УДК 517.977.5

© *Л. И. Родина, Е. Л. Тонков*

О МНОЖЕСТВЕ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ БЕЗ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ КОМПАКТНОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ДОПУСТИМЫЕ УПРАВЛЕНИЯ [1]

Исследуются условия, при которых управляемая система $\dot{x} = f(t, x, u),\ u \in U(t, x)$, вместе с замыканием множества сдвигов (относительно времени t) управляемой системы обладает свойством равномерной локальной или равномерной глобальной достижимости на заданном отрезке времени. Не предполагается, что функция $(t, x) \to U(t, x)$, задающая геометрические ограничения на допустимые управления $u(t, x) \in U(t, x)$, имеет выпуклые компактные образы и не предполагается, что соответствующее управляемой системе дифференциальное включение имеет выпуклые образы.

Ключевые слова: статистически слабо инвариантные множества, управляемые системы, множество достижимости, интегральная воронка, дифференциальные включения.

Введение

Для изучения свойств множества достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U(t, x),$$

в предположениях этой статьи потребуется ввести в рассмотрение полное метрическое пространство $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ непустых, замкнутых (но не обязательно компактных и не обязательно выпуклых) подмножеств расположенных в пространстве $\mathbb{R}^n$ и изучить его.

§ 1. Необходимый математический аппарат

Будем предполагать, что $\mathbb{R}^n$ — *стандартное* евклидово пространство размерности n со скалярным произведением $\langle x, y\rangle$ и нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ (см. лекции Д. В. Аносова [1]); пусть далее $\mathcal{O}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$ и $O_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leqslant r\}$ — *открытый и замкнутый* шары радиуса r с центром в точке x_0 пространства $\mathbb{R}^n$, а $S_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$ — *сфера* радиуса r (если $x_0 = 0$, то пишем $\mathcal{O}_r$, O_r и S_r, соответственно). Если заданы точка x_0 и *замкнутое* множество F в $\mathbb{R}^n$, то $d(x_0, F) \doteq \min\limits_{f\in F} |x_0 - f|$ — расстояние от x_0 до F.

Введем в рассмотрение два пространства: первое из них — это пространство $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ *непустых компактных* подмножеств в $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа, обозначаемой dist (см., например, монографию А. Ф. Филиппова [2, § 5]), а второе — *полное метрическое* пространство $(\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n), \rho)$ с метрикой ρ, задающей топологию *равномерной сходимости на компактах*. Напомним, что точками этого пространства $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ являются *непустые, замкнутые* (но не обязательно ограниченные) множества, расположенные в $\mathbb{R}^n$. В недавней работе Е. С. Жуковского и Е. А. Панасенко (см. [3]) показано, что метрика ρ пространства $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ с указанными свойствами существует и такую метрику можно определить равенством

$$\rho(F, G) = |d(0, F) - d(0, G)| + \sup_{r>0} \min\bigl\{\mathrm{dist}(F_r, G_r), 1/r\bigr\}, \quad \text{где} \quad F_r \doteq (F \cap \mathcal{O}_r) \cup S_r. \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН №12–П–1–1002 «Управление в условиях конфликта и неопределенности. Позиционные стратегии и гамильтоновы конструкции в задачах управления» и гранта РФФИ (12–01–00195)

Замечание 1. Отметим, что вопрос о существовании метрики пространства $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$, обеспечивающей его полноту, не относится в числу тривиальных вопросов. Дело в том, что пространство $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ (как и пространство $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$) с естественными операциями сложения и умножения на число оказывается *нелинейным* пространством, а следовательно, не является *векторным* (действительно, как легко обнаружить, в пространствах $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ нет обратного элемента относительно операции сложения и, следовательно, не выполнен закон дистрибутивности сложения $\alpha F + \beta F = (\alpha + \beta)F$).

Отсюда следует, что мы не можем опереться в вопросе существования подходящей метрики на известное утверждение общей топологии о том, что векторное пространство можно снабдить *равномерной структурой*, а следовательно, метрикой, обеспечивающей полноту пространства $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$. Далее, в подпространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ (так же как и в подпространстве $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ пространства $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$), состоящем только из *выпуклых* множеств, при условии, что константы α и β неотрицательны, закон дистрибутивности сложения $\alpha F + \beta F = (\alpha + \beta)F$ выполнен. Поэтому подпространства $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ можно рассматривать как *выпуклые конусы*, расположенные в пространствах $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, в силу того, что пространство $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ имеет структуру векторного пространства, его можно снабдить равномерной структурой и, следовательно, метрикой, обеспечивающей полноту пространства $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Эти рассуждения реализованы в статье [4], где построена соответствующая метрика пространства $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, названная метрикой Хаусдорфа–Бебутова, но, как можно показать, эта метрика не может быть распространена на всё пространство $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ с сохранением его полноты. Поэтому построение «правильной» метрики пространства $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ представляет самостоятельную (и непростую) задачу.

В силу результатов статьи [5] сходимость последовательности $\{F^i\} \subset \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ к точке F пространства $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ эквивалентна следующему утверждению.

Лемма 1 (критерий сходимости в $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$). *Равенство* $\lim\limits_{i\to\infty} \rho(F^i, F) = 0$ *выполнено тогда и только тогда, когда для любых положительных чисел r и ε найдется такой индекс $i_0 = i_0(r, \varepsilon)$, что для всех i таких, что $i \geqslant i_0$, выполнено неравенство* $\operatorname{dist}(F_r^i, F_r) \leqslant \varepsilon$.

Построим теперь для заданной непрерывной функции $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ множество

$$\big\{ f_\tau(t,z) \doteq f(t+\tau, z)\colon \ \tau \in \mathbb{R} \big\} \tag{1.2}$$

сдвигов функции $t \to f(t,z)$ и замкнем это множество (1.2) в метрике

$$b(f^1, f^2) \doteq \sup_{r>0} \min\Big\{ \max_{|t|+|z|\leqslant r} |f^1(t,z) - f^2(t,z)|, 1/r \Big\}, \tag{1.3}$$

построенной на основе метрики Бебутова (см. [6] и [4, № 3]). Обозначим это множество так:

$$\mathfrak{F}(f) \doteq \operatorname{cl}\big\{ f_\tau(t,z) : \tau \in \mathbb{R} \big\}.$$

Лемма 2 (о замыкании). *Включение $\widehat{f} \in \mathfrak{F}(f)$ выполнено тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{\tau_i\}$, удовлетворяющая следующему свойству: для любых положительных чисел ε, ϑ и всякого компакта K в $\mathbb{R}^p$ найдется индекс $i_0 = i(\varepsilon, \vartheta, K)$ такой, что для всех индексов i, удовлетворяющих неравенству $i \geqslant i_0$ и всех точек (t,z) множества $[-\vartheta, \vartheta] \times K$, выполнено неравенство*

$$|f_{\tau_i}(t,z) - \widehat{f}(t,z)| \leqslant \varepsilon.$$

Рассматриваемая в пространстве $(\mathfrak{F}(f), b)$ сходимость называется сходимостью, *равномерной на компактах* пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$.

В статье [4] (см. лемму 4) с помощью результатов Бебутова [6] доказано следующее утверждение, которое нам в дальнейшем понадобится. Сначала напомним, что *равномерная непрерывность функции* $t \to f(t,z)$ *переменного* t *на прямой* $\mathbb{R}$ *с дополнительным требованием о равномерной непрерывности относительно переменной* z *на компактах в* $\mathbb{R}^p$ означает, что для любого положительного ε и всякого компакта K в $\mathbb{R}^p$ найдется такое положительное число $\beta = \beta(\varepsilon, K)$, что неравенство

$$|f(t+\tau, z) - f(t,z)| \leqslant \varepsilon$$

выполнено для всех t, τ, z, удовлетворяющих следующим условиям: $t \in \mathbb{R},\ |\tau| \leqslant \beta,\ z \in K$.

Утверждение 1 (о компактности). *Пусть задана непрерывная функция* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. *Предположим, что функция* $t \to f(t,z)$ *переменной* t *ограничена на числовой прямой* $\mathbb{R}$ *для каждой точки* z *пространства* $\mathbb{R}^p$ *и равномерно непрерывна по переменной* t *на прямой* $\mathbb{R}$ *с дополнительным условием равномерной непрерывности относительно переменной* z *на компактах в* $\mathbb{R}^p$. *Тогда пространство* $(\mathfrak{F}(f), b)$ *с метрикой* (1.3) *компактно.*

Пусть заданы: 1) система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad (t,x,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

с *непрерывной* функцией $(t,x,u) \to f(t,x,u) \in \mathbb{R}^n$ и

2) *непрерывная* функция $U(t,x)$ переменных $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ со значениями в пространстве $(\operatorname{clos}(\mathbb{R}^m), \rho)$ с метрикой (1.1). Функцию

$$\varphi(t,x,u) \doteq \big(f(t,x,u), U(t,x)\big)$$

переменных (t,x,u) со значениями в пространстве $\mathbb{R}^n \times \operatorname{clos}(\mathbb{R}^m)$ будем отождествлять с *управляемой системой*

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad u \in U(t,x), \tag{1.4}$$

и по аналогии с только что построенным пространством $(\mathfrak{F}(f), b)$ построим *пространство* $(\mathfrak{S}(\varphi), \varrho)$ *управляемых систем*

$$\dot{x} = \widehat{f}(t,x,u), \quad u \in \widehat{U}(t,x), \tag{1.5}$$

с метрикой

$$\varrho(\varphi^1, \varphi^2) \doteq \sup_{r>0} \min\Big\{ \max_{|t|+|z|\leqslant r} |f^1(t,z) - f^2(t,z)| + \max_{|t|+|x|\leqslant r} \rho\big(U^1(t,x), U^2(t,x)\big), 1/r \Big\}, \tag{1.6}$$

где $z = (x,u)$, ρ — метрика пространства $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^m)$. Таким образом, в силу определения пространства $\mathfrak{S}(\varphi)$ верна следующая лемма.

Лемма 3 (о пространстве управляемых систем). *Управляемая система* $\widehat{\varphi}$ *принадлежит пространству* $\mathfrak{S}(\varphi)$ *тогда и только тогда, когда существует такая числовая последовательность* $\{\tau_i\}$, *что* $\varrho(\varphi_{\tau_i}, \widehat{\varphi}) \to 0$ *при* $i \to \infty$.

Несложно доказывается, что так определенное пространство $\mathfrak{S}(\varphi)$ обладает свойством *полноты* в метрике (1.6) и, кроме того, верна важная для дальнейшего следующая лемма.

Лемма 4 (о компактности пространства $\mathfrak{S}(\varphi)$). *Пусть функция* $\varphi = (f, U)$ *переменных* t, x, u *непрерывна, а функция* $t \to \varphi(t,x,u)$ *переменной* t *ограничена на прямой* $\mathbb{R}$ *для каждой точки* (x,u) *пространства* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *и равномерно непрерывна по* t *на прямой* $\mathbb{R}$ *с дополнительным условием равномерной непрерывности относительно переменной* (x,u) *на компактах в* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. *Тогда пространство* $\mathfrak{S}(\varphi)$ *управляемых систем* (1.5) *с метрикой* (1.6) *компактно.*

В сформулированном ниже определении допустимых пар управляемых систем компактность пространства $\mathfrak{S}(\varphi)$ не предполагается.

Определение 1 (**допустимого процесса**). Будем предполагать, что управляемая система $\widehat{\varphi}=(\widehat{f},\widehat{U})$ принадлежит пространству $(\mathfrak{S}(\varphi),\varrho)$, задан отрезок времени $I=[0,\vartheta]$ и функция $t\to\big(\widehat{u}(t),\widehat{x}(t)\big)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ удовлетворяет следующим трём условиям:
1) управление $\widehat{u}(t)$ определено на отрезке I, ограничено и интегрируемо по Лебегу;
2) решение $\widehat{x}(t)$ (в смысле Каратеодори, см. [2]) системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=\widehat{f}\big(t,x,\widehat{u}(t)\big),$$

определено для всех t, принадлежащих отрезку I;
3) при всех t, принадлежащих отрезку I имеет место включение $\widehat{u}(t)\in U\big(t,\widehat{x}(t)\big)$.

Тогда процесс $t\to\big(\widehat{u}(t),\widehat{x}(t)\big)$ называется *допустимым процессом* на отрезке I, а отвечающее этому процессу управление $\widehat{u}(t)$ называется *допустимым* управлением.

Условие 1 (**существования допустимого процесса**). Для каждой управляемой системы $\widehat{\varphi}=(\widehat{f},\widehat{U})$ пространства $\mathfrak{S}(\varphi)$ и заданного отрезка времени $I=[0,\vartheta]$ существует по крайней мере один допустимый процесс $\big(\widehat{u}(t),\widehat{x}(t)\big)$ с дополнительным условием, что $\widehat{x}(t)$ является решением задачи Коши

$$\dot{x}=\widehat{f}\big(t,x,\widehat{u}(t)\big),\quad x(0)=0. \tag{1.7}$$

При выполнении условия 1 имеет смысл следующее важное определение.

Определение 2 (**множества достижимости**). Предположим, что фиксирована управляемая система $\widehat{\varphi}$ пространства $\mathfrak{S}(\varphi)$, задан отрезок времени $I=[0,\vartheta]$ и выполнено условие 1. Введем в рассмотрение множество всех таких допустимых процессов $\big(\widehat{u}(t),\widehat{x}(t)\big)$, что $\widehat{x}(t)$ является решением задачи (1.7). Тогда множество $\mathfrak{A}_\vartheta(\widehat{\varphi})$, состоящее из значений $\{\widehat{x}(\vartheta)\}$ при $t=\vartheta$ решений $\widehat{x}(t)$ задачи Коши (1.7) для всех допустимых процессов $\big(\widehat{u}(t),\widehat{x}(t)\big)$ называется *множеством достижимости* управляемой системы (1.5) на отрезке времени I.

Замечание 2. Несложно понять, что из определения 2 следует такое утверждение: для заданного положительного ϑ и любого момента времени t_0 множество достижимости $\mathfrak{A}_{[t_0,t_0+\vartheta]}(\varphi)$ управляемой системы (1.4) на отрезке $[t_0,t_0+\vartheta]$ определяется равенством $\mathfrak{A}_\vartheta(\varphi_{t_0})$, где, как и раньше, $\varphi_{t_0}(t,x,u)\doteq\varphi(t+t_0,x,u)$. Допустим, что $\widehat{\varphi}\in\mathfrak{S}(\varphi)$ и последовательность $\{t_i\}$ такова, что для последовательности управляемых систем $\{\varphi_{t_i}\}$ имеет место равенство $\varrho(\varphi_{t_i},\widehat{\varphi})\to 0$. Из этого равенства без дополнительных условий об управляемой системе φ не следует, что последовательность $\{\mathfrak{A}_\vartheta(\varphi_{t_i})\}$ множеств достижимости в каком-либо разумном смысле сходится в множеству достижимости $\mathfrak{A}_\vartheta(\widehat{\varphi})$ системы $\widehat{\varphi}$.

Определение 3 (**устойчивой локальной достижимости**). Множество достижимости $\mathfrak{A}_\vartheta(\varphi)$ управляемой системы (1.4) называется *устойчиво локально достижимым* (равномерно относительно замыкания множества сдвигов системы (1.4)), если найдутся такие положительные константы ε, ϑ, ℓ, δ, что для каждой управляемой системы $\widehat{\varphi}$, принадлежащей пространству $\mathfrak{S}(\varphi,\varrho)$ выполнены следующие условия:
1) имеет место вложение $O_\varepsilon\subset\mathfrak{A}_\vartheta(\widehat{\varphi})$;
2) среди допустимых процессов $\big(\widehat{u}(t,x_0),\widehat{x}(t,x_0)\big)$, отвечающих краевой задаче

$$\dot{x}=\widehat{f}(t,x,u),\quad x(0)=0,\quad x(\vartheta)=x_0,$$

где $x_0\in\mathfrak{A}_\vartheta(\widehat{\varphi})$, существует по крайней мере один процесс $\big(\widehat{u}(t,x_0),\widehat{x}(t,x_0)\big)$, удовлетворяющий при всех $t\in[0,\vartheta]$ неравенству

$$|\widehat{u}(t,x_0)|\leqslant\ell|x_0| \tag{1.8}$$

и обеспечивающий следующее дополнительное свойство:
3) решение $t \to \widehat{x}(t, x_0)$ краевой задачи

$$\dot{x} = \widehat{f}\big(t, x, u(t, x_0)\big), \quad x(0) = 0, \quad x(\vartheta) = x_0, \tag{1.9}$$

единственно и для всех $t \in [0, \vartheta]$ удовлетворяет неравенству

$$|\widehat{x}(t, x_0)| \leqslant \delta |x_0|. \tag{1.10}$$

Это определение устойчивой локальной достижимости естественным образом переписывается на ситуацию, тогда фиксирован допустимый процесс $\big(u_0(t), x_0(t)\big)$ управляемой системы (1.4) и множество достижимости рассматривается из точки $x(0) = x_0(0)$.

§ 2. Теорема об устойчивой локальной достижимости линейной системы

Напомним, что подпространство $(\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n), \rho)$ пространства $(\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n), \rho)$ состоит из всех *непустых выпуклых замкнутых* подмножеств, расположенных в $\mathbb{R}^n$, и, как показано в статье [3], пространство $(\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n), \rho)$ с меткой (1.1) *полное*, а сходимость последовательности $\{F^i\} \subset \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ к точке $F \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ означает сходимость *равномерную на компактах* в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Будем изучать управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad U(t, x) \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^m), \tag{2.1}$$

в предположении, что $(t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и выполнено следующее условие.

Условие 2. Функция $t \to \xi(t) \doteq \big(A(t), B(t)\big) \in \mathbb{M}(n, n{+}m)$, задающая управляемую систему (2.1), *ограничена и равномерно непрерывна* на прямой, а функция $(t, x) \to U(t, x)$ непрерывна и при каждом x функция $t \to U(t, x)$ тоже *ограничена и равномерно непрерывна* на прямой; кроме того, существует такое число $r > 0$, что для всех (t, x) имеет место вложение $O_r \subset U(t, x)$.

По управляемой системе (2.1) построим метрическое пространство $(\mathfrak{S}(\varphi), \varrho)$ с метрикой (1.6), полученное замыканием множества сдвигов управляемых системы (2.1) в топологии равномерной сходимости на компактах. С учетом условия 2 и результатов работ Бебутова [6] и Панасенко [5], несложно доказать, что такое пространство компактно.

Далее, из условия 2 для любого фиксированного момента времени $\vartheta > 0$ следует, что каждая управляемая система $\widehat{\varphi}(t, x) \doteq \big(\widehat{\xi}(t), \widehat{U}(t, x)\big)$ пространства $\mathfrak{S}(\varphi)$ имеет на отрезке $[0, \vartheta]$ по крайней мере одну допустимую пару $\big(\widehat{u}(t), \widehat{x}(t)\big)$. Действительно, если управление $t \to \widehat{u}(t)$ удовлетворяет условию 1) определения 1 и включению $\widehat{u}(t) \in O_r$ при всех $t \in [0, \vartheta]$, то решение $x(t)$ задачи Коши

$$\dot{x} = \widehat{A}(t)x + \widehat{B}(t)\widehat{u}(t), \quad x(0) = 0 \tag{2.2}$$

в точке $t = \vartheta$ представимо в виде $\widehat{x}(\vartheta) = \displaystyle\int_0^\vartheta X_{\widehat{A}}(\vartheta, t)\widehat{B}(t)\widehat{u}(t)\,dt$, где $X_{\widehat{A}}(t, s)$ — матица Коши системы $\dot{x} = \widehat{A}(t)x$ и следовательно,

$$\widehat{x}(\vartheta) \in \int_0^\vartheta X_{\widehat{A}}(\vartheta, t)\widehat{B}(t)O_r dt \subset \int_0^\vartheta X_{\widehat{A}}(\vartheta, t)\widehat{B}(t)U\big(t, \widehat{x}(t)\big)dt = \mathfrak{A}_\vartheta(\widehat{\varphi}).$$

Кроме того, просто доказывается (см., например, леммы 6 и 7 и теорему 8 статьи [7]), что имеет место следующая необходимая для дальнейшего изложения лемма.

Лемма 5 (о свойствах матрицы Коши). *Функция $(t, s; \widehat{A}) \to X_{\widehat{A}}(t, s)$ равномерно непрерывна в каждой точке $(t, s; \widehat{A})$ пространства $\mathbb{R}^2 \times \mathfrak{F}(A)$ с метрикой*

$$|(t_1, s_1) - (t_2, s_2)| + \sup_{t \in \mathbb{R}} \min\big\{|A^1(t) - A^2(t)|, |t|^{-1}\big\}.$$

Далее, для любых t, s, τ *и всякой системы* $\dot{x} = \widehat{A}(t)x$ *пространства* $\mathfrak{F}(A)$ *имеет место равенство* $X_{\widehat{A}}(t+\tau, s+\tau) = X_{\widehat{A}_\tau}(t,s)$, *где* $\widehat{A}_\tau(t) \doteq \widehat{A}(t+\tau)$. *Поэтому, если функция* $\tau \to \widehat{A}_\tau(t)$ *стационарна* (*то есть не зависит от времени* t), *или* T*-периодична, или почти периодична в смысле Бора, или рекуррентна, то функция* $X_{\widehat{A}}(t+\tau, s+\tau)$ *переменной* τ *тоже стационарна* (*то есть* $X_{\widehat{A}}(t,s) = X_{\widehat{A}}(t-s)$), T*-периодична, почти периодична в смысле Бора или рекуррентна равномерно относительно* (t,s) *на любом компакте в* $\mathbb{R}^2$.

Введём в рассмотрение динамическую систему сдвигов $(\mathfrak{F}(\xi), f^\tau)$, где фазовое пространство $\mathfrak{F}(\xi)$ динамической системы состоит из замыкания (в метрике Бебутова) множества линейных управляемых систем $\xi(t) = \bigl(A(t), B(t)\bigr)$, а $f^\tau\widehat{\xi} \doteq \widehat{\xi}_\tau$ — оператор сдвига системы ξ по времени t. Пусть далее, $\Omega(\xi)$ — омега-предельное множество динамической системы $(\mathfrak{F}(\xi), f^\tau)$. Напомним, что точка ξ принадлежит множеству $\Omega(\xi)$ в том и только том случае, если найдется такая последовательность $\{\tau_k\}$, где $\tau_k \to \infty$, что $b(\xi_{\tau_k}, \xi) \to 0$ при $k \to \infty$. В силу наших предположений множество $\Omega(\xi)$ непусто и компактно.

Для каждой управляемой системы $\widehat{\xi} = (\widehat{A}, \widehat{B}) \in \mathfrak{F}(\xi)$ построим матрицу Калмана

$$W(\widehat{\xi}, \vartheta) = \int_0^\vartheta X_{\widehat{A}}(\vartheta, t)\widehat{B}(t)\widehat{B}^*(t)X^*_{\widehat{A}}(\vartheta, t)\, dt \tag{2.3}$$

и предположим, что выполнено следующее условие.

Условие 3. Найдутся положительные константы α и ϑ такие, что неравенство

$$x^*W(\widehat{\xi}, \vartheta)x \geqslant \alpha|x|^2 \tag{2.4}$$

выполнено при всех $\widehat{\xi} \in \Omega(\xi)$ и $x \in \mathbb{R}^n$.

Напомним, что ограниченная и равномерно непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $t \to \xi(t)$, задающая управляемую систему (2.1) называется *рекуррентной*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ множество

$$\varTheta(\varepsilon, \vartheta) \doteq \{\tau \in \mathbb{R}\colon \max_{|t|\leqslant\vartheta} |\xi_\tau(t) - \xi(t)| \leqslant \varepsilon\}$$

(ε, ϑ)-*почти периодов* относительно плотно на $\mathbb{R}$. Если же для всякого $\varepsilon > 0$ *относительно плотно* множество

$$\varTheta(\varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R}\colon \sup_{t\in\mathbb{R}} |\xi_\tau(t) - \xi(t)| \leqslant \varepsilon\}$$

ε-*почти периодов*, то функция $\xi(t)$ называется *почти периодической* (в смысле Бора). Всякая почти периодическая функция рекуррентна, обратное неверно. Отметим ещё, что управляемая система (2.1) рекуррентна в том и только том случае, если замыкание множества сдвигов системы (2.1) в топологии равномерной сходимости на отрезках *минимально.* Кроме того, в предположении рекуррентности, имеет место равенство $\Omega(\xi) = \mathfrak{F}(\xi)$.

Лемма 6. *Если система* (2.1) *рекуррентна и найдутся положительные константы* α, ϑ *такие, что неравенство*

$$x^*W(\xi, \vartheta)x \geqslant \alpha|x|^2 \tag{2.5}$$

выполнено при всех $x \in \mathbb{R}^n$, *то найдется положительная константа* α_1 *для которой выполнено условие* 3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\gamma(\xi) \doteq \bigl\{\xi(t) \in \mathbb{M}(n, n+m) : t \in \mathbb{R}\bigr\}$ — *траектория* движения $t \to \xi(t)$ системы (2.1),

$$\gamma\bigl(\xi, [t_0, t_0+T]\bigr) \doteq \bigl\{\xi(t) \in \mathbb{M}(n, n+m), t \in [t_0, t_0+T]\bigr\}$$

— отрезок траектории $\gamma(\xi)$, $O_\varepsilon\bigl(\gamma(\xi, [t_0, t_0+T])\bigr)$ — ε-окрестность отрезка $[t_0, t_0+T]$ траектории $\gamma(\xi)$. Характеристическим свойством рекуррентности функции $t \to \xi(t)$ служит важное для дальнейших рассуждений следующее утверждение: *для всякого положительного* ε *найдётся такое число* $T = T(\varepsilon)$, *что для любого* t_0 *имеет место вложение* $\gamma(\xi) \subset O_\varepsilon\big(\gamma(\xi,[t_0,t_0+T])\big)$.

Отметим теперь, что собственные значения $\lambda_1(\xi,\vartheta) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\xi,\vartheta)$ матрицы Калмана $W(\xi,\vartheta)$, расположенные в порядке возрастания, непрерывно (в метрике $b(\xi^1,\xi^1) + |\vartheta^1 - \vartheta^2|$, где b — метрика Бебутова (1.3)) зависят от параметров (ξ,ϑ). Кроме того, можно с помощью стандартных рассуждений доказать, что для рекуррентной управляемой системы ξ функция $\tau \to X_{A_\tau}(t,s)$ рекуррентна равномерно относительно (t,s) на компактах K в $\mathbb{R}^2$ (см. лемму 5). Следовательно, собственные значения $\lambda_i(\xi_\tau,\vartheta)$ матрицы $W(\xi_\tau,\vartheta)$ Калмана как функции переменного τ, рекуррентны и, поскольку выполнено неравенство $\lambda_1(\xi,\vartheta) \geqslant \alpha$ (см. неравенство (2.5)), то найдётся такая положительная константа α_1, что для первого собственного значения $\lambda_1(\widehat{\xi},\vartheta)$ матрицы Калмана, построенной по каждой системе $\widehat{\xi}$, принадлежащей пространству $\Omega(\xi)$, выполнено неравенство $\lambda_1(\widehat{\xi},\vartheta) \geqslant \alpha_1$. □

Теорема 1. *Если выполнено условие* 2, *управляемая система* (2.1) *рекуррентна и найдутся такие положительные константы* α, ϑ, *что для всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство* (2.5). *Тогда система* (2.1) *устойчиво локально достижима* (*см. определение* 3).

Доказательство. В силу предположения о рекуррентности управляемой системы (2.1) найдется положительная константа c_1 такая, что для всякой системы $\widehat{\xi}$ пространства $\Omega(\xi)$ при всех $t \in [0,\vartheta]$ выполнено неравенство $|\widehat{B}^*(t)X^*_{\widehat{A}}(\vartheta,t)| \leqslant c_1$. Далее, в силу неравенства (2.5) и рекуррентности системы (2.1) найдется такая положительная константа c_2, что для всех систем $\widehat{\xi}$, принадлежащих пространству $\Omega(\xi)$, выполнено неравенство $W^{-1}(\widehat{\xi},\vartheta) \leqslant c_2$.

Кроме того, всякой управляемой системе $\widehat{\xi}$ омега-предельного множества $\Omega(\xi)$ и каждому вектору x_0 пространства $\mathbb{R}^n$, для которого выполнено неравенство $|x_0| \leqslant \varepsilon = r\ell^{-1}$, где $\ell = c_1c_2$, а константа r удовлетворяет условию 2, поставим в соответствие управление

$$\widehat{u}(t,x_0) = \widehat{B}^*(t)X^*_{\widehat{A}}(\vartheta,t)W^{-1}(\widehat{\xi},\vartheta)x_0. \tag{2.6}$$

В силу высказанных предположений при всех $t \in [0,\vartheta]$ выполнено неравенство

$$|\widehat{u}(t,x_0)| \leqslant \ell|x_0|$$

и следовательно, управление (2.6) допустимо.

Решение краевой задачи (2.2) при выбранном управлении (2.6) в точке $t = \vartheta$ имеет вид

$$\widehat{x}(\vartheta,x_0) = \int_0^\vartheta X_{\widehat{A}}(\vartheta,t)\widehat{B}(t)\widehat{B}^*(t)X^*_{\widehat{A}}(\vartheta,t)\,dt\,W^{-1}(\widehat{\xi},\vartheta)x_0 = x_0 \tag{2.7}$$

и поэтому имеет место вложение $O_\varepsilon \subset \mathfrak{A}_\vartheta(\widehat{\xi}\,)$ для всех $\widehat{\xi} \in \Omega(\xi)$. Кроме того, из равенства

$$\widehat{x}(t,x_0) = \int_0^t X_{\widehat{A}}(t,s)\widehat{B}(s)\widehat{B}^*(s)X^*_{\widehat{A}}(t,s)\,ds\,W^{-1}(\widehat{\xi},\vartheta)x_0$$

следуют неравенства

$$|\widehat{x}(t,x_0)| \leqslant \Big(\int_0^t |X_{\widehat{A}}(t,s)\widehat{B}(s)|\,ds\Big)c_1c_2|x_0| \leqslant c_0c_1c_2|x_0| = \beta|x_0|,$$

где $\beta = c_0c_1c_2$, а константа c_0 такова, что

$$c_0 \geqslant \int_0^t |X_{\widehat{A}}(t,s)\widehat{B}(s)|\,ds$$

для всех $t \in [0,\vartheta]$ и $\widehat{\xi} \in \Omega(\xi)$. Таким образом, показано, что все условия определения устойчивой локальной достижимости управляемой системы (2.1) выполнены. □

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполнены условия* 2 *и* 3, *то система* (2.1) *устойчиво локально достижима* (*см. определение* 3).

Полезно обратить внимание на тот факт, что баз предположения рекуррентности управляемой системы (2.1) омега-предельное пространство $\Omega(\xi)$ не совпадает с пространством $\mathfrak{F}(\xi)$, но в силу компактности пространства $\mathfrak{F}(\xi)$ (в предположении, что выполнено условие 2) и, разумеется, компактности пространства $\Omega(\xi)$, достаточно требовать выполнение неравенства (2.4) только на омега-предельном множестве $\Omega(\xi)$.

§ 3. Теорема о статистических характеристиках множества достижимости

Пусть задана управляемая система $\widehat{\varphi}$:

$$\dot{x} = \widehat{f}(t,x,u), \quad u \in \widehat{U}(t,x),$$

принадлежащая пространству управляемых систем $\mathfrak{S}(\varphi)$. Рассмотрим отвечающее данной системе дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \widehat{F}(t,x), \tag{3.1}$$

где $\widehat{F}(t,x)$ представляет собой множество всех предельных значений функции $\widehat{f}\big(t,x,\widehat{U}(t,x)\big)$ при $(t_i,x_i) \to (t,x)$.

Пусть задано множество $X \in \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$. Множеством достижимости $\mathfrak{A}_\vartheta(\widehat{\varphi},X)$ управляемой системы $\widehat{\varphi}$ на отрезке времени $I=[0,\vartheta]$ из начального множества X называется множество, состоящее из значений $\{\widehat{x}(\vartheta)\}$ при $t=\vartheta$ решений $\widehat{x}(t)$ задачи Коши

$$\dot{x} = \widehat{f}\big(t,x,\widehat{u}(t)\big), \quad x(0)=x_0 \in X \tag{3.2}$$

для всех допустимых процессов $\big(\widehat{u}(t),\widehat{x}(t)\big)$. Предполагаем, что для любой управляемой системы $\widehat{\varphi}=(\widehat{f},\widehat{U})$ пространства $\mathfrak{S}(\varphi)$ множество достижимости $\mathfrak{A}_t(\widehat{\varphi},X)$ существует для всех неотрицательных t.

Рассмотрим непрерывную многозначную функцию $t \to M(t)$ со значениями в пространстве $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ и график данной функции $M=\big\{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1} : x \in M(t)\big\}$. Пусть $M_\tau(t) \doteq M(t+\tau)$ и $\{M_\tau(t) : \tau \in \mathbb{R}\}$ — множество сдвигов функции $M(t)$. Замкнем это множество в метрике

$$\varrho(M^1,M^2) \doteq \sup_{r>0} \min\Big\{\max_{|t|\leqslant r} \rho\big(M^1(t),M^2(t)\big), 1/r\Big\},$$

где ρ — метрика пространства $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим $\mathcal{M}=\operatorname{cl}\{M_\tau(t) : \tau\in\mathbb{R}\}$ и представим данное множество в виде

$$\mathcal{M}=\big\{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1} : x\in\mathcal{M}(t)\big\}.$$

Для исследования статистической инвариантности заданного множества в работах [8–11] введены и изучены такие характеристики, как относительная частота, верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости $\mathfrak{A}_t(\widehat{\varphi},X)$ управляемой системы $\widehat{\varphi}$ множеством $\mathcal{M}$. Для определения этих характеристик введем в рассмотрение множество

$$\alpha(\vartheta,\widehat{\varphi},X) \doteq \big\{t\in[0,\vartheta] : \mathfrak{A}_t(\widehat{\varphi},X) \subseteq \mathcal{M}(t)\big\}.$$

Определение 4 (см. [8, 9]). Относительной частотой поглощения множества достижимости $\mathfrak{A}_t(\widehat{\varphi},X)$ системы $\widehat{\varphi}$ множеством $\mathcal{M}$ называется следующий предел

$$\operatorname{freq}(\widehat{\varphi},X) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta,\widehat{\varphi},X)}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t\in[0,\vartheta] : \mathfrak{A}_t(\widehat{\varphi},X)\subseteq\mathcal{M}(t)\big\}}{\vartheta}, \tag{3.3}$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Если предел (3.3) не существует, то характеристики

$$\operatorname{freq}^*(\widehat{\varphi},X) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta,\widehat{\varphi},X)}{\vartheta}, \quad \operatorname{freq}_*(\widehat{\varphi},X) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta,\widehat{\varphi},X)}{\vartheta}$$

называются, соответственно, верхней и нижней относительной частотой поглощения множества достижимости $\mathfrak{A}_t(\widehat{\varphi},X)$ системы $\widehat{\varphi}$ множеством $\mathcal{M}$.

Определение 5 (см. [8,9]). Множество $\mathcal{M}$ называется *статистически инвариантным* относительно пространства управляемых систем $\mathfrak{S}(\varphi)$, если для любой системы $\widehat{\varphi} \in \mathfrak{S}(\varphi)$ имеет место равенство

$$\operatorname{freq}\bigl(\widehat{\varphi}, \mathcal{M}(0)\bigr) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\bigl\{t \in [0, \vartheta] : \mathfrak{A}_t(\widehat{\varphi}, \mathcal{M}(0)) \subseteq \mathcal{M}(t)\bigr\}}{\vartheta} = 1.$$

Фиксируем положительное число r. Обозначим через $\mathcal{M}^r(t) = \mathcal{M}(t) + O_r$ замкнутую окрестность множества $\mathcal{M}(t)$ в $\mathbb{R}^n$, через $\mathcal{N}_+^r(t) = \mathcal{M}^r(t) \setminus \mathcal{M}(t)$ — внешнюю r-окрестность границы $\mathcal{M}(t)$, также рассмотрим множество

$$\mathcal{N}_+^r = \bigl\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathcal{N}_+^r(t)\bigr\}.$$

Скалярную функцию $V(t, x)$ переменных $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ будем называть *функцией А. М. Ляпунова* (относительно заданного множества $\mathcal{M}$), если она удовлетворяет локальному условию Липшица и выполнены следующие условия:

1) $V(t, x) \leqslant 0$ для всех $(t, x) \in \mathcal{M}$;

2) $V(t, x) > 0$ для всех $(t, x) \in \mathcal{N}_+^r$.

Для локально липшицевой функции $V(t, x)$ *обобщенной производной* в точке $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $(1, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ называется следующий предел

$$V^o(t, x; q) \doteq \limsup_{(\tau, y, \varepsilon) \to (t, x, +0)} \frac{V(\tau + \varepsilon, y + \varepsilon q) - V(\tau, y)}{\varepsilon},$$

а выражения

$$V^o_{\min}(t, x, \widehat{\varphi}) \doteq \inf_{q \in \widehat{F}(t, x)} V^o(t, x; q), \quad V^o_{\max}(t, x, \widehat{\varphi}) \doteq \sup_{q \in \widehat{F}(t, x)} V^o(t, x; q)$$

называются *нижней и верхней производной* функции V в силу дифференциального включения (3.1), отвечающего системе $\widehat{\varphi}$.

Предполагаем, что задано множество $X \subseteq \mathcal{M}(0)$ и пространство управляемых систем $\mathfrak{S}(\varphi)$ удовлетворяют следующему условию.

Условие 4. Для каждой управляемой системы $\widehat{\varphi} \in \mathfrak{S}(\varphi)$ и каждой точки $x_0 \in X$ все решения $\widehat{x}(t, x_0)$ включения (3.1), удовлетворяющие начальному условию $\widehat{x}(0, x_0) = x_0$, продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Для заданной непрерывной функции $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ определим множество

$$\mathfrak{F}(w) \doteq \operatorname{cl}\bigl\{w_\tau(t, z) : \tau \in \mathbb{R}\bigr\}$$

как замыкание сдвигов функции $t \to w(t, z)$ в метрике (1.3) и для функции $\widehat{w} \in \mathfrak{F}(w)$ рассмотрим задачу Коши

$$\dot{z} = \widehat{w}(t, z), \quad z(0) = z_0 \geqslant 0, \quad t \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Теорема 3. *Пусть выполнено условие 4. Предположим, что существуют непрерывные скалярные функции $V(t, x)$ и $w(t, z)$ переменных $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и $(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ такие, что:*

1. *Для любой функции $\widehat{w} \in \mathfrak{F}(w)$ верхнее решение $\widehat{z}^*(t)$ задачи Коши (3.4) определено при всех $t \geqslant 0$.*

2. *Функция $V(t, x)$ является функцией Ляпунова относительно множества $\mathcal{M}$ и для любой системы $\widehat{\varphi} \in \mathfrak{S}(\varphi)$ существует функция $\widehat{w} \in \mathfrak{F}(w)$ такая, что при всех $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(t, x, \widehat{\varphi}) \leqslant \widehat{w}\bigl(t, V(t, x)\bigr). \tag{3.5}$$

Тогда для любой управляемой системы $\widehat{\varphi} \in \mathfrak{S}(\varphi)$ верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости $\mathfrak{A}_t(\widehat{\varphi}, X)$ множеством $\mathcal{M}$ удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{freq}^*(\widehat{\varphi}, X) \geqslant \varkappa^*(\widehat{w}), \quad \operatorname{freq}_*(\widehat{\varphi}, X) \geqslant \varkappa_*(\widehat{w}), \quad \textit{где}$$

$$\varkappa^*(\widehat{w}) \doteq \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \widehat{z}^*(t) \leqslant 0\}}{\vartheta}, \ \varkappa_*(\widehat{w}) \doteq \varliminf_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \widehat{z}^*(t) \leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Следовательно, если для любой функции $\widehat{w} \in \mathfrak{F}(w)$ выполнено равенство

$$\varkappa(\widehat{w}) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \widehat{z}^*(t) \leqslant 0\}}{\vartheta} = 1,$$

то множество $\mathcal{M}$ статистически инвариантно относительно пространства управляемых систем $\mathfrak{S}(\varphi)$.

Доказательство. Пусть $\widehat{x}(t, x_0)$ — решение включения (3.1), определенное на полуоси $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяющее начальному условию $\widehat{x}(0, x_0) = x_0 \in X$. Рассмотрим функцию

$$v(t) = V\big(t, \widehat{x}(t, x_0)\big).$$

В силу теоремы Радемахера функция $v(t)$ дифференцируема при почти всех t и поскольку $\widehat{x}(0, x_0) \in X \subseteq \mathcal{M}(0)$, то $v(0) \leqslant 0$. В точках дифференцируемости функции $v(t)$ выполнены неравенства (см. лемму 6 работы [8])

$$V^o_{\min}\big(t, \widehat{x}(t, x_0), \widehat{\varphi}\big) \leqslant \dot{v}(t) \leqslant V^o_{\max}\big(t, \widehat{x}(t, x_0), \widehat{\varphi}\big),$$

поэтому, с учетом неравенства (3.5), имеем при всех $t \geqslant 0$ неравенство

$$\dot{v}(t) \leqslant \widehat{w}\big(t, v(t)\big). \tag{3.6}$$

Из неравенств (3.6) и $v(0) \leqslant 0 \leqslant z(0)$ в силу теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах получаем, что для всех $t \geqslant 0$ верхнее решение $\widehat{z}^*(t)$ задачи (3.4) удовлетворяет неравенству $v(t) \leqslant \widehat{z}^*(t)$.

Обозначим через $\operatorname{freq}_*(\widehat{x})$ нижнюю относительную частоту попадания решения $\widehat{x}(t, x_0)$ в множество $\mathcal{M}$, тогда

$$\operatorname{freq}_*(\widehat{x}) \doteq \varliminf_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \ \widehat{x}(t, x_0) \in \mathcal{M}(t)\}}{\vartheta} = \varliminf_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \ v(t) \leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Далее, из неравенства $v(t) \leqslant \widehat{z}^*(t)$ следует неравенство $\operatorname{freq}_*(\widehat{x}) \geqslant \varkappa_*(\widehat{w})$ и, так как $\widehat{x}(t, x_0)$ является произвольным решением включения (3.1) с начальным условием $\widehat{x}(0, x_0) = x_0 \in X$, то выполнено неравенство $\operatorname{freq}^*(\widehat{\varphi}, X) \geqslant \varkappa^*(\widehat{w})$. Неравенство $\operatorname{freq}_*(\widehat{\varphi}, X) \geqslant \varkappa_*(\widehat{w})$ доказывается аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аносов Д.В. Лекции по линейной алгебре. М.; Ижевск: РХД, 1999. 105 с.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 223 с.
3. Жуковский Е.С., Панасенко Е.А. Об одной метрике в пространстве непустых замнутых подмножеств в $\mathbb{R}^n$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 15–25.
4. Панасенко Е.А., Родина Л.И., Тонков Е.Л. Пространство $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа–Бебутова и дифференциальные включения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 162–177.
5. Панасенко Е.А. Динамическая система сдвигов в пространстве многозначных функций с замкнутыми образами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 2. С. 28–33.

6. Бебутов М.В. О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюлл. Ин-та матем. при МГУ. 1940. Т. 2. № 5. С. 1–52.
7. Тонков Е.Л. Глобально управляемые линейные системы // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. 2005. Т. 23. С. 145–165.
8. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288.
9. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 67–86.
10. Панасенко Е.А., Родина Л.И., Тонков Е.Л. Асимптотически устойчивые статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 135–142.
11. Родина Л.И. Статистически инвариантные множества управляемых систем со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 68–87.
12. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.
13. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.

Поступила в редакцию 07.09.2012

Родина Людмила Ивановна, д. ф.-м. н., заведующая кафедрой математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: box0589@udmnet.ru

Тонков Евгений Леонидович, д. ф.-м. н., профессор, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;
Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: eltonkov@udm.ru

L. I. Rodina, E. L. Tonkov

About the attainability set of control system without assumption of compactness of geometrical restrictions on admissible controls

Keywords: statistically weakly invariant sets, controlled systems, attainability set, integral funnel, differential inclusion.

Mathematical Subject Classifications: 35F15, 37G10

We investigate the conditions under which the control system $\dot{x} = f(t, x, u),\ u \in U(t, x)$ together with closure of set of shifts (concerning time t) of control system possesses property of uniform local or uniform global attainability on the given time interval. We do not suppose that function $(t, x) \to U(t, x)$, setting geometrical restrictions on admissible controls $u(t, x) \in U(t, x)$, has convex compact images and we do not suppose that differential inclusion corresponding to control system has convex images.

REFERENCES

1. Anosov D.V. *Lektsii po lineinoi algebre* (Lectures on linear algebra), Moscow: Regular and Chaotic Dynamics, 1999, 105 p.

2. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous right-hand sides*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988, 307 p.

3. Zhukovskii E.S., Panasenko E.A. On one metric in the space of nonempty closed subsets of $\mathbb{R}^n$, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 1, pp. 15–25.

4. Panasenko E.A., Rodina L.I., Tonkov E.L. The space $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ with the Hausdorff–Bebutov metric and differential inclusions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. 121–136.

5. Panasenko E.A. Dynamical system of translations in the space of multi-values functions with closed images, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 2, pp. 28–33.

6. Bebutov M.V. Dynamical systems in the space of continuous function, *Bull. Mat. Inst. Moscow State University*, 1940, vol. 2, no. 5, pp. 1–52.

7. Tonkov E.L. Globally controllable linear systems, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 139, issue 5, pp. 6976–6996.

8. Rodina L.I., Tonkov E.L. Statistical characteristics of attainable set of control system, non-wandering, and minimal attraction center, *Nelin. Dinam.*, 2009, vol. 5, no. 2, pp. 265–288.

9. Rodina L.I., Tonkov E.L. The statistically weak invariant sets of control systems, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 67–86.

10. Panasenko E.A., Rodina L.I., Tonkov E.L. Asymptotically stable statistically weakly invariant sets of control systems, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 135–142.

11. Rodina L.I. The statistically invariant sets of control systems with random parameters, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 2. pp. 68–87.

12. Clarke F. *Optimizatsiya i negladkii analiz* (Optimization and the nonsmooth analysis), Moscow: Nauka, 1988, 300 p.

13. Ioffe A.G., Tikhomirov V.M. *Theory of extremal problems*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam–New York–Oxford, 1979, 460 p.

Received 07.09.2012

Rodina Lyudmila Ivanovna, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: box0589@udmnet.ru

Tonkov Evgenii Leonidovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;
Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: eltonkov@udm.ru