $i = 0, N$ удовлетворяют включениям $\overline{z}^{(i)} \in \mathcal{Z}^a(\tau_i)$.

Ломаную $\overline{z}(\tau)$ запишем также в «прямом» времени t в виде $\overline{x}(t) = \overline{z}(\tau)$, $t + \tau = t_0 + \vartheta$, а ее узловые точки $\overline{z}^{(i)} = \overline{z}(\tau_i)$ в виде $\overline{x}^{(j)} = \overline{x}(t_j)$, $t_j + \tau_i = t_0 + \vartheta$, $i = \overline{0,N}$. Каждая точка $\overline{z}^{(i+1)}$, $i = \overline{0, N-1}$, ломаной $\overline{z}(\tau)$ удовлетворяет равенству

$$\overline{z}^{(i+1)} = \overline{z}^{(i)} - \Delta f(\overline{z}^{(i)}, v^{(i)}); \tag{2.1}$$

здесь $\overline{z}^{(i)} \in \mathcal{Z}^a(\tau_i)$, $v^{(i)} \in P^{(\Delta)}$. Положив $u^{(j-1)} = v^{(i)}$, $i + j = N - 1$, $i = \overline{0, N-1}$, запишем (2.1) в виде

$$\overline{x}^{(j-1)} = \overline{x}^{(j)} - \Delta f(\overline{x}^{(j)}, u^{(j-1)}). \tag{2.2}$$

Считаем, что вычислив точку $\overline{z}^{(i+1)}$, $i = \overline{0, N-1}$, по формуле (2.1), мы сохраняем в памяти ее родительскую пару $\overline{z}^{(i)}$, $v^{(i)}$. На другом языке это означает, что вычислив точку $\overline{x}(j-1)$ по формуле (2.2), мы сохраняем ее родительскую пару $\overline{x}^{(j)}$, $u^{(j-1)}$.

Такое допущение о возможности запоминания родительских пар есть важный момент при копировании разрешающего управления в задаче о сближении. Оно позволяет по точке $\overline{z}^{(N)} = \overline{z}(\tau_N) = x^{(0)}$ восстановить ломаную $\overline{z}(\tau)$ и кусочно-постоянное управление $v^*(t)$ ($v^*(\tau) = v^{(i)}$, $\tau \in [t_i, t_{i+1})$), порождающее эту ломаную на всем промежутке $[t_0, \vartheta]$.

Итак, рассмотрим конечную точку $\overline{z}^{(N)} = x^{(0)}$ ломаной Эйлера $\overline{z}(\tau)$ уравнения (1.6) на $[t_0, \vartheta]$. Отправляясь из этой точки $x^{(0)}$, построим ломаную Эйлера $\tilde{x}(t)$ уравнения (1.1) на $[t_0, \vartheta]$, используя при ее построении кусочно-постоянное управление $u^*(t)$ ($u^*(t) = u^{(j-1)} = v^{(i)}$ на $[t_{j-1}, t_j]$, $j + i = N - 1$, $i = \overline{0, N-1}$).

Звено ломаной $\overline{x}(t)$, $[t_{j-1}, t_j]$, $j = \overline{1,N}$ определяется равенством

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}^{(j-1)} + (t - t_{j-1}) f(\tilde{x}^{(j-1)}, u^{(j-1)}); \tag{2.3}$$

здесь обозначено $\tilde{x}^{(j)} = \tilde{x}(t_j)$, $\quad j = \overline{0,N}$.

Параллельно рассмотрим звено ломаной $\overline{x}(t)$, $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = \overline{1, N}$. Ломаная $\overline{x}(t)$ на $[t_{j-1}, t_j]$ определяется равенством $\overline{x}(t) = \overline{z}(\tau)$, где $t + \tau = t_0 + \vartheta$ и $\overline{z}(\tau)$ — звено ломаной Эйлера уравнения (1.6) на $[t_{j-1}, t_j]$, $i + j = N$, которое представимо в виде

$$\overline{z}(\tau) = \overline{z}^{(i)} - (\tau - \tau_i) f(\overline{z}^{(i)}, v^{(i)}). \tag{2.4}$$

Учитывая (2.4), звено ломаной $\overline{x}(t)$, $t \in [t_{j-1}, t_j]$ запишем в виде

$$\overline{x}(t) = \overline{x}^{(j)} - (t_j - t) f(\overline{x}^{(j)}, u^{(j-1)}). \tag{2.5}$$

Из (2.3), (2.5) следуют равенства при $j = \overline{1, N}$

$$\tilde{x}^{(j)} = \tilde{x}^{(j-1)} + \Delta f(\tilde{x}^{(j-1)}, u^{(j-1)}) \ , \qquad \overline{x}^{(j)} = \overline{x}^{(j-1)} + \Delta f(\overline{x}^{(j-1)}, u^{(j-1)}). \tag{2.6}$$

Далее сравним две ломаные $\tilde{x}(t)$ и $\overline{x}(t)$ в моменты $t_j \in \Gamma$, $j = \overline{0, N}$, то есть сравним узловые точки $\tilde{x}^{(j)}$ и $\overline{x}^{(j)}$ этих ломаных. Для этого введем величину $\rho_j = \|\tilde{x}^{(j)} - \overline{x}^{(j)}\|$, $j = \overline{0, N}$. Справедливо следующее неравенство при $j = \overline{1, N}$:

$$\begin{gathered} \rho_j \leqslant \rho_{j-1} + \Delta \|f(\tilde{x}^{(j-1)}, u^{(j-1)}) - f(\overline{x}^{(j)}, u^{(j-1)})\| \leqslant \\ \leqslant \rho_{j-1} + \Delta L \|\tilde{x}^{(j-1)} - \overline{x}^{(j)}\| = \rho_{j-1} + \Delta L (\|\tilde{x}^{(j-1)} - \overline{x}^{(j-1)}\| + \|\overline{x}^{(j)} - \overline{x}^{(j-1)}\|) \leqslant \\ \leqslant e^{L\Delta} \rho_{j-1} + \Delta L \|\Delta f(\overline{x}^{(j)}, u^{(j-1)})\| \leqslant e^{L\Delta} \rho_{j-1} + \tilde{\omega}(\Delta); \end{gathered} \tag{2.7}$$

здесь $\tilde{\omega}(\Delta) = LK\Delta^2$, $\Delta > 0$.

Заметим, что ломаные $\tilde{x}(t)$ и $\overline{x}(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ имеют одну и ту же начальную точку $x^{(0)} \in \mathcal{W}^a(t_0)$, откуда следует, что $\rho_0 = 0$. Учитывая равенство $\rho_0 = 0$ и неравенство (2.7), получаем последовательно

$$\begin{gathered} \rho_1 \leqslant \tilde{\omega}(\Delta), \\ \rho_2 \leqslant (1 + e^{L\Delta}) \tilde{\omega}(\Delta), \\ \rho_3 \leqslant e^{L\Delta}(1 + e^{L\Delta}) \tilde{\omega}(\Delta) + \tilde{\omega}(\Delta) = (1 + e^{L\Delta} + e^{2L\Delta}) \tilde{\omega}(\Delta). \end{gathered}$$

В общем случае при $j = \overline{1, N}$ оценка сверху величины ρ_j принимает вид

$$\rho_j \leqslant \frac{e^{Lj\Delta} - 1}{e^{L\Delta} - 1} \tilde{\omega}(\Delta) < e^{L(\vartheta - t_0)} K\Delta.$$

В частности, справедливо неравенство

$$\rho_N = \|\tilde{x}^{(N)} - \overline{x}^{(N)}\| < e^{L(\vartheta - t_0)} K\Delta. \tag{2.8}$$

Так как $\overline{x}^{(N)} = \overline{z}^{(0)} \in \mathcal{Z}^a(t_0) \subset Z^a(t_0) \subset Z(t_0)_{\sigma^*(\Delta)}$, то справедливо

$$\rho(\tilde{x}^{(N)}, M) \leqslant \|\tilde{x}^{(N)} - \overline{x}^{(N)}\| + \rho(\overline{x}^{(N)}, M) \leqslant e^{L(\vartheta - t_0)} K\Delta + \sigma^*(\Delta). \tag{2.9}$$

Обратим теперь внимание на движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x^{(0)}$ управляемой системы (1.1) на $[t_0, \vartheta]$, порожденное сконструированным выше кусочно-постоянным управлением $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$. Это движение удовлетворяет равенству на $[t_0, \vartheta]$

$$x^*(t) = x^{(0)} + \int_{t_0}^{t} f\big(x^*(\tau), u^*(\tau)\big)\, d\tau. \tag{2.10}$$

Можно показать, сравнивая движение $x^*(t)$ и ломаную Эйлера $\tilde{x}(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, что

$$\|x^*(t_N) - \tilde{x}(t_N)\| = \|x^*(t_N) - \tilde{x}^{(N)}\| < e^{L(\vartheta - t_0)} K\Delta. \tag{2.11}$$

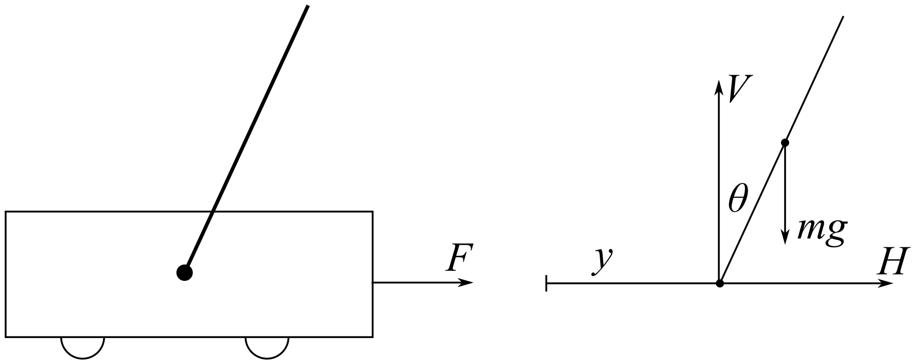

Рис. 1. Обратный маятник с подвижной точкой подвеса

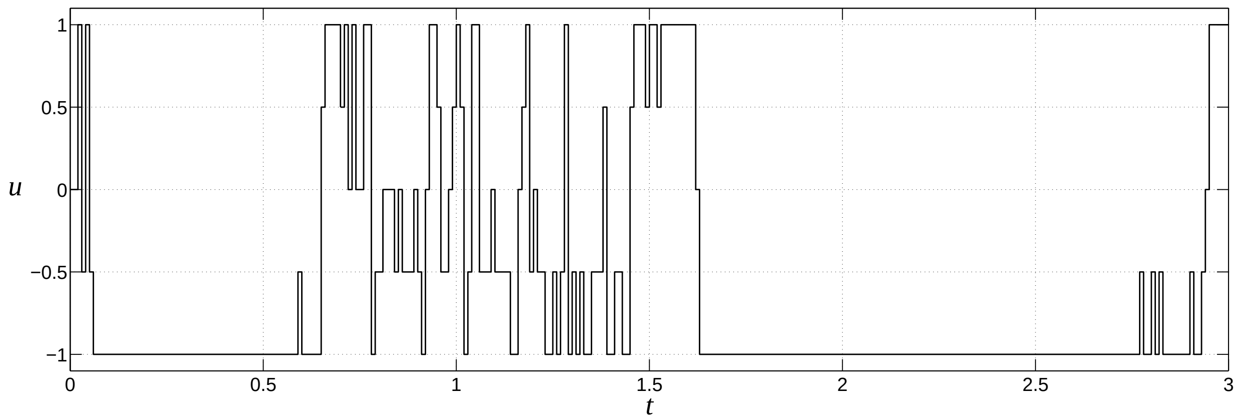

Рис. 2. График управления $u^*(t)$

Из (2.9), (2.11) следует оценка

$$\rho(x^*(t_N), M) < 2e^{L(\vartheta - t_0)} K\Delta + \sigma^*(\Delta). \tag{2.12}$$

В итоге сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\Delta^* > 0$, *что любое движение* $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x^{(0)} \in \mathcal{W}^a(t_0)$ *системы* (1.1), *порожденное управлением* $u^*(t)$ *на* $[t_0, \vartheta]$ $(u^* = u^{(j)}$, $t \in [t_j, t_{j+1})$, $j = \overline{0, N})$, *отвечающим разбиению* Γ *с диаметром* $\Delta \in (0, \Delta^*)$, *удовлетворяет включению* $x^*(\vartheta) \in M_\varepsilon$.

Число Δ^* *можно задать удовлетворяющим неравенству* $2e^{L(\vartheta - t_0)} K\Delta^* + \sigma^*(\Delta)^* < \varepsilon$.

§ 3. Пример. Обратный маятник с точкой подвеса, находящейся на тележке

Пусть задан обратный маятник с точкой подвеса, находящейся на тележке, которая может двигаться в горизонтальной плоскости (см. рис. 1). Эта механическая система рассматривалась в монографии [9, с. 29–30] и заимствована нами из нее.

На тележку воздействует тяговое усилие $\overrightarrow{F}$. На маятник действует сила гравитации $\overrightarrow{mg}$, приложенная к центру тяжести маятника, а также горизонтальная $\overrightarrow{H}$ и вертикальная $\overrightarrow{V}$, составляющие силы реакции в опорной точке маятника; m — масса маятника g — гравитационная константа.

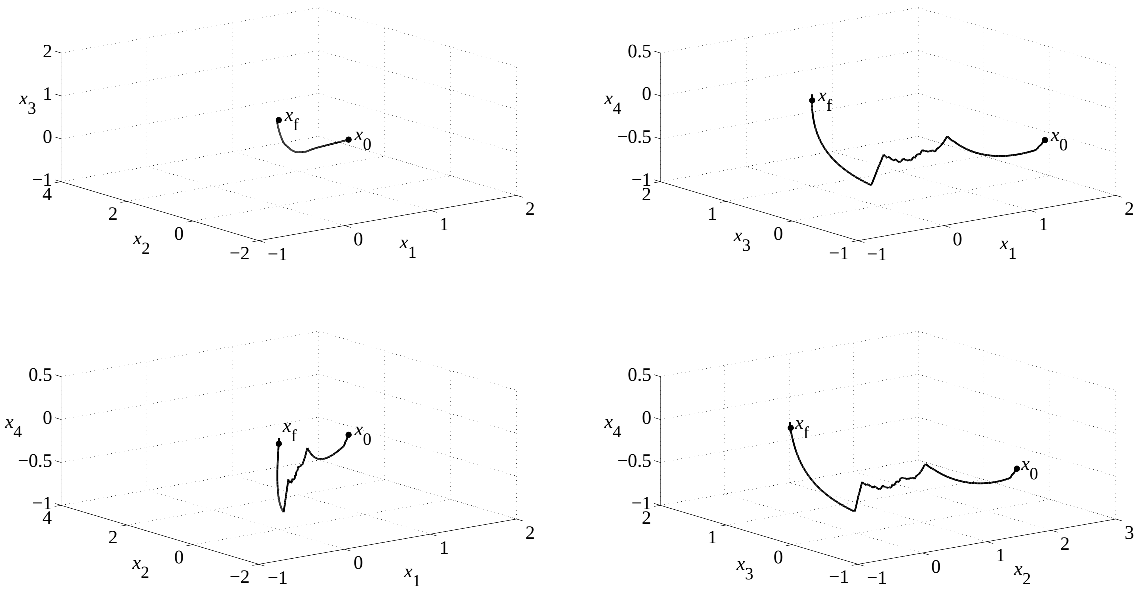

Рис. 3. Проекции движения, порожденного управлением $u^*(t)$, на трехмерные подпространства в фазовом пространстве $\mathbb{R}^4$

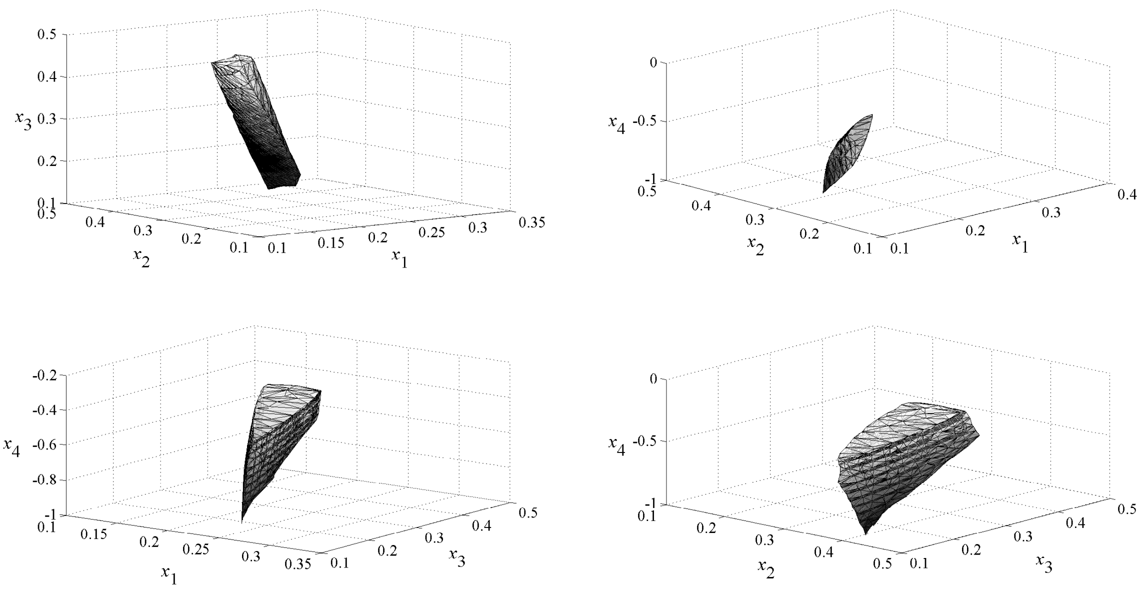

Рис. 4. Проекции множества $\mathcal{W}^a(t_j)$ $(t_j = 1.5)$ на трехмерные подпространства в фазовом пространстве $\mathbb{R}^4$

Пусть L — расстояние между центром тяжести и опорной точкой, y — смещение опорной точки, ϑ — угол наклона маятника, I — момент инерции относительно центра тяжести, M — масса тележки, k — коэффициент трения.

Введем переменные $x_1 = \vartheta$, $x_2 = \dot{\vartheta}$, $y_1 = y$, $y_2 = \dot{y}$.

В этих переменных уравнение можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{\Delta(x_1)}\{(m+M)mgL\sin x_1 - mL\cos x_1(F + mLx_2^2 - ky_2)\}, \\ \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\dfrac{1}{\Delta(x_1)}\{-mL\cos x_1 mgL\sin x_1 + (I+mL^2)(F + mLx_2^2\sin x_1 - ky_2\}, \end{cases}$$

здесь $\Delta(x_1) = (I+mL^2)(m+M) - m^2L^2\cos x_1$.

Для этой механической системы «тележка-маятник» полагаем $u = F$ в качестве управляющего воздействия.

Обозначим через $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ — фазовый вектор системы.

Рассмотрим следующую задачу о сближении.

Задача. Заданы промежуток времени $[0;T] = [0;3]$, начальная точка $x_0 = \begin{pmatrix} 1.582 \\ 2.006 \\ -0.469 \\ -0.403 \end{pmatrix}$ и терминальная точка $x_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, составляющая целевое множество M. Требуется построить управление $u^*(t)$, переводящее движение $x^*(t)$ системы «тележка-маятник» в положение $x^*(T) = x_f$.

Решение задачи о сближении, сформулированной в этом параграфе, конструировалось по схеме, приведенной в §2, а именно было введено разбиение $\Gamma = \{t_0 = 0, t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_N = \vartheta = 3\}$ с диаметром $\Delta = 0.01$ $(N = 300)$.

Этому разбиению Γ была сопоставлена (то есть сконструирована) в «попятном» времени аппроксимирующая система множеств $\{\mathcal{W}^a(t_j) : j = \overline{0,N}\}$. При этом конструировании мы отправлялись от одноточечного множества $\mathcal{W}^a(t_N) = M = \{x_f\}$. Далее, используя эти множества, в «прямом» времени последовательно по шагам $[t_i; t_{i+1}]$ было вычислено кусочно-постоянное управление $u^*(t)$, решающее приближенно задачу о сближении. Управление $u^*(t)$ представлено графически на рис. 2. На рис. 3 представлены проекции на трехмерные подпространства движения $x^*(t)$, порожденного управлением $u^*(t)$.

На рис. 4 для большей наглядности проекции множества $\mathcal{W}^a(t_j)$ на трехмерные подпространства представлены в виде полиэдров.

Автор выражает благодарность В. Н. Ушакову за помощь в работе и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В. Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок дифференциальных включений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 4. С. 23–39.
2. Красовский Н.Н. Лекции по теории управления. Основная игровая задача наведения. Поглощение цели. Экстремальная стратегия. Свердловск: Уральский государственный университет, 1970. Вып. 4. 96 с.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

4. Kurzhanskii A.B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhauser, 1997. 321 p.
5. Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н. Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. № 2. С. 179–187.
6. Гусев М.И. Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с перекрестными связями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 82–94.
7. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288.
8. Филиппова Т.Ф. Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 263–269.
9. Халил Х.К. Нелинейные системы. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009. 812 с.

Поступила в редакцию 01.10.2012

Ушаков Андрей Владимирович, математик, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: aushakov.pk@gmail.com

A. V. Ushakov

On one version of approximate permitting control calculation in a problem of approaching

Keywords: approaching problem, control system, attainability set, integral funnel, control, inverse pendulum.

Mathematical Subject Classifications: 35F15, 37G10

A stationary control system defined on a finite time interval in Euclidean space is considered. We discuss one of the main problems of control theory, which is a problem of approach of a control system and a set in a phase space at a fixed time. This problem is closely connected with key problems in control theory, for example, with a problem of optimal performance. That is why it is necessary to find effective algorithms for solving this task. Due to the complexity of this problem it is impossible to solve it analytically even for simple cases. The construction of approximate solutions considered in this paper is connected with the construction of integral funnel of the control system inverted in time. This work contains the description of one algorithm for the integral funnel construction which is a final approximation of a solvability set for a problem of approach. The procedure of finding solvability control of the approximate solution based on local control saving is described. Illustrating example of a mechanical control system is provided.

REFERENCES

1. Ushakov V.N., Matviichuk A.R., Ushakov A.V. Approximations of attainability sets and of integral funnels of differential inclusions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 4, pp. 23–39.

2. Krasovskii N.N. *Lektsii po teorii upravleniya. Osnovnaya igrovaya zadacha navedeniya. Pogloshchenie tseli. Extremalnaya strategiya* (Lectures on control theory. Main game problem of aiming. Aim absorption. Extreme strategy), Sverdlovsk: Ural State University, 1970, issue 4, 96 p.

3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.

4. Kurzhanskii A.B., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*, Boston: Birkhauser, 1997, 321 p.

5. Guseinov H.G., Moiseev A.N., Ushakov V.N. On approximations of attainability sets of control systems, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1998, vol. 62, no. 2, pp. 179–187.

6. Gusev M.I. Estimates of reachable sets of multidimensional control systems with nonlinear interconnections, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2009, vol. 15, no. 4, pp. 82–94.

7. Rodina L.I., Tonkov E.L. Statistical characteristics of attainable set of controllable system, nonwandering, and minimal attraction center, *Nelineinaya Dinamika*, 2009, vol. 5, no. 2, pp. 265–288.

МАТЕМАТИКА 2012. Вып. 4

8. Filippova T.F. Construction of set-valued estimates of reachable sets for some nonlinear dynamical systems with impulsive control, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2009, vol. 15, no. 4, pp. 263–269.

9. Khalil H.K. *Nonlinear Systems, Third Edition*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002, 750 p.

Received 01.10.2012

Ushakov Andrei Vladimirovich, Mathematician, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: aushakov.pk@gmail.com