УДК 517.958 : 530.145.6

© *Т. С. Тинюкова, Ю. П. Чубурин*

ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ КВАНТОВОГО ВОЛНОВОДА [1]

Исследуются спектральные свойства дискретного оператора Шредингера для бесконечной полосы с нулевыми граничными условиями. Доказано, что для малых убывающих потенциалов вблизи особенностей невозмущенной функции Грина (граничных точек подзон) возникают собственные значения и резонансы, найдена их асимптотика. Описана картина рассеяния; явление дифракции (рассеяние, главным образом, по конечному числу выделенных направлений) трансформируется в рассматриваемой квазиодномерной системе в волны во времени вероятностей прохождения и отражения. Получены простые формулы для данных вероятностей вблизи граничных точек подзон (это отвечает малым скоростям квантовой частицы) в случае малых потенциалов.

Ключевые слова: дискретный оператор Шредингера, квантовый волновод, собственное значение, резонанс, коэффициенты прохождения и отражения.

Введение

В последнее время при описании транспорта электронов через наноразмерные электронные устройства часто используются дискретные модели, то есть системы разностных уравнений, полученных из уравнения Шредингера или в приближении сильной связи, или с помощью аппроксимации производных конечными разностями. Обычно исследуются системы, состоящие из квантовых проволок и квантовых точек, что позволяет использовать одномерные модели (см., например, [1–2]). Однако более реалистичное описание предполагает если не трехмерность, то двумерность квантовых проволок. Дискретные двумерные модели квантовых волноводов (квантовых проволок) обсуждались в различных ситуациях в физической литературе (см., например, [3–7]), но явно недостаточно изучались математиками [8–9].

В данной статье исследуются спектральные свойства дискретного оператора Шредингера для бесконечной полосы с нулевыми граничными условиями. В частности, доказано, что для малых убывающих потенциалов вблизи особенностей невозмущенной функции Грина (граничных точек подзон) возникают собственные значения или резонансы, найдена их асимптотика. Описана картина рассеяния: явление дифракции (рассеяние, главным образом, по конечному числу выделенных направлений в двумерном и трехмерном случаях) трансформируется в рассматриваемой квазиодномерной системе в наличие волн вероятностей прохождения (отражения) во времени. Изучен характер рассеяния вблизи границ подзон для малых потенциалов.

Положим $\Gamma = \mathbb{Z}\times\{1,\ldots,N\}\subset\mathbb{Z}^2$, где $N>1$. Обозначим через $l^2(\Gamma)$ гильбертово пространство функций $\varphi(n,m)$, $(n,m)\in\Gamma$ со скалярным произведением

$$(\varphi,\psi)=\sum_{(n,m)\in\Gamma}\varphi(n,m)\overline{\psi(n,m)}.$$

Введем в рассмотрение самосопряженный ограниченный оператор $H_0 = H_{01}\otimes I + I\otimes H_{02}$, действующий в $l^2(\Gamma)$, где оператор $H_{01}: l^2(\mathbb{Z})\to l^2(\mathbb{Z})$ задается формулой

$$(H_{01}\varphi)(n)=\varphi(n-1)+\varphi(n+1),\quad n\in\mathbb{Z},$$

[1]Работа частично поддержана грантом 12–У–2–1021 УрО РАН.

а оператор H_{02} действует в $l^2(\{1,\dots,N\})\cong\mathbb{C}^N$ и определяется равенствами

$$(H_{02}\varphi)(m)=\begin{cases}\varphi(m-1)+\varphi(m+1), & m=2,\dots,N-1,\\ \varphi(2), & m=1,\\ \varphi(N-1), & m=N,\end{cases}$$

что соответствует нулевым условиям на границе полосы Γ.

Пусть далее $V(n,m)$ — ненулевая вещественная функция на Γ, удовлетворяющая условию

$$|V(n,m)|\leqslant Ce^{-\alpha|n|},\quad (n,m)\in\Gamma, \tag{1}$$

где $\alpha>0$. (Функции, удовлетворяющие условию такого вида, в дальнейшем будем называть экспоненциально убывающими.) Положим $H_\varepsilon=H_0+\varepsilon V$, где $\varepsilon>0$. Данный дискретный оператор Шредингера является гамильтонианом электрона в квантовом волноводе с примесью.

Заметим, что спектр оператора H_{01} совпадает с отрезком $[-2,2]$ (см. раздел VII.2 [10]). Обозначим через $R_{01}(\lambda)=(H_{01}-\lambda I)^{-1}$ резольвенту этого оператора. Ядро резольвенты (функция Грина) имеет вид (см., например, [11])

$$G_{01}(n-m,\lambda)=-\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4}}\left(\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}\right)^{|n-m|}.$$

Выбор знака перед (арифметическим для $\lambda>2$) корнем отвечает экспоненциальному убыванию функции G_{01} при $|n-m|\to\infty$ для $\lambda>2$. Заметим, что функция

$$g(\lambda)=\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}$$

является обратной к функции Жуковского $(z+z^{-1})/2$ для $z=\lambda/2$. Риманова поверхность $\mathcal{V}_0$ функции g, а следовательно, и функции G_{01}, двулистна, причем листы склеиваются вдоль интервала $(-2,2)$, а точки ±2 являются точками ветвления.

Определим k формулами

$$\cos k=\lambda/2,\quad \sin k=-\sqrt{1-(\lambda/2)^2}. \tag{2}$$

Вводя для краткости обозначение $G_{01}(n-m,k)$ вместо $G_{01}(n-m,2\cos k)$ (подобным обозначением будем пользоваться и в других случаях), получим формулу

$$G_{01}(n-m,k)=\frac{e^{ik|n-m|}}{2i\sin k}. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что оператор H_{02} имеет N различных собственных значений $\lambda_j=2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}$, $j=1,\dots,N$, причем соответствующие нормированные собственные функции имеют вид

$$\varphi_j(m)=a\sin\left(\frac{\pi jm}{N+1}\right),$$

где $a=\sqrt{\dfrac{2}{N+1}}$ — нормировочный коэффициент.

Обозначим через $\sigma(A)$ спектр оператора A. В силу следствия теоремы VIII.33 из [10] и сказанного выше спектр является объединением подзон:

$$\sigma(H_0)=\sigma(H_{01})+\sigma(H_{02})=\bigcup_{j=1}^{N}\Big[-2+2\cos\frac{\pi j}{N+1},2+2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big]=$$
$$=\Big[-2+2\cos\frac{\pi N}{N+1},2+2\cos\frac{\pi}{N+1}\Big].$$

Ядро резольвенты $R_0(\lambda)$ оператора H_0 имеет вид

$$G_0(n-n',m,m',\lambda)=\sum_{j=1}^{N}a^2\sin\Big(\frac{\pi jm}{N+1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi jm'}{N+1}\Big)G_{01}\Big(n-n',\lambda-2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big). \tag{4}$$

Отсюда из вида (3) функции G_{01} вытекает, что V является относительно компактным возмущением оператора H_0 и, следовательно (см. [12]), существенный спектр оператора H_ε совпадает с

$$\Big[-2+2\cos\frac{\pi N}{N+1},2+2\cos\frac{\pi}{N+1}\Big].$$

§ 1. Квазиуровни оператора H_ε

В дальнейшем будем использовать обозначение $\sqrt{V}=\sqrt{|V|}\operatorname{sgn}V$ [13] (только для $\sqrt{V}$), тогда $V=\sqrt{|V|}\sqrt{V}$. Аналитическое продолжение операторнозначной функции, осуществляемое ее ядром, будем обозначать тем же символом.

Обозначим через $L(\lambda)=\sqrt{|V|}R_0(\lambda)\sqrt{V}$ оператор с ядром

$$l(n-n',m,m',\lambda)=\sqrt{|V(n,m)|}G_0(n-n',m,m',\lambda)\sqrt{V(n',m')}.$$

Из (1), (3) и (4) вытекает, что в полуплоскости $\{\operatorname{Im}\lambda>0\}$ функция l аналитически зависит от λ как $l^2(\Gamma^2)$-значная функция. При переходе сверху через промежутки

$$\Big(-2+2\cos\frac{\pi N}{N+1},2+2\cos\frac{\pi}{N+1}\Big)\setminus\Big\{\pm2+2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big\}_{j=1}^{N}$$

вследствие ветвления G_{01} в точках $\pm2+2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}$ параметр λ оказывается на втором листе хотя бы для одной из функций

$$G_{01}\Big(n-n',\lambda-2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big),$$

так что экспоненциальное убывание функции G_0 сменяется ее экспоненциальным возрастанием. Однако, за счет умножения на

$$\sqrt{|V(n,m)|V(n',m')},$$

функция l для достаточно малых $|\operatorname{Im}\lambda|$ по–прежнему принимает значения в $l^2(\Gamma^2)$. Обозначим через $\mathcal{V}$ риманову поверхность, образованную аналитическими продолжениями функции l из области

$$\Big(-2+2\cos\frac{\pi N}{N+1},2+2\cos\frac{\pi}{N+1}\Big)\times(0,\infty)$$

в область

$$\Big(-2+2\cos\frac{\pi N}{N+1},2+2\cos\frac{\pi}{N+1}\Big)\times(-\delta,\infty)$$

$\Big($включая точки $\pm2+2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}\Big)$, где $\delta>0$ настолько мало, что l принимает значения в $l^2(\Gamma^2)$.

Вследствие сказанного операторнозначная функция L принимает значения во множестве операторов Гильберта–Шмидта и аналитически зависит от $\lambda\in\mathcal{V}$.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\lambda\neq\cos\frac{\pi j}{N+1}+\cos\frac{\pi j'}{N+1},\quad j,j'=1,\dots,N. \tag{5}$$

Докажем, что в этом случае все величины $-2\sin k_j$ различны. Действительно, если $\sin k_j=\sin k_{j'}$, $j\neq j'$, то $\cos k_{j'}=-\cos k_j$. Но тогда из равенств $\lambda=2\cos k_j+2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}=2\cos k_{j'}+2\cos\dfrac{\pi j'}{N+1}$ вытекает, что $2\cos k_j=\cos\dfrac{\pi j'}{N+1}-\cos\dfrac{\pi j}{N+1}$, что противоречит (5).

Лемма 1. *Оператор* $(1 - L(\lambda))^{-1}$ *существует и аналитически зависит от* λ *из* $\mathcal{V} \setminus S$, *где* S — *не более, чем счетное множество, не имеющее предельных точек в* $\mathcal{V}$.

Доказательство. В силу (1), (3) и (4)

$$\|l(n - n', m, m', \lambda)\|_{l^2(\Gamma^2)} \to 0$$

и, поэтому, $L(\lambda) \to 0$ при $\operatorname{Im} \lambda \to \infty$. Вследствие аналитической теоремы Фредгольма [10] оператор $(I - L(\lambda))^{-1}$ существует и аналитически зависит от λ из $\mathcal{V} \setminus S$, где не более чем счетное множество S может иметь предельные точки либо в множестве $\left\{\pm 2 + 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}\right\}_{j=1}^{N}$, либо на границе $\mathcal{V}$. Но в окрестности точек $\pm 2 + 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}$ функция l становится мероморфной после замены (см. (2))

$$\cos k_j = \left(\lambda - 2\cos\frac{\pi j}{N+1}\right)/2, \tag{6}$$

где k_j меняется в окрестности точки 0 или точки π, причем, например, для $k_j \approx 0$ имеем

$$l(n - n', m, m', k_j) = \frac{\sqrt{|V(n,m)|V(n',m')}}{2ik_j} a^2 \sin\left(\frac{\pi j m}{N+1}\right) \sin\left(\frac{\pi j m'}{N+1}\right) + O(1) \tag{7}$$

(в силу сказанного выше равенство $\sin k_j = \sin k_{j'} = 0$ возможно лишь если $j = j'$). Следовательно, вычет является оператором ранга один, и в силу мероморфной теоремы Фредгольма [12] в окрестности точек $k_j = 0$ оператор $(1 - L(k_j))^{-1}$ существует всюду, кроме, возможно, конечного числа точек. $\square$

Определение 1. Назовем *резонансом* оператора H_ε такое $\lambda \in \mathcal{V}$, не являющееся собственным значением, для которого существует ненулевое решение $\varphi \in l^2(\Gamma)$ уравнения

$$\varphi = -\varepsilon\sqrt{|V|} R_0(\lambda)\sqrt{V}\varphi \tag{8}$$

$\left(\text{здесь } \lambda \neq \pm 2 + 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}, \quad j = 1, \ldots, N\right)$. *Квазиуровнем* оператора H_ε назовем его собственное значение или резонанс.

Замечание 1. Для собственных значений, не принадлежащих

$$\sigma(H_0) \bigcup \left\{ \pm 2 + 2\cos\frac{\pi j}{N+1}\right\}_{j=1}^{N},$$

также существует ненулевое решение уравнения (8), поскольку для них выполнено $\psi = -\varepsilon R_0 V \psi$, где $\psi \in l^2(\Gamma)$ — собственная функция.

В силу равенства

$$1 - \varepsilon\sqrt{|V|} R_\varepsilon(\lambda)\sqrt{V} = \left(1 + \varepsilon\sqrt{|V|} R_0(\lambda)\sqrt{V}\right)^{-1}$$

и аналитической теоремы Фредгольма [10] λ является квазиуровнем тогда и только тогда, когда λ есть полюс операторнозначной функции $\sqrt{|V|} R_\varepsilon(\lambda)\sqrt{V}$. При этом множество S из леммы (1) состоит из квазиуровней и, возможно, точек множества $\left\{ \pm 2 + 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}\right\}_{j=1}^{N}$. Поэтому в достаточно малой окрестности любой точки из $\mathcal{V}$ может быть лишь конечное число квазиуровней.

Теорема 1. *Предположим, что для некоторого* $j \in \{1, \dots, N\}$

$$v_j = \sum_{(n',m')\in\Gamma} (\pm 1)^{n'} \sin^2\Big(\frac{\pi m j}{N+1}\Big) V(n',m') \neq 0. \tag{9}$$

Тогда в некоторой окрестности точек $\lambda_{j0}^{\pm} = \pm 2 + 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}$ *для всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *существует единственный квазиуровень* $\lambda_j^{\pm} = \lambda_j^{\pm}(\varepsilon)$ *оператора* H_ε, *аналитически зависящий от* ε, *для которого справедлива формула*

$$\lambda_j^{\pm}(\varepsilon) = \pm 2 + 2\cos\frac{\pi j}{N+1} \pm \Big(\frac{\varepsilon v_j}{N+1}\Big)^2 + O(\varepsilon^3). \tag{10}$$

Доказательство. В окрестности, например, точки λ_{j0}^{+} произведем замену (6) с k_j из окрестности нуля. Тогда (см. (7)) уравнение (8) можно записать в виде

$$\varphi(n,m) = -\frac{\varepsilon a^2 \sqrt{|V(n,m)|}\sin\Big(\dfrac{\pi j m}{N+1}\Big)}{2ik_j} \sum_{(n',m')\in\Gamma} \sqrt{V(n',m')}\sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big)\varphi(n',m') + \\ + \varepsilon K(k_j)\varphi(n,m),$$

где $K(k_j)$ — некоторый оператор Гильберта–Шмидта, аналитически зависящий от k_j. Положим для достаточно малых ε

$$\xi(n,m) = (1 - \varepsilon K(k_j))\varphi(n,m),$$

тогда

$$\xi(n,m) = -\frac{\varepsilon a^2 \sqrt{|V(n,m)|}\sin\Big(\dfrac{\pi j m}{N+1}\Big)}{2ik_j} \sum_{(n',m')\in\Gamma} \sqrt{V(n',m')}\times \\ \times \sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big)(1-\varepsilon K(k_j))^{-1}\xi(n',m') = C\sqrt{|V(n,m)|}\sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big),$$

где $C = \mathrm{const}$, откуда

$$k_j = -\frac{\varepsilon a^2}{2i} \sum_{(n',m')\in\Gamma} \sqrt{V(n',m')}\sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big)(1-\varepsilon K(k_j))^{-1}\Big(\sqrt{|V(n',m')|}\sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big)\Big) = \\ = -\frac{\varepsilon a^2}{2i} \sum_{(n',m')\in\Gamma} \sin^2\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big)V(n',m') + O(\varepsilon^2) = -\frac{\varepsilon a^2 v_j}{2i} + O(\varepsilon^2). \tag{11}$$

Правая часть полученного уравнения аналитически зависит от ε, k_j. Вследствие теоремы о неявной функции для аналитических функций [14] и условия (9) данное уравнение имеет для всех достаточно малых ε единственное решение $k_j = k_j(\varepsilon)$, аналитически зависящее от ε. Возвращаясь к переменной

$$\lambda = 2\cos\frac{\pi j}{N+1} + 2\cos k_j = 2\cos\frac{\pi j}{N+1} + 2\Big(1 - \frac{k_j^2}{2}\Big) + O(k_j^4),$$

получаем с помощью (11) формулу (10).

Случай точки λ_{j0}^{-} рассматривается аналогично с заменой k_j на $-\pi - \widetilde{k}_j$, при этом пользуемся равенствами $\sin(-\pi - \widetilde{k}_j) = \sin\widetilde{k}_j$ и

$$e^{-i(\pi+\widetilde{k}_j)|n-n'|} = e^{-i\pi|n-n'|}\cdot e^{-i\widetilde{k}_j|n-n'|} = (-1)^n(-1)^{n'}e^{-i\widetilde{k}_j|n-n'|}. \tag{12}$$

$\square$

Замечание 2. Квазиуровень $\lambda_N^-(\varepsilon)$ вблизи левой граничной точки λ_{N0}^- является собственным значением при $v_N > 0$. Действительно, функция Грина G_0 (см. (3), (4)) экспоненциально убывает в точке $\lambda = \lambda_N^-(\varepsilon)$ при $|n| \to \infty$, это следует из (11) после перехода в (4) к переменной k_N. Запишем уравнение (8) в виде $\psi = -\varepsilon R_0(\lambda)V\psi$, где $\psi = -\varepsilon R_0(\lambda)\sqrt{V}\varphi$ ($= \varphi/\sqrt{|V|}$ в точках, где $V \neq 0$) удовлетворяет уравнению Шредингера $H_\varepsilon\psi = \lambda\psi$ при $\lambda = \lambda_N^-(\varepsilon)$. Легко видеть, что функция ψ вместе с G_0 экспоненциально убывает (ср. аналогичные рассуждения в [15]), так что $\psi \in l^2(\Gamma)$ (более того, экспоненциально убывает) и $\lambda_N^-(\varepsilon)$ есть собственное значение. Аналогично квазиуровень $\lambda_1^+(\varepsilon)$ вблизи правой граничной точки λ_{10}^+ существенного спектра является собственным значением при $v_1 < 0$ (показатель экспоненты в составе функции Грина согласно (12) меняет знак).

§ 2. Рассеяние

Рассмотрим при $t \in \mathbb{R}$ нестационарное уравнение

$$i\frac{d\psi}{dt} = H_{01}\psi, \tag{13}$$

где $\psi = \psi(n,t) \in l^2(\mathbb{Z})$ с условием в нуле

$$\psi(n,0) = \psi_0(n), \quad \psi_0 \in l^2(\mathbb{Z}). \tag{14}$$

Введем преобразование Фурье $F : l^2(\mathbb{Z}) \to L^2(-\pi,\pi)$ формулой

$$\widehat{\psi}(k) = (F\psi)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi(n)e^{-ikn}.$$

Лемма 2. *Решение уравнения* (13) *с начальным условием* (14) *имеет вид*

$$\psi(n,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\widehat{\psi}_0(k)e^{ink}e^{-2it\cos k}dk. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. После преобразования Фурье уравнение (13) примет вид

$$i\frac{d\widehat{\psi}}{dt} = 2\cos k\cdot\widehat{\psi},$$

где $\widehat{\psi} = \widehat{\psi}(k,t) \in L^2(-\pi,\pi)$. Отсюда, с учетом (14), имеем $\widehat{\psi}(k,t) = \widehat{\psi}_0(k)e^{-2i\cos k\cdot t}$ и, следовательно, (15). □

Следствие 1. *В силу самосопряженности оператора* H_{01}

$$\|\psi(n,t)\| = \|\psi_0(n)\| = \|\widehat{\psi}_0(k)\|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\lambda_0 - 2\cos\frac{\pi j_0}{N+1} \in (-2,2)$, причем $\lambda_0 \neq \pm 2 + 2\cos\frac{\pi j}{N+1}$, $j = 1,\ldots,N$ и λ_0 не является квазиуровнем. В окрестности точки λ_0 рассмотрим уравнение Липпмана – Швингера

$$\psi(n,m,\lambda) = \psi_0(n,m,\lambda) - \varepsilon\sum_{(n',m')\in\Gamma}G_0(n-n',m,m',\lambda)V(n',m')\psi(n',m',\lambda), \tag{16}$$

где «налетающая волна» (записанная для переменной k_{j_0}) имеет вид

$$\psi_0(n,m,\lambda) = a\sin\Big(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\Big)e^{ink_{j_0}} \tag{17}$$

и удовлетворяет уравнению $H_0\psi_0 = \lambda\psi_0$. Решение уравнения (16) ищем в классе функций ψ таких, что $\sqrt{|V|}\psi = \varphi \in l^2(\Gamma)$. В силу леммы (1) в окрестности точки λ_0 существует решение «модифицированного» [13] уравнения Липпмана–Швингера

$$\varphi(n,m,\lambda) = \varphi_0(n,m,\lambda) - \varepsilon \sum_{(n',m')\in\Gamma} \sqrt{|V(n,m)|}G_0(n-n',m,m',\lambda)\sqrt{V(n',m')}\varphi(n',m',\lambda) \quad (18)$$

относительно $\varphi = \sqrt{|V|}\psi$, где $\varphi_0 = \sqrt{|V|}\psi_0$, аналитически, как $l^2(\Gamma)$-значная функция, зависит от λ.

В дальнейшем для краткости пользуемся обозначениями

$$\sum{}' = \sum_{j:\lambda-2\cos\frac{\pi j}{N+1}\in(-2,2)}, \qquad \sum{}'' = \sum_{j:\lambda-2\cos\frac{\pi j}{N+1}\notin(-2,2)}$$

$(j \in \{1,\ldots,N\})$.

Согласно (4) имеем

$$\sum_{(n',m')\in\Gamma} G_0(n-n',m,m',\lambda)V(n',m')\psi(n',m') = \sum{}' \sum_{(n',m')\in\Gamma} a^2 \sin\Big(\frac{\pi jm}{N+1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi jm'}{N+1}\Big)\times$$
$$\times G_{01}\Big(n-n',\lambda-2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big)\sqrt{V(n',m')}\varphi(n',m') + \sum{}'' \sum_{(n',m')\in\Gamma} a^2 \sin\Big(\frac{\pi jm}{N+1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi jm'}{N+1}\Big)\times$$
$$\times G_{01}\Big(n-n',\lambda-2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big)\sqrt{V(n',m')}\varphi(n',m'). \quad (19)$$

В обеих суммах в правой части (19)

$$G_{01}\Big(n,\lambda-2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big) \in l^\infty(\mathbb{Z}).$$

Кроме того, $\sqrt{V}, \varphi \in l^2(\Gamma)$. Оценивая правую часть с помощью неравенства Коши–Буняковского, получаем ограниченность решения ψ уравнения Липпмана–Швингера (16).

Переходя в слагаемых первой суммы правой части (19) к переменным $k_j = k_j(\lambda)$, запишем уравнение (16) в виде

$$\psi(n,m,\lambda) = \psi_0(n,m,\lambda) - \varepsilon\sum{}' \sum_{(n',m')\in\Gamma} a^2 \sin\Big(\frac{\pi jm}{N+1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi jm'}{N+1}\Big)\times$$
$$\times\frac{e^{ik_j|n-n'|}}{2i\sin k_j}V(n',m')\psi(n',m',\lambda) - \varepsilon\sum{}'' \sum_{(n',m')\in\Gamma} a^2 \sin\Big(\frac{\pi jm}{N+1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi jm'}{N+1}\Big)\times$$
$$\times G_{01}\Big(n-n',\lambda-2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big)V(n',m')\psi(n',m',\lambda). \quad (20)$$

Положим для j из суммы $\sum{}'$

$$A_j^{\pm}(\lambda) = -\frac{\varepsilon a}{2i\sin k_j}\sum_{(n',m')\in\Gamma}\sin\Big(\frac{\pi jm'}{N+1}\Big)e^{\mp ik_jn'}V(n',m')\psi(n',m',\lambda). \quad (21)$$

В силу аналитичности функции $\varphi(n,m,\lambda) = \sqrt{|V(n,m)|}\psi(n,m,\lambda)$, функции $A_j^{\pm}(\lambda)$ также являются аналитическими в окрестности точки λ_0.

Далее, определим функцию

$$\eta(n,m,\lambda) = \begin{cases} \eta_+(n,m,\lambda), & n \geqslant 0,\\ \eta_-(n,m,\lambda), & n < 0,\end{cases}$$

где

$$\eta_{\pm}(n,m,\lambda) = -\varepsilon{\sum}' \sum_{(n',m')\in\Gamma} a^2 \sin\Big(\frac{\pi jm}{N+1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi jm'}{N+1}\Big)\times$$

$$\times\Bigg[\frac{e^{ik_j|n-n'|}-e^{\pm ik_j(n-n')}}{2i\sin k_j}\Bigg]V(n',m')\psi(n',m',\lambda) - \varepsilon{\sum}'' \sum_{(n',m')\in\Gamma} a^2 \sin\Big(\frac{\pi jm}{N+1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi jm'}{N+1}\Big)\times$$

$$\times G_{01}\Big(n-n',\lambda-2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big)V(n',m')\psi(n',m',\lambda). \tag{22}$$

Вследствие (17), (20) имеем

$$\psi(n,m,\lambda) = a\sin\Big(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\Big)e^{ik_{j_0}n} + {\sum}' A_j^{\pm}(\lambda) a \sin\Big(\frac{\pi jm}{N+1}\Big)e^{\pm ik_j n} + \eta(n,m,\lambda), \tag{23}$$

где знаки «$+$» и «$-$» отвечают $n \geqslant 0$ и $n<0$ соответственно.

Лемма 3. *Функция $\eta(n,m,\lambda)$ является аналитической $l^2(\Gamma)$-значной функцией в окрестности точки λ_0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы для второй суммы в (22) вытекает из аналитичности резольвенты оператора H_{01}, примененной к аналитической $l^2(\mathbb{Z})$–значной функции $V(n',m')\psi(n',m',\lambda)$ (при фиксированном m') — см. лемму (1). Далее, в окрестности точки $k_j^{(0)}$ из первой суммы оценим, пользуясь неравенством Коши–Буняковского и условием (1) (например, для $n \geqslant 0$), ряд

$$\Big|\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\frac{e^{ik_j|n-n'|}-e^{ik_j(n-n')}}{2i\sin k_j}V(n',m')\psi(n',m',\lambda)\Big| = \Big|\sum_{n'>n}\frac{\sin[(n'-n)k_j]}{\sin k_j}\sqrt{V(n',m')}\varphi(n',m',\lambda)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{n'>n}\frac{\sin^2[(n'-n)k_j]}{\sin^2 k_j}|V(n',m')|\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{n'>n}|\varphi(n',m',\lambda)|^2\Big)^{\frac12} \leqslant$$

$$\leqslant C'\Big(\sum_{n'>n} n'^2 e^{-\alpha|n'|}\Big)^{\frac12} \leqslant C' e^{-\frac{\alpha|n|}{4}}\Big(\sum_{n'>n} n'^2 e^{-\frac{\alpha|n'|}{2}}\Big)^{\frac12} = C'' e^{-\frac{\alpha|n|}{4}}.$$

Отсюда вытекает экспоненциальное убывание первой суммы — обозначим ее через $\alpha(n,m,\lambda)$ — в (22). Кроме того, из данной оценки следует равномерная в (комплексной) окрестности точки λ_0 сходимость

$$\|\alpha(n,m,\lambda)-\alpha_M(n,m,\lambda)\|_{l^2(\Gamma)} \to 0, \quad M\to\infty,$$

где $\alpha_M(n,m,\lambda) = \chi_{[-M,M]}(n)\alpha(n,m,\lambda)$, $\chi_{[-M,M]}(n)$ — характеристическая функция отрезка $[-M,M]$. В силу (векторнозначной) теоремы Вейерштрасса, $l^2(\Gamma)$-значная функция $\alpha(n,m,\lambda)$ аналитична в окрестности точки λ_0. Тем самым лемма доказана. $\square$

Теперь будем искать решение уравнения

$$i\frac{d\varphi}{dt} = H_\varepsilon\varphi,$$

где $\varphi = \varphi(n,m,t)$ — $l^2(\Gamma)$-значная функция аргумента t, в виде

$$\varphi(n,m,t) = \int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta} C(\lambda)\psi(n,m,\lambda)e^{-i\lambda t}\,d\lambda, \tag{24}$$

где $\delta>0$ достаточно мало, $C(\lambda)\in C_0^\infty(\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta)$, $\psi(n,m,\lambda)$ — решение уравнения Липпмана–Швингера (16). Введем обозначение $\widetilde{f}(k_j) = f\Big(2\cos k_j + 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}\Big)$. Пользуясь (23), перепишем (24) в виде

$$\varphi(n,m,t) = -2ae^{-2it\cos\frac{\pi j_0}{N+1}} \sin\left(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\right) \int_{-\pi}^{0} \sin k_{j_0} \widetilde{C}(k_{j_0}) e^{-2it\cos k_{j_0} + ik_{j_0} n}\, dk_{j_0} - \\ - 2{\sum}' a e^{-2it\cos\frac{\pi j}{N+1}} \sin\left(\frac{\pi j m}{N+1}\right) \int_{-\pi}^{0} \widetilde{A}_j^{\pm}(k_j) \sin k_j \widetilde{C}(k_j) e^{-2it\cos k_j \pm ik_j n}\, dk_j + \\ + \int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta} C(\lambda)\eta(n,m,\lambda) e^{-i\lambda t}\, d\lambda, \quad (25)$$

где знак «±» совпадает со знаком n. Промежуток интегрирования выбран таким, чтобы движение налетающей частицы происходило слева направо (см. ниже (28)).

Рассмотрим норму последнего выражения в (25)). Имеем

$$\left\| \int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta} C(\lambda)\eta(n,m,\lambda) e^{-i\lambda t}\, d\lambda \right\|^2_{l^2(\Gamma)} = \\ = \sum_{(n,m)\in\Gamma} \int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta} \int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta} C(\lambda)\overline{C(\lambda')}\eta(n,m,\lambda)\overline{\eta(n,m,\lambda')} e^{-i(\lambda-\lambda')t}\, d\lambda\, d\lambda'. \quad (26)$$

Пользуясь равенством

$$e^{-i(\lambda-\lambda')t} d\lambda = d\big(e^{-i(\lambda-\lambda')t}\big)/(-it),$$

проинтегрируем по частям и, с помощью неравенства Коши–Буняковского и (3), получим стремление к нулю слагаемых в (26) при $|t| \to \infty$. Следовательно, функция η не играет роли в рассеянии.

Рассмотрим теперь интегралы в (25) из суммы ${\sum}'$. Имеем

$$\int_{-\pi}^{0} \widetilde{A}_j^{\pm}(k_j) \sin k_j \widetilde{C}(k_j) e^{-2it\cos k_j \pm ik_j n}\, dk_j = \widetilde{A}_j^{\pm}\left(k_j^{(0)}\right) \int_{-\pi}^{0} \sin k_j \widetilde{C}(k_j) e^{-2it\cos k_j \pm ik_j n}\, dk_j + \\ + \int_{-\pi}^{0} \left[\widetilde{A}_j^{\pm}(k_j) - \widetilde{A}_j^{\pm}\left(k_j^{(0)}\right)\right] \sin k_j \widetilde{C}(k_j) e^{-2it\cos k_j \pm ik_j n}\, dk_j, \quad (27)$$

где $k_j^{(0)}$ отвечает λ_0. Выбираем $k_j^{(0)} \in (-\pi, 0)$, тогда $\sin k_j^{(0)} < 0$. Это обеспечит стандартное движение налетающей волны слева направо (см. ниже). Сравнивая второе слагаемое в правой части (27) с (15), из следствия леммы (2) получаем, что норма данного слагаемого в $l^2(\mathbb{Z})$ при всех t совпадает с

$$\sqrt{2\pi} \left\| \left[\widetilde{A}_j^{\pm}(k_j) - \widetilde{A}_j^{\pm}\left(k_j^{(0)}\right)\right] \sin k_j \widetilde{C}(k_j) \right\|_{L^2(-\pi,0)}$$

и может быть сделана сколь угодно малой равномерно по t выбором носителя функции $C(\lambda)$ в достаточно малой окрестности точки λ_0 при сохранении нормы этой функции в $L^2(-\pi, 0)$ (точнее, ниже требуем выполнения равенства (29)). Таким образом, для частиц с достаточно локализованным волновым вектором картина рассеяния определяется числами $\widetilde{A}_j^{\pm}\left(k_j^{(0)}\right)$.

Далее, вследствие теоремы о стационарной фазе (см. Дополнение 1 к § XI.3 [13]) для всех n и t таких, что $\left|n/t + 2\sin k_j^{(0)}\right| \geqslant \sigma$, где $\sigma > 0$ достаточно мало, интеграл в первом слагаемом правой части (27) стремится к нулю по норме в $l^2(\mathbb{Z})$ при $|t| \to \infty$. Следовательно, для больших $|t|$ в рассеянии играют роль лишь такие n, для которых

$$-\sigma < n/t + 2\sin k_j^{(0)} < \sigma. \quad (28)$$

Суммируя сказанное, приходим к следующему описанию рассеяния. Предположим, что

$$\sqrt{2\pi} \left\| 2\sin k_{j_0} \widetilde{C}(k_{j_0}) \right\|_{L^2(-\pi,0)} = 1. \quad (29)$$

Тогда (см. следствие леммы (2)) имеем

$$\|\varphi(n,m,t)\|^2_{l^2(\Gamma)} = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Поэтому при $t < 0$ имеется волновой пакет, отвечающий налетающей с вероятностью единица частице, локализованный, в основном, в подмножестве $\mathbb{Z}$ вида (28) для $j = j_0$ (норма соответствующей функции стремится к единице в этой области при $t \to -\infty$). При $t \to \infty$ пакет делится на $2n_0$ частей, где n_0 — число k_j таких, что $\lambda_0 - 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1} \in (-2,2)$, при этом отраженной волне отвечает коэффициент $A_j^-(\lambda_0)$, а проходящей — коэффициент $A_j^+(\lambda_0)$. Скорость j-го проходящего волнового пакета согласно (28) приближенно равна $-2\sin k_j^{(0)}$. В силу предположения (5) все скорости различны.

Из сказанного вытекает, что для достаточно малых σ (что соответствует достаточно большой локализации волнового вектора) множества в $\mathbb{Z}$ вида (28) не пересекаются. Таким образом, в рассматриваемом квазиодномерном случае наличие поперечных волн приводит не к явлению дифракции, то есть преимущественному распространению волновых пакетов в трехмерном пространстве по конечному числу определенного рода направлений (см. [16]), а к дроблению исходного волнового пакета во времени на конечное число «меньших» пакетов, движущихся один за другим вперед или назад с разными скоростями. Для заданного произвольно малого $\varepsilon > 0$, сужая окрестность точки λ_0, содержащую носитель функции $C(\lambda)$, устремляя $|t|$ к бесконечности, а также используя следствие леммы (2), получаем неравенство

$$\left|1 - \sum{}' \left(\left|\delta_{jj_0} + \widetilde{A}_j^+\left(k_j^{(0)}\right)\right|^2 + \left|\widetilde{A}_j^-\left(k_j^{(0)}\right)\right|^2\right) \left\|2\sqrt{2\pi}\sin k_j \widetilde{C}(k_j)\right\|^2_{L^2(-\pi,0)}\right| < \varepsilon, \tag{30}$$

где δ_{jj_0} — символ Кронекера.

Заметим, что

$$\begin{aligned}\left\|2\sin k_j \widetilde{C}(k_j)\right\|^2_{L^2(-\pi,0)} &= 4\int_{-\pi}^{0} \sin^2 k_j \left|C\left(2\cos k_j + 2\cos\frac{\pi j}{N+1}\right)\right|^2 dk_j = \\ &= \int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta} \sqrt{4 - \left(\lambda - 2\cos\frac{\pi j}{N+1}\right)^2} |C(\lambda)|^2\, d\lambda.\end{aligned} \tag{31}$$

Предположим, что выполнено (5). Тогда имеет место равенство

$$\sum_{j:\lambda_0 - 2\cos\frac{\pi j}{N+1} \in (-2,2)} \left(\left|\delta_{jj_0} + A_j^+(\lambda_0)\right|^2 + \left|A_j^-(\lambda_0)\right|^2\right) \left|\frac{\sin k_j^{(0)}}{\sin k_{j_0}^{(0)}}\right| = 1, \tag{32}$$

где $\left|\sin k_j^{(0)}\right| = \sqrt{4 - \left(\lambda_0 - 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}\right)^2}$.

Действительно, выберем в (30) $\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, а также соответствующие последовательности стягивающихся к точке λ_0 её окрестностей и функций $C_n(\lambda)$ с носителями в этих окрестностях таких, что выполнено (29). Переходя в (30) к пределу с учетом (29), (31), где также переходим к пределу, получаем равенство (32).

Из проведенных рассуждений вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнено* (5). *Тогда для вероятностей прохождения* P_+ *и отражения* $P_- = 1 - P_+$ *в точке* λ_0 *справедливы формулы*

$$\begin{aligned} P_+ &= \sum_{j:\lambda_0 - 2\cos\frac{\pi j}{N+1} \in (-2,2)} \left|\delta_{jj_0} + A_j^+(\lambda_0)\right|^2 \left|\frac{\sin k_j^{(0)}}{\sin k_{j_0}^{(0)}}\right|, \\ P_- &= \sum_{j:\lambda_0 - 2\cos\frac{\pi j}{N+1} \in (-2,2)} \left|A_j^-(\lambda_0)\right|^2 \left|\frac{\sin k_j^{(0)}}{\sin k_{j_0}^{(0)}}\right|, \end{aligned} \tag{33}$$

где $A_j^{\pm}(\lambda)$ *определяются равенством* (21).

Замечание 3. $\left|\dfrac{\sin k_j^{(0)}}{\sin k_{j_0}^{(0)}}\right|$ – отношение скоростей.

Для малой константы связи ε в потенциале εV при определенном соотношении между ε и λ существуют простые формулы как для решения уравнения Липпмана–Швингера, так и для вероятностей отражения и прохождения вблизи точек $\lambda_{j_0 0}^{\pm} = \pm 2 + 2\cos\dfrac{\pi j_0}{N+1}$, где j_0 взято из (17).

Лемма 4. *Предположим, что для всех достаточно малых* ε *справедливо равенство* $k_{j_0} = \alpha\varepsilon$ *в случае знака «+» или* $\widetilde{k}_{j_0} = \alpha\varepsilon$ *в случае знака «−», где* $\widetilde{k}_{j_0} = -\pi - k_{j_0}$ *(см. конец доказательства теоремы* (1)*),* $\alpha \neq 0$ *– вещественная константа. Тогда для решения* ψ *уравнения Липпмана–Швингера* (16) *имеет место равенство*

$$\psi(n,m,\lambda) = \left(1 - \frac{(\pm 1)^n a^2 v_{j_0}^{\pm}}{2i\alpha + a^2 v_{j_0}^{+}}\right) a \sin\left(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\right) + O(\varepsilon),$$

где $v_{j_0}^{\pm}$ *взято из* (9) *для* $j = j_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определенности докажем утверждение для знака «+». Действуя, как и при доказательстве теоремы (1) и в тех же обозначениях, перепишем уравнение (18) в виде

$$\varphi(n,m,\lambda) = \varphi_0(n,m,\lambda) - \frac{\varepsilon a^2 \sqrt{|V(n,m)|}\sin\left(\dfrac{\pi j_0 m}{N+1}\right)}{2ik_{j_0}} \times$$
$$\times \sum_{(n',m')\in\Gamma} \sqrt{V(n',m')}\sin\left(\frac{\pi j_0 m'}{N+1}\right)\varphi(n',m',\lambda) + \varepsilon K(k_{j_0})\varphi(n,m,\lambda),$$

откуда для достаточно малых ε

$$\xi(n,m,\lambda) = \big(1 - \varepsilon K(k_{j_0})\big)\varphi(n,m,\lambda) = \varphi_0(n,m,\lambda) -$$
$$-\frac{\varepsilon a^2 \sqrt{|V(n,m)|}\sin\left(\dfrac{\pi j_0 m}{N+1}\right)}{2ik_{j_0}} \sum_{(n',m')\in\Gamma} \sqrt{V(n',m')}\sin\left(\frac{\pi j_0 m'}{N+1}\right) \times$$
$$\times \big(1 - \varepsilon K(k_{j_0})\big)^{-1}\xi(n',m',\lambda) = \varphi_0(n,m,\lambda) + C\sqrt{|V(n,m)|}\sin\left(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\right).$$

Следовательно,

$$C = -\Bigg[\varepsilon a^3 \sum_{(n',m')\in\Gamma} \sqrt{V(n',m')}\sin\left(\frac{\pi j_0 m'}{N+1}\right) \times$$
$$\times \big(1 - \varepsilon K(k_{j_0})\big)^{-1}\left(\sqrt{|V(n',m')|}\sin\left(\frac{\pi j_0 m'}{N+1}\right)e^{in'k_{j_0}}\right)\Bigg] \Bigg/$$
$$\Bigg/ \Bigg[2ik_{j_0} + \varepsilon a^2 \sum_{(n',m')\in\Gamma} \sqrt{V(n',m')}\sin\left(\frac{\pi j_0 m'}{N+1}\right) \times$$
$$\times \big(1 - \varepsilon K(k_{j_0})\big)^{-1}\left(\sqrt{|V(n',m')|}\sin\left(\frac{\pi j_0 m'}{N+1}\right)\right)\Bigg]$$

и, далее,

$$\varphi(n,m,\lambda)=\big(1-\varepsilon K(k_{j_0})\big)^{-1}\Big(\varphi_0(n,m,\lambda)+C\sqrt{|V(n,m)|}\sin\Big(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\Big)\Big)=$$

$$=\left(ae^{ik_{j_0}n}-\frac{a^3\sum\limits_{(n',m')\in\Gamma}V(n',m')\sin^2\Big(\frac{\pi j_0 m'}{N+1}\Big)e^{in'k_{j_0}}+O(\varepsilon)}{2i\alpha+a^2\sum\limits_{(n',m')\in\Gamma}V(n',m')\sin^2\Big(\frac{\pi j_0 m'}{N+1}\Big)+O(\varepsilon)}\right)\times$$

$$\times\sqrt{|V(n,m)|}\sin\Big(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\Big)+O(\varepsilon)=$$

$$=\left(1-\frac{a^2v^+_{j_0}}{2i\alpha+a^2v^+_{j_0}}\right)a\sqrt{|V(n,m)|}\sin\Big(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\Big)+O(\varepsilon).$$

□

Теорема 3. *В условиях* (4) *справедливо равенство*

$$P_-=\frac{\big(v^{\pm}_{j_0}\big)^2}{\alpha^2(N+1)^2+\big(v^+_{j_0}\big)^2}+O(\varepsilon).$$

Доказательство. Легко видеть (см. (21) и рассуждение перед леммой (1)), что $A^-_j(\lambda)=O(\varepsilon)$, $j\neq j_0$. Далее, вследствие (21) и леммы (4) имеем

$$A^-_{j_0}(\lambda)=-\frac{a^2}{2i\alpha}\sum_{(n',m')\in\Gamma}(\pm1)^{n'}\sin^2\Big(\frac{\pi j_0 m'}{N+1}\Big)V(n',m')\left(1-\frac{(\pm1)^{n'}a^2v^{\pm}_{j_0}}{2i\alpha+a^2v^+_{j_0}}\right)+O(\varepsilon)=$$

$$=-\frac{a^2}{2i\alpha}\left(v^{\pm}_{j_0}-\frac{a^2v^+_{j_0}v^{\pm}_{j_0}}{2i\alpha+a^2v^+_{j_0}}\right)+O(\varepsilon)=-\frac{a^2v^{\pm}_{j_0}}{2i\alpha+a^2v^+_{j_0}}+O(\varepsilon).$$

Применение формулы (33) завершает доказательство. □

Замечание 4. Волновые операторы $\Omega^{\pm}(H_\varepsilon,H_0)$ существуют и полны. Действительно, в силу теоремы Куроды–Бирмана [13] достаточно доказать, что

$$R_\varepsilon(i)-R_0(i)=-\varepsilon R_0(i)VR_\varepsilon(i)=-\varepsilon R_0(i)\sqrt{|V|}\sqrt{V}R_\varepsilon(i)\qquad(34)$$

есть оператор со следом. Ядра операторов $R_0(i)\sqrt{|V|}$, $\sqrt{V}R_0(i)$ суммируемы с квадратом (см. раздел 2), поэтому эти операторы являются операторами Гильберта–Шмидта. Следовательно,

$$\sqrt{V}R_\varepsilon(i)=\sqrt{V}R_0(i)\,(1-\varepsilon VR_\varepsilon(i))$$

также есть оператор Гильберта–Шмидта, а потому оператор (34) является оператором со следом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тинюкова Т.С. Уравнение Липпмана–Швингера для квантовых проволок // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 99–104.
2. Тинюкова Т.С., Чубурин Ю.П. Квазиуровни дискретного оператора Шредингера с убывающим потенциалом на графе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 104–113.
3. Nonoyama S., Nakamura A., Aoyagi Y., Sugano T., Okiji A. Numerical study of the interference effects of electron waves scattered by impurities or slits in a quasi-one-dimensional system // Phys. Rev. B. 1993. Vol. 47. № 4. С. 2423–2426.

4. Herbut I.F. Resonances in bent quantum wires // J. Phys.: Condens. Matter. 1993. Vol. 5. L607–L611.
5. Wimmer M., Scheid M., Richter K. Spin-polarized quantum transport in mesoscopic conductors: computational concepts and physical phenomena. 2008. arXiv: 0803.3705v1 [cond-mat.mes-hall].
6. Metalidis G., Bruno P. Green's function technique for studying electron flow in two-dimensional mesoscopic samples // Phys. Rev. B. 2005. Vol. 72. 235304.
7. Souma S., Nicolic B.K. Modulating unpolarized current in quantum spintronics: visibility of spin-interference effect in multichannel Aharonov–Casher mesoscopic rings // Phys. Rev. B. 2004. Vol. 70. 195346–11.
8. Ptitsyna N., Shipman S.P. A lattice model for resonance in open periodic wavequides. 2010. arXiv: 1101.0170v1 [math-ph].
9. Тинюкова Т.С. Квазиуровни дискретного оператора Шредингера для квантового волновода // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 88–97.
10. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 357 с.
11. Чубурин Ю.П. Об одном дискретном операторе Шредингера на графе // Теоретическая и математическая физика. 2010. Т. 165. № 1. С. 119–133.
12. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 428 с.
13. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982. 446 с.
14. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969. 395 с.
15. Baranova L.Y., Chuburin Y.P. Quasi-levels of the two-particle discrete Schrödinger operator with a perturbed periodic potential. J. Phys. A: Math. Theor. 2008. Vol. 41. 435205 (11 pp).
16. Чубурин Ю.П. О рассеянии для оператора Шредингера в случае кристаллической пленки // Теоретическая и математическая физика. 1987. Т. 72. № 4. С. 120–131.

Поступила в редакцию 10.09.2012

Тинюкова Татьяна Сергеевна, старший преподаватель, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: tashih@mail.ru

Чубурин Юрий Павлович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, отдел теоретической физики, Физико-технический институт УрО РАН, 426000, Россия, г. Ижевск, ул. Кирова, 132.
E-mail: chuburin@ftiudm.ru

T. S. Tinyukova, Y. P. Chuburin
The discrete Schrödinger equation for a quantum waveguide

Keywords: discrete Schrödinger operator, quantum waveguide, eigenvalue, resonance, transmission and reflection coefficients.

Mathematical Subject Classifications: 81Q10, 81Q15

We investigate the spectral properties of the discrete Schrödinger operator for the infinite band with zero boundary conditions. We prove that the eigenvalues and resonances arise for the small decreasing potentials near singularities of the non-perturbed Green function (boundary points of the subbands) and we find their asymptotic behavior. The scattering picture is described: the diffraction (i.e. the scattering mainly in the finite number of preferential directions) transforms into probability waves in time of the reflection and propagation in the considered quasi-1D system. The simple formulas for these probabilities are obtained near boundary points of the subbands (this corresponds to small velocities of the quantum particles) for the small potentials.

REFERENCES

1. Tinyukova T.S. The Lippmann–Schwinger equation for quantum wires, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 99–104.

2. Tinyukova T.S., Chuburin Y.P. Quasi–levels of the discrete Schrödinger equation with a decreasing potential on a graph, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 3, pp. 104–113.

3. Nonoyama S., Nakamura A., Aoyagi Y., Sugano T., Okiji A. Numerical study of the interference effects of electron waves scattered by impurities or slits in a quasi-one-dimensional system, *Phys. Rev. B*, 1993, vol. 47, no. 4, pp. 2423–2426.

4. Herbut F. Resonances in bent quantum wires, *J. Phys.: Condens. Matter*, 1993, vol. 5, L607–L611.

5. Wimmer M., Scheid M., Richter K. Spin-polarized quantum transport in mesoscopic conductors: computational concepts and physical phenomena, 2008, arXiv: 0803.3705v1 [cond-mat.mes-hall].

6. Metalidis G., Bruno P. Green's function technique for studying electron flow in two-dimensional mesoscopic samples, *Phys. Rev. B.*, 2005, vol. 72, 235304.

7. Souma S., Nicolic B.K. Modulating unpolarized current in quantum spintronics: visibility of spin-interference effect in multichannel Aharonov–Casher mesoscopic rings, *Phys. Rev. B.*, 2004, vol. 70, 195346–11.

8. Ptitsyna N., Shipman S.P. A lattice model for resonance in open periodic waveguides, 2010, arXiv: 1101.0170v1 [math-ph].

9. Tinyukova T.S. Quasi–levels of the discrete Schrödinger operator for a quantum waveguide, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 2, pp. 88–97.

10. Reed M., Simon B. *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. I. Funktsionalnyi analiz* (Methods of mathematical physics. I. Functional analysis), Moscow: Mir, 1977, 357 p.

11. Chuburin Yu.P. A discrete Schrödinger operator on a graph, *Theor. Math. Phys.*, 2010, vol. 165, issue 1, pp. 1335–1347.

12. Reed M., Simon B. *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. IV. Analiz operatorov* (Methods of mathematical physics. IV. Analysis of operators), Moscow: Mir, 1982, 428 p.

13. Reed M., Simon B. *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. III. Teoriya rasseyaniya* (Methods of mathematical physics. III. Scattering theory), Moscow: Mir, 1982, 443 p.

14. Ganning R., Possi H. Analytic functions of several complex variables, New York: Prentice–Hall, 1965, 395 p.

15. Baranova L.Y., Chuburin Y.P. Quasi-levels of the two-particle discrete Schrödinger operator with a perturbed periodic potential, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2008, vol. 41, 435205 (11 pp).

16. Chuburin Yu.P. Scattering for the Schrödinger operator in the case of a crystal film, *Theor. Math. Phys.*, 1987, vol. 72, no. 1, pp. 764–772.

Received 10.09.2012

Tinyukova Tat'yana Sergeevna, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: tashih@mail.ru

Chuburin Yurii Pavlovich, Physical–Technical Institute, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Kirova, 132, Izhevsk, 426000, Russia.
E-mail: chuburin@ftiudm.ru