

УДК 517.955.8, 532.529.2

© С. Б. Козицкий

МОДЕЛЬ ТРЕХМЕРНОЙ БИДИФУЗИОННОЙ КОНВЕКЦИИ С ЯЧЕЙКАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ¹

Рассматривается трехмерная бидиффузионная конвекция в бесконечном по горизонтали слое несжимаемой жидкости в окрестности точек бифуркации Хопфа, взаимодействующая с полем горизонтальной завихренности. Методом многомасштабных разложений получено семейство амплитудных уравнений, описывающее вариации амплитуды конвективных ячеек, форма которых задаётся как суперпозиция конечного числа конвективных валиков с различными волновыми векторами.

Для численного моделирования полученных систем амплитудных уравнений были разработаны несколько численных схем, основанных на современных ETD (exponential time differencing) псевдоспектральных методах. Написаны пакеты программ для моделирования валиковой конвекции, а также конвекции с ячейками квадратного и гексагонального типов. Численное моделирование показало, что конвекция имеет вид вытянутых «облаков» или «нитей». Было замечено, что в системе достаточно быстро развивается состояние диффузионного хаоса, когда первоначальное симметричное состояние разрушается, и конвекция становится нерегулярной как по пространству, так и по времени. При этом в некоторых областях возникают пиковые всплески завихренности.

Ключевые слова: бидиффузионная конвекция, амплитудное уравнение, метод многомасштабных разложений.

Введение

Считается, что конвекция является самым распространенным видом течений газа и жидкости во Вселенной [1]. Среди различных видов конвекции особое, если не доминирующее положение занимает конвекция, обусловленная двойной диффузией, или *бидиффузионная конвекция*. Она возникает, когда в некоторой системе в поле силы тяжести образуется неоднородное в пространстве распределение двух компонент с различными коэффициентами диффузии. Это могут быть, к примеру, тепло и соль в морской воде, тепло и гелий в звездных атмосферах, либо два реагента в химическом реакторе. Такая конвекция может принимать самые различные формы [2]. В океанологии бидиффузионная (термохалинная) конвекция играет важную роль в процессах тепломассопереноса в океане и влияет на различные мелкомасштабные процессы, приводящие к формированию вертикальной микроструктуры гидрофизических полей [3].

С момента своего появления в науке в статье 1956 г. Генри Стоммела с соавторами [4] бидиффузионная конвекция активно изучается как экспериментальными, так и теоретическими методами, включая численное моделирование. Считается, что такие, ставшие классическими явления нелинейной физики, как бифуркации удвоения периода и бифуркация катастрофы голубого неба в системах уравнений в частных производных, впервые были исследованы численными методами для уравнений, которые появлялись именно при моделировании различных систем с бидиффузионной конвекцией [5, 6].

Одним из классических методов, позволяющих изучать системы с конвективной неустойчивостью вблизи точек бифуркации, является метод амплитудных уравнений. Впервые этот метод для случая конвекции Рэлея–Бенара был использован в работе Ньюэла и Уайтхеда 1968 года [7] и позволил редуцировать исходную систему уравнений в частных производных к одному нелинейному эволюционному уравнению в случае одной валиковой моды. Там же был сформулирован подход к получению уравнений для случая нескольких нелинейно взаимодействующих

¹Работа выполнена при финансовой поддержке ДВО РАН (гранты 09–III–А–07–317, 09–II–СО–07–002).

валиковых мод, что позволяло исследовать поведение конвективных ячеек произвольной формы. С тех пор метод амплитудных уравнений стал часто применяться для исследования самых разных конвективных явлений.

Амплитудные уравнения в случае валиковой конвекции Рэлея–Бенара, взаимодействующей с полем горизонтальной завихренности, были получены в работе [8]. Впервые амплитудные уравнения для случая двумерной бидиффузионной конвекции в окрестности точек бифуркации Хопфа получены в работе [9] и представляют собой обобщенные уравнения Гинзбурга–Ландау [10, 11]. В 80–90-е гг. внимание исследователей привлекали процессы формирования конвективных структур в трансляционно-инвариантных по горизонтали двумерных системах. Развитие возмущений в таких системах приводит к возникновению различных типов волн (стоячих, бегущих, модулированных, хаотических), которые хорошо описываются амплитудными уравнениями. Предполагается, что они должны выводиться асимптотическими методами из исходных для конкретной физической системы уравнений в частных производных. Однако для вывода уравнений нередко используется метод разложения дисперсионного соотношения в окрестности критического волнового числа, который имеет свои ограничения. Значения некоторых коэффициентов уравнений могут оцениваться из физических соображений и соображений симметрии. Можно отметить, что полный и обоснованный вывод амплитудных уравнений для систем с бидиффузионной конвекцией методом многомасштабных разложений пока слабо представлен в литературе. То же касается и работ по трехмерной бидиффузионной конвекции.

Целью настоящей работы является вывод амплитудных уравнений для трехмерной бидиффузионной конвекции в окрестности точек бифуркации Хопфа для случая конвекции с ячейками, форма которых задается суперпозицией конечного числа валиковых мод. При этом развиваются результаты предыдущих работ [3, 10, 12, 13], в которых рассматривалась как двумерная конвекция, так и трехмерная конвекция с ячейками квадратного и валикового типа. Основная идея состоит в комбинации строгого математического вывода системы амплитудных уравнений для бидиффузионной конвекции методом многомасштабных разложений в духе работы [10] и учета множества взаимодействующих валиковых мод, а также взаимодействия конвекции с полем горизонтальной завихренности, как это сделано для конвекции Рэлея–Бенара в работах [7, 8]. Такой подход является новым для современной литературы. Предполагается, что полученные в работе амплитудные уравнения позволят продвинуться в понимании механизмов формирования вихревых и конвективных структур в самых разнообразных системах, где имеет место бидиффузионная конвекция.

§ 1. Исходные уравнения и геометрия задачи

Исходные уравнения. Рассматривается трехмерная бидиффузионная конвекция в слое воды толщиной h , ограниченном двумя бесконечными плоскими горизонтальными границами, подогреваемом и подсаливаемом снизу. Здесь и далее для определенности в качестве жидкости выбрана вода, а в качестве диффундирующих компонент в ней — тепло и соль. Хотя это может быть любая другая жидкая среда с двумя компонентами, обладающими различными коэффициентами диффузии. Исходными уравнениями в данном случае являются уравнения гидродинамики для жидкой смеси в поле силы тяжести [14]:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}, \\ \partial_t T + (\mathbf{v} \nabla) T &= \chi \Delta T, \\ \partial_t S + (\mathbf{v} \nabla) S &= D \Delta S, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{v}(t, x, y, z)$ — поле скоростей жидкости; $T(t, x, y, z)$ — температура; $S(t, x, y, z)$ — концентрация соли; $p(t, x, y, z)$ — давление; $\rho(t, x, y, z)$ — плотность жидкости; \mathbf{g} — ускорение свободного падения; ν — коэффициент вязкости жидкости; χ — коэффициент температуропроводности жидкости; D — коэффициент диффузии соли. Используются горизонтальные x и y , а также вертикальная z пространственные переменные; время обозначено через t .

Распределенные источники тепла и соли отсутствуют. На верхней и нижней границах области поддерживаются постоянные значения температур и соленостей, более высокие на нижней границе, что соответствует линейному по вертикали и не зависящему от времени основному распределению этих величин. Применяется приближение Обербека-Буссинеска, стандартное для задач конвекции, а также линейное уравнение состояния жидкости.

Обезразмеривание. Проведено обезразмеривание уравнений с использованием следующих единиц измерения: для длины, времени, скорости, давления, температуры и солености это будут h , h^2/χ , χ/h , $\rho_0\chi^2/h^2$, T_Δ , S_Δ , где T_Δ и S_Δ — разности температур и соленостей на границах слоя.

Обезразмеренные эволюционные уравнения для момента импульса жидкой частицы, температуры и солености приобретают следующий вид [12]:

$$\begin{aligned} u_t + (uu_x + vu_y + wu_z) &= -p_x + \sigma\Delta u, \\ v_t + (vv_x + vv_y + wv_z) &= -p_y + \sigma\Delta v, \\ w_t + (ww_x + vw_y + ww_z) &= -p_z + \sigma\Delta w + \sigma R_T\theta - \sigma R_S\xi, \\ \theta_t + (u\theta_x + v\theta_y + w\theta_z) - w &= \Delta\theta, \\ \xi_t + (u\xi_x + v\xi_y + w\xi_z) - w &= \tau\Delta\xi, \\ u_x + v_y + w_z &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь введены: $\sigma = \nu/\chi$ — число Прандтля ($\sigma \approx 7.0$), $\tau = D/\chi$ — число Льюиса ($0 < \tau < 1$, обычно $\tau = 0.01 - 0.1$). $R_T = (g\alpha'h^3/\chi\nu)T_\Delta$ — температурное и $R_S = (g\gamma'h^3/\chi\nu)S_\Delta$ — соленостное числа Рэлея, где α' и γ' — температурный и солёностный коэффициенты объемного расширения. Поле скоростей жидкости представлено как вектор $\mathbf{v}(t, x, y, z) = (u, v, w)^T$, где верхний индекс «Т» означает транспонирование. Переменные $\theta(t, x, y, z)$ и $\xi(t, x, y, z)$ обозначают отклонения температуры и солености от их стационарных линейных профилей, так что

$$T(t, x, y, z) = T_+ + T_\Delta[\theta(t, x, y, z) - z], \quad S(t, x, y, z) = S_+ + S_\Delta[\xi(t, x, y, z) - z].$$

T_+ и S_+ — температура и соленость на нижней границе области.

Граничные условия. Используются свободные граничные условия для зависимых переменных (горизонтальная компонента скорости не определена):

$$u_z = v_z = w = \theta = \xi = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, 1.$$

Считается, что они хорошо подходят для описания конвекции во внутренних слоях жидкости и не меняют существенно критерии возникновения конвективной неустойчивости для исследуемого класса систем [15].

§ 2. Вывод уравнений методом разложения производной

Малый параметр. Рассмотрим уравнения конвекции с двойной диффузией в окрестности некоторой точки бифуркации, температурное и соленостное числа Рэлея для которой обозначены R_{Tc} и R_{Sc} соответственно. В этом случае числа Рэлея можно представить в виде

$$R_T = R_{Tc}(1 + \varepsilon^2 r_T), \quad R_S = R_{Sc}(1 + \varepsilon^2 r_S).$$

По крайней мере, одна из величин r_T и r_S по модулю порядка единицы, а малый параметр ε показывает, насколько далеко от точки бифуркации находится рассматриваемая система. Например, пусть система выводится из равновесия путем увеличения градиента температуры в слое. Тогда $r_T = 1$ и $r_S = 0$, соответственно $R_T = R_{Tc}(1 + \varepsilon^2)$ и $R_S = R_{Sc}$. Если в системе изначально заданы числа Рэлея, то эту формулу можно использовать как определение для малого параметра

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{R_T - R_{Tc}}{R_{Tc}}}.$$

Аналогичная ситуация складывается и в случае, когда система выводится из равновесия путем уменьшения градиента солености в слое. Тогда $r_T = 0$ и $r_S = -1$, также $R_S = R_{Sc}(1 - \varepsilon^2)$.

Медленные переменные. Для вывода амплитудных уравнений будем использовать метод разложения производной [16], который является разновидностью метода многомасштабных разложений. Введем медленные переменные

$$T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t, \quad X = \varepsilon x, \quad Y = \varepsilon y.$$

В соответствии с выбранным методом будем считать, что зависимые переменные теперь зависят от $t, T_1, T_2, x, y, z, X, Y$, которые считаются независимыми. Заменим также производные в уравнениях (1.1) на продолженные по правилам:

$$\partial_t \rightarrow \partial_t + \varepsilon \partial_{T_1} + \varepsilon^2 \partial_{T_2}, \quad \partial_x \rightarrow \partial_x + \varepsilon \partial_X, \quad \partial_y \rightarrow \partial_y + \varepsilon \partial_Y.$$

Тогда уравнения (1.1) запишутся так:

$$\widehat{L}\varphi = -\varepsilon \widehat{L}_1\varphi - \varepsilon^2 \widehat{L}_2\varphi - \widehat{N}_1(\varphi, \varphi) - \varepsilon \widehat{N}_2(\varphi, \varphi), \quad (2.1)$$

где мы ввели вектор зависимых величин $\varphi = (u, v, w, \theta, \xi, p)^T$ и матрично-дифференциальные операторы \widehat{L} :

$$\widehat{L} = \begin{pmatrix} \partial_t - \sigma\Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_t - \sigma\Delta & 0 & 0 & 0 & \partial_y \\ 0 & 0 & \partial_t - \sigma\Delta & -\sigma R_{Tc} & \sigma R_{Sc} & \partial_z \\ 0 & 0 & -1 & \partial_t - \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \partial_t - \tau\Delta & 0 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

а также \widehat{L}_1 и \widehat{L}_2 :

$$\begin{aligned} \widehat{L}_1 &= L_a \partial_{T_1} - 2L_b(\partial_x \partial_X + \partial_y \partial_Y) + L_c \partial_X + L_d \partial_Y, \\ \widehat{L}_2 &= L_a \partial_{T_2} - L_b \Delta_{\perp} - \sigma r_T R_{Tc} L_{R1} + \sigma r_S R_{Sc} L_{R2}, \\ L_a &= \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 0), \quad L_b = \text{diag}(\sigma, \sigma, \sigma, 1, \tau, 0), \\ L_c(1, 6) &= 1, \quad L_c(6, 1) = 1, \quad L_d(2, 6) = 1, \quad L_d(6, 2) = 1, \\ L_{e1}(3, 6) &= 1, \quad L_{e1}(6, 3) = 1, \quad L_{e2}(3, 6) = -1, \quad L_{e2}(6, 3) = 1, \\ L_g(4, 3) &= 1, \quad L_g(5, 3) = 1, \quad L_{R1}(3, 4) = 1, \quad L_{R2}(3, 5) = 1. \end{aligned}$$

Здесь $\Delta_{\perp} = \partial_X^2 + \partial_Y^2$. В матрицах $L_i(6 \times 6)$ упомянуты только отличные от нуля элементы. Через эти матрицы мы можем записать и сам оператор \widehat{L} :

$$\widehat{L} = L_a \partial_t - L_b \Delta_{\perp} + L_c \partial_x + L_d \partial_y + L_{e1} \partial_z - L_g - \sigma R_{Tc} L_{R1} + \sigma R_{Sc} L_{R2}.$$

Кроме того, введены нелинейные операторы \widehat{N}_1 и \widehat{N}_2 как следующие векторы:

$$\begin{aligned} \widehat{N}_1(\varphi_i, \varphi_j) &= (\widehat{M}(\varphi_i, u_j), \widehat{M}(\varphi_i, v_j), \widehat{M}(\varphi_i, w_j), \widehat{M}(\varphi_i, \theta_j), \widehat{M}(\varphi_i, \xi_j), 0)^T, \\ \widehat{N}_2(\varphi_i, \varphi_j) &= (\widehat{M}_1(\varphi_i, u_j), \widehat{M}_1(\varphi_i, v_j), \widehat{M}_1(\varphi_i, w_j), \widehat{M}_1(\varphi_i, \theta_j), \widehat{M}_1(\varphi_i, \xi_j), 0)^T, \\ \widehat{M}(\varphi_i, u_j) &= u_i u_{jx} + v_i u_{jy} + w_i u_{jz}, \quad \widehat{M}_1(\varphi_i, u_j) = u_i u_{jX} + v_i u_{jY}. \end{aligned}$$

Разложение решений. Будет искать решения уравнений (2.1) в виде асимптотических рядов по степеням малого параметра ε :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \varphi_i = \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \varepsilon^3 \varphi_3 + \dots. \quad (2.2)$$

После их подстановки в (2.1) и приведения членов при ε^n получаются системы уравнений для определения членов рядов (2.2). В результате имеем

$$\begin{aligned} O(\varepsilon) : \quad & \widehat{L}\varphi_1 = 0, \\ O(\varepsilon^2) : \quad & \widehat{L}\varphi_2 = -\widehat{L}_1\varphi_1 - \widehat{N}_1(\varphi_1, \varphi_1), \\ O(\varepsilon^3) : \quad & \widehat{L}\varphi_3 = -\widehat{L}_1\varphi_2 - \widehat{L}_2\varphi_1 - \widehat{N}_1(\varphi_1, \varphi_2) - \widehat{N}_1(\varphi_2, \varphi_1) - \widehat{N}_2(\varphi_1, \varphi_1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Помимо систем (2.3) при степенях ε с первой по третью в некоторых случаях имеет смысл рассматривать системы при более высоких степенях малого параметра, например, чтобы включить в итоговые амплитудные уравнения нелинейные члены пятого порядка. Однако в данной статье мы ограничимся уравнениями, которые получаются при степенях не выше третьей. При этом линейные уравнения при ε^1 дадут нам решение в виде суммы нормальных мод, а условия отсутствия секулярных членов в системах при ε^2 и ε^3 приведут к уравнениям, которым должны удовлетворять амплитуды каждой из нормальных мод.

§ 3. Члены первого порядка по ε

Система уравнений. При $O(\varepsilon^1)$ получается система

$$\widehat{L}\varphi_1 = 0. \quad (3.1)$$

Анзац. Решения системы уравнений (3.1) будем искать в виде суммы из n нормальных мод (конвективных валиков):

$$\varphi_1 = \sum_{j=1}^n \varphi_{1j} + \widehat{\varphi}_1 + \text{c.c.} = \sum_{j=1}^n A_j(X, Y, T_1, T_2) \check{\varphi}_{1j} e^{\lambda t} e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{x}} \begin{Bmatrix} \sin \pi z \\ \cos \pi z \end{Bmatrix} + \widehat{\varphi}_1(X, Y, T_1, T_2) + \text{c.c.} \quad (3.2)$$

Косинус в фигурных скобках выбирается для переменных u_1, v_1, p_1 , в остальных случаях выбирается синус. Векторы \vec{k}_j имеют компоненты $k_j = (k_{aj}, k_{bj})$. Компоненты векторов $\check{\varphi}_{1j}$ и $\widehat{\varphi}_1$ выглядят так:

$$\check{\varphi}_{1j} = \left(\frac{ik_{aj}\pi}{k^2}, \frac{ik_{bj}\pi}{k^2}, 1, \frac{1}{\lambda + \varkappa^2}, \frac{1}{\lambda + \tau\varkappa^2}, -\frac{\pi}{k^2}(\lambda + \sigma\varkappa^2) \right), \quad \widehat{\varphi}_1 = (\widehat{u}_1, \widehat{v}_1, 0, 0, 0, \widehat{p}_1).$$

Без большой потери общности мы опустили $\widehat{w}_1, \widehat{\theta}_1$ и $\widehat{\xi}_1$, которые, как и другие члены со шляпками, имеют смысл констант интегрирования и представляют собой поля по медленным горизонтальным переменным. Более детальное рассмотрение показывает, что эти члены или тождественно равны нулю, или не приводят к физически содержательным результатам. Нас интересуют члены \widehat{u}_1 и \widehat{v}_1 , образующие поле скоростей, на фоне которого развивается конвекция. Компоненты $\check{\varphi}_{1j}$ получаются подстановкой анзаца (3.2) в уравнения (3.1), при этом справедливо $L_j \check{\varphi}_{1j} = 0$, где $L_j = \lambda L_a + \varkappa^2 L_b + ik_{aj} L_c + ik_{bj} L_d + \pi L_{e2} - L_g - \sigma R_{Tc} L_{R1} + \sigma R_{Sc} L_{R2}$.

Дисперсионное соотношение. Параметры каждой из n валиковых мод $\lambda, k_{aj}, k_{bj}, R_{Tc}, R_{Sc}$ должны быть связаны соотношением

$$(\lambda + \sigma\varkappa^2)(\lambda + \varkappa^2)(\lambda + \tau\varkappa^2) + \sigma(k^2/\varkappa^2)[R_{Sc}(\lambda + \varkappa^2) - R_{Tc}(\lambda + \tau\varkappa^2)] = 0.$$

Здесь и далее $k^2 = k_{aj}^2 + k_{bj}^2$, также $\varkappa^2 = k^2 + \pi^2$ — квадрат полного волнового числа. Приведенное уравнение имеет три корня, два из которых могут быть комплексно-сопряженными. В точках бифуркации, характерных для изучаемой физической системы, либо вещественный корень обращается в ноль, либо обращается в ноль действительная часть двух комплексно-сопряженных корней. Последний случай характерен для бифуркации Хопфа, когда числа Рэлея связаны соотношениями:

$$R_{Tc} = \frac{\sigma + \tau}{1 + \sigma} R_{Sc} + \frac{\varkappa^6}{\sigma k^2} (1 + \tau)(\tau + \sigma), \quad \omega^2 = \frac{1 - \tau}{1 + \sigma} \sigma R_{Sc} \frac{k^2}{\varkappa^2} - \tau^2 \varkappa^4 > 0. \quad (3.3)$$

Здесь ω — частота волн конвекции, причем предполагается, что она является вещественной величиной. Это значит, что число R_{Sc} не должно быть слишком маленьким. В настоящей работе мы рассматриваем бидиффузионную конвекцию именно в точках бифуркации Хопфа, то есть везде $\lambda = i\omega$.

Критическое волновое число. Из выражений (3.3) видно, что минимальное число Рэлея R_{Tc} получается при $k_c = \pi/\sqrt{2}$, которое задает характерный размер конвективных ячеек, возникающих при увеличении R_T выше критической величины. Вместе с модой, для которой волновое число равно k_c , возбуждаются и соседние моды, отличающиеся от центральной моды на величину ε , приводя к тому, что совокупный пакет этих мод выглядит как одна мода с волновым числом k_c и переменной амплитудой, описываемой искомыми амплитудными уравнениями. При достаточно больших числах Рэлея ситуация меняется так, что характерные критические волновые числа могут достигать величин $k_c \approx 100$ [3]. Как и при малых R_S , первой теряет устойчивость мода с $k_c = \pi/\sqrt{2}$. Однако с ростом ε волновое число наиболее быстро растущей моды увеличивается пропорционально $\sqrt{\varepsilon}$. При некотором ε этот рост стабилизируется на уровне $k_c \approx 100$, что соответствует узким конвективным ячейкам. При этом аналогично возбуждаются и соседние моды, образуя волновой пакет, который выглядит как одна мода с переменной амплитудой. Поэтому имеет смысл выводить искомые амплитудные уравнения для конвективных ячеек произвольной ширины, предполагая, что конкретная величина малого параметра всякий раз будет задавать свое значение k_c , которое далее мы будем обозначать просто через k .

Форма ячеек. В исследуемой системе может возбуждаться произвольное количество валиковых мод одновременно, с различными волновыми векторами, порождая самые разные формы конвективных ячеек. Так, суперпозиция двух валиков под прямым углом друг к другу дает ячейки квадратного типа, три валика под углами в 120 градусов образуют гексагональные ячейки. В данной работе мы не ограничиваемся ячейками какой-то одной формы, но рассматриваем общую ситуацию, когда возбуждаются n валиковых мод под произвольными углами друг к другу. Искомые амплитудные уравнения будут давать возможность выяснить, какие из заданных изначально мод в той или иной области пространства окажутся доминирующими и определяют итоговую форму ячеек.

§ 4. Условия разрешимости

Общая схема. Полученные системы можно записать в общем виде:

$$\widehat{L}\varphi_i = Q_i.$$

Функции Q_i включают члены, резонирующие с левой частью уравнений, а именно: $Q_i = Q_i^{(1)} + Q_i^{(2)} + Q_i^{(3)}$. Здесь $Q_i^{(1)}$ и $Q_i^{(2)}$ порождают секулярные члены двух типов в решениях, а $Q_i^{(3)}$ не порождает секулярных членов либо содержит несущественные для рассматриваемого случая члены. Условия отсутствия секулярных членов первого типа сводятся к требованию ортогональности функций $Q_i^{(1)}$ и решений F_j сопряженного однородного уравнения $\widehat{L}^*F_j = 0$ и обычно приобретают вид амплитудных уравнений. Члены $Q_i^{(2)}$ являются константами по быстрым переменным и, чтобы не нарушать регулярность разложений (3.2), должны быть приравнены к нулю $Q_i^{(2)} = 0$ [11]. Эти условия также имеют вид амплитудных уравнений.

Скалярные произведения. Введем полное скалярное произведение векторов из зависимых переменных:

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_0 = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{2}{l^3} \int_0^1 \left[\iiint_{-l/2}^{l/2} (u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j + \theta_i \theta_j + \xi_i \xi_j + p_i p_j) dx dy dt \right] dz.$$

Конкретный вид функций φ_i и φ_j , возникающий в работе, может быть следующий:

$$\varphi_i = \overline{\varphi}_i e^{in_i \omega t} e^{i(\vec{k}_i, \vec{x})} \left\{ \begin{matrix} \sin \pi m_i z \\ \cos \pi m_i z \end{matrix} \right\} + \text{c.c.}, \quad \varphi_j = \overline{\varphi}_j e^{in_j \omega t} e^{i(\vec{k}_j, \vec{x})} \left\{ \begin{matrix} \sin \pi m_j z \\ \cos \pi m_j z \end{matrix} \right\} + \text{c.c.}.$$

Тогда получаем:

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_0 = \mathcal{D}(\vec{k}_i - \vec{k}_j) \delta_{n_i n_j} \delta_{m_i m_j} \langle \bar{\varphi}_i, \bar{\varphi}_j \rangle + \mathcal{D}(\vec{k}_i + \vec{k}_j) \delta_{-n_i n_j} \delta_{m_i m_j} \langle \bar{\varphi}_i^*, \bar{\varphi}_j \rangle + \text{c.c.} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_c + \text{c.c.} .$$

Здесь как δ_{ij} обозначены символы Кронекера, а функция $\mathcal{D}(x)$ определена так, что $\mathcal{D}(0) = 1$ и $\mathcal{D}(x) = 0$ при $x \neq 0$. Также было введено скалярное произведение для амплитуд векторов зависимых переменных:

$$\langle \bar{\varphi}_i, \bar{\varphi}_j \rangle = \bar{u}_i \bar{u}_j^* + \bar{v}_i \bar{v}_j^* + \bar{w}_i \bar{w}_j^* + \bar{\theta}_i \bar{\theta}_j^* + \bar{\xi}_i \bar{\xi}_j^* + \bar{p}_i \bar{p}_j^* .$$

Таким образом, для удобства вывода амплитудных уравнений из условий разрешимости было введено три варианта скалярных произведений: $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_0$, $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_c$ и $\langle \bar{\varphi}_i, \bar{\varphi}_j \rangle$. Если первое из них — это исходное скалярное произведение в интегральной форме, то второе и третье введены для получения в амплитудных уравнениях нелинейных и линейных членов соответственно.

Условие разрешимости. Функции в правых частях уравнений $Q_i^{(1)}$ в общем виде выглядят так:

$$Q_i^{(1)} = \sum_{q=1}^p \bar{Q}_{iq}^{(1)} e^{in_q \omega t} e^{i(\vec{k}_q, \vec{x})} \left\{ \begin{array}{l} \sin \pi m_q z \\ \cos \pi m_q z \end{array} \right\} + \text{c.c.} .$$

Здесь p — общее количество членов рассматриваемого типа в функциях $Q_i^{(1)}$. Условия разрешимости в этом случае будут иметь следующий вид:

$$\langle Q_i^{(1)}, F_j \rangle_c = \sum_{q=1}^p \left[\mathcal{D}(\vec{k}_q - \vec{k}_j) \delta_{n_q 1} \delta_{m_q 1} \langle \bar{Q}_{iq}^{(1)}, \bar{F}_j \rangle + \mathcal{D}(\vec{k}_q + \vec{k}_j) \delta_{-n_q 1} \delta_{m_q 1} \langle \bar{Q}_{iq}^{(1)*}, \bar{F}_j \rangle \right] = 0. \quad (4.1)$$

Здесь использовано явное выражение для векторов F_j решений однородного сопряженного уравнения:

$$F_j = \bar{F}_j e^{i\omega t} e^{i(\vec{k}_j, \vec{x})} \left\{ \begin{array}{l} \sin \pi z \\ \cos \pi z \end{array} \right\} + \text{c.c.}, \quad (L_j^*)^T \bar{F}_j = 0.$$

Во многих случаях от символов Кронекера в уравнениях (4.1) можно избавиться явно, оставив только ненулевые члены с $\vec{k}_q = \vec{k}_j$ и $n_q = m_q = 1$. Тогда условия разрешимости для рассматриваемых систем уравнений запишутся следующим образом [16]: $\langle \bar{Q}_{ij}, \bar{F}_j \rangle = 0$. То есть для совместности получающихся алгебраических систем уравнений их правые части должны быть ортогональны решениям сопряженной однородной системы. Конкретный вид векторов \bar{F}_j в нашем случае таков:

$$\bar{F}_j = \left(ik_{aj}\pi, ik_{bj}\pi, k^2, \frac{k^2 \sigma R_{Tc}}{\lambda^* + \chi^2}, -\frac{k^2 \sigma R_{Sc}}{\lambda^* + \tau \chi^2}, \pi(\lambda^* + \sigma \chi^2) \right)^T .$$

Непосредственная подстановка показывает, что действительно $(L_j^*)^T \bar{F}_j = 0$.

§ 5. Уравнения при ε^2

Общая схема вывода. Найдем амплитудные уравнения, получающиеся из системы при ε^2 . Запишем вектор правых частей Q_2 в виде суммы трех оговоренных ранее компонент:

$$\hat{L}\varphi_2 = -\hat{L}_1\varphi_1 - \hat{N}_1(\varphi_1, \varphi_1) = Q_2^{(1)} + Q_2^{(2)} + Q_2^{(3)} .$$

Заметим, что $\varphi_1 = \varphi_1^{(0)} + \hat{\varphi}_1$, где $\varphi_1^{(0)}$ — решение однородного уравнения $\hat{L}\varphi_1^{(0)} = 0$, $\hat{\varphi}_1$ — средние поля по медленным переменным. С учетом этого можно написать выражения для компонент Q_2 , оставив только ненулевые члены:

$$Q_2^{(1)} = -\hat{L}_1\varphi_1^{(0)} - \hat{N}_1(\hat{\varphi}_1, \varphi_1^{(0)}), \quad Q_2^{(2)} = -\hat{L}_1\hat{\varphi}_1, \quad Q_2^{(3)} = -\hat{N}_1(\varphi_1^{(0)}, \varphi_1^{(0)}) .$$

Функция тока. Для исключения секулярных членов второго типа необходимо потребовать, чтобы выполнялось равенство $Q_2^{(2)} = 0$. Расписанное покомпонентно, оно даст следующую систему:

$$Q_2^{(2)}(1) = -\widehat{u}_{1T_1} - \widehat{p}_{1X} = 0, \quad Q_2^{(2)}(2) = -\widehat{v}_{1T_1} - \widehat{p}_{1Y} = 0, \quad Q_2^{(2)}(6) = -\widehat{u}_{1X} - \widehat{v}_{1Y} = 0.$$

Чтобы удовлетворить эти равенства, введем горизонтальную функцию тока Ψ такую, что

$$\widehat{u}_1 = \Psi_Y, \quad \widehat{v}_1 = -\Psi_X, \quad \Psi_{T_1} = 0. \tag{5.1}$$

При этом получается, что $\widehat{p}_1 = 0$ с точностью до константы по горизонтальным переменным.

Амплитудные уравнения. Вычисления показывают, что для $Q_2^{(1)}$ справедливо следующее выражение:

$$Q_2^{(1)} = \sum_{j=1}^n \{ \check{Q}_{2ja} [A_{jT_1} + (ik_{aj}\Psi_Y - ik_{bj}\Psi_X)A_j] + \check{Q}_{2jb}A_{jX} + \check{Q}_{2jc}A_{jY} \} e^{i\phi_j} \left\{ \begin{matrix} \sin \pi z \\ \cos \pi z \end{matrix} \right\} + \text{c.c.} .$$

Здесь введены фазы $\phi_j = \omega t + k_{aj}x + k_{bj}y$ каждой из мод, а компоненты входящих в выражение векторов запишутся так:

$$\check{Q}_{2ja} = -L_a \check{\varphi}_{1j}, \quad \check{Q}_{2jb} = (2ik_{aj}L_b - L_c) \check{\varphi}_{1j}, \quad \check{Q}_{2jc} = (2ik_{bj}L_b - L_d) \check{\varphi}_{1j}.$$

Условия отсутствия секулярных членов первого типа (4.1) в решениях уравнений при ε^2 запишутся как $\langle Q_2^{(1)}, F_j \rangle_c = 0$ и, после несложных вычислений, сводятся к достаточности потребовать $\langle \overline{Q}_{2j}^{(1)}, \overline{F}_j \rangle = 0$ для каждого $j = 1 \dots n$. Или в развернутом виде:

$$\langle \overline{Q}_{2j}^{(1)}, \overline{F}_j \rangle = \langle \check{Q}_{2ja}, \overline{F}_j \rangle [A_{jT_1} + (ik_{aj}\Psi_Y - ik_{bj}\Psi_X)A_j] + \langle \check{Q}_{2jb}, \overline{F}_j \rangle A_{jX} + \langle \check{Q}_{2jc}, \overline{F}_j \rangle A_{jY} = 0.$$

Окончательно амплитудные уравнения приобретают следующий вид:

$$A_{jT_1} + 2\alpha_0(ik_{aj}A_{jX} + ik_{bj}A_{jY}) + (ik_{aj}\Psi_Y - ik_{bj}\Psi_X)A_j = 0, \quad j = 1 \dots n, \tag{5.2}$$

где коэффициент $\alpha_0 = \langle \check{Q}_{2jb}, \overline{F}_j \rangle / (2ik_{aj} \langle \check{Q}_{2ja}, \overline{F}_j \rangle)$.

Уравнения (5.1) и (5.2) вместе составляют искомую систему амплитудных уравнений, получающуюся при рассмотрении членов порядка ε^2 в методе многомасштабных разложений. Если первое из них удовлетворяется введением горизонтальной функции тока $\Psi(X, Y, T_2)$, не зависящей от медленного времени T_1 , то второе будет использовано для исключения членов вида A_{jT_1} из итоговых амплитудных уравнений. Полученные для $A(X, Y, T_2)$ и $\Psi(X, Y, T_2)$ решения уравнений (7.1) необходимо подставить в уравнения (5.2) для получения зависимостей амплитуд от T_1 .

§ 6. Уравнения при ε^3

Общая схема вывода. Вычислим наконец амплитудные уравнения из системы при ε^3 . Для этого нам понадобятся решения для φ_1 и φ_2 , которые могут быть написаны в общей форме:

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(0)} + \widehat{\varphi}_1, \quad \varphi_2 = \varphi_2^{(0)} + \varphi_2^{(1)} + \widehat{\varphi}_2 + \widetilde{\varphi}_2.$$

Здесь $\varphi_i^{(0)}$ — общие решения однородного уравнения $\widehat{L}\varphi_i^{(0)} = 0$, $\varphi_2^{(1)}$ и $\widetilde{\varphi}_2$ — линейные и нелинейные по амплитуде члены частного решения неоднородного уравнения $\widehat{L}(\varphi_2^{(1)} + \widetilde{\varphi}_2) = Q_2$, $\widehat{\varphi}_i$ — средние поля по медленным горизонтальным переменным, появляющиеся как константы интегрирования. Для $\varphi_2^{(1)}$ имеем следующее выражение:

$$\varphi_2^{(1)} = \sum_{j=1}^n (\check{\varphi}_{2jg}A_{jX} + \check{\varphi}_{2jh}A_{jY}) e^{i\phi_j} \left\{ \begin{matrix} \sin \pi z \\ \cos \pi z \end{matrix} \right\} + \text{c.c.}, \quad \check{\varphi}_{2jg} = \check{\varphi}_{2jb} - 2\alpha_0 ik_{aj} \check{\varphi}_{2ja},$$

$$\check{\varphi}_{2jh} = (\check{\varphi}_{2jc} - 2\alpha_0 ik_{bj} \check{\varphi}_{2ja}), \quad \text{где } L_j \check{\varphi}_{2ja} = \check{Q}_{2ja}, \quad L_j \check{\varphi}_{2jb} = \check{Q}_{2jb}, \quad L_j \check{\varphi}_{2jc} = \check{Q}_{2jc}.$$

Выпишем систему уравнений при ε^3 в общем виде:

$$\widehat{L}\varphi_3 = -\widehat{L}_1\varphi_2 - \widehat{L}_2\varphi_1 - \widehat{N}_1(\varphi_1, \varphi_2) - \widehat{N}_1(\varphi_2, \varphi_1) - \widehat{N}_2(\varphi_1, \varphi_1) = Q_3^{(1)} + Q_3^{(2)} + Q_3^{(3)}.$$

Тогда выражения для $Q_3^{(1)}$ и $Q_3^{(2)}$, которые нам только и нужны для вывода амплитудных уравнений, запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_3^{(1)} &= -[\widehat{L}_1\varphi_2^{(1)} + \widehat{L}_2\varphi_1^{(0)} + \widehat{N}_1(\widehat{\varphi}_1, \varphi_2^{(1)}) + \widehat{N}_2(\widehat{\varphi}_1, \varphi_1^{(0)}) + \widehat{N}_2(\varphi_1^{(0)}, \widehat{\varphi}_1) + \\ &\quad + \widehat{N}_1(\varphi_1^{(0)}, \widetilde{\varphi}_2) + \widehat{N}_1(\widetilde{\varphi}_2, \varphi_1^{(0)})] = Q_3^{(1l)} + Q_3^{(1p)} + Q_3^{(1n)}, \\ Q_3^{(2)} &= -[\widehat{L}_1\widehat{\varphi}_2 + \widehat{L}_2\widehat{\varphi}_1 + \widehat{N}_1(\varphi_2^{(1)}, \varphi_1^{(0)}) + \widehat{N}_2(\varphi_1^{(0)}, \varphi_1^{(0)}) + \widehat{N}_2(\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_1)]. \end{aligned}$$

Здесь мы отдельно выделили линейные $Q_3^{(1l)}$ и нелинейные $Q_3^{(1n)}$ по A_j члены, а также члены $Q_3^{(1p)}$, содержащие $\widehat{\varphi}_1$. Обозначим $\beta_0 = -\langle \check{Q}_{2ja}, \overline{F}_j \rangle$, тогда искомые амплитудные уравнения в общем виде можно записать так:

$$\frac{1}{\beta_0} \langle Q_3^{(1)}, F_j \rangle_c = \frac{1}{\beta_0} \langle \overline{Q}_3^{(1l)}, \overline{F}_j \rangle + \frac{1}{\beta_0} \langle \overline{Q}_3^{(1p)}, \overline{F}_j \rangle + \frac{1}{\beta_0} \langle Q_3^{(1n)}, F_j \rangle_c = 0.$$

Линейные члены. Подробные вычисления дают следующую формулу для линейных членов уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_0} \langle \overline{Q}_3^{(1l)}, \overline{F}_j \rangle &= -A_{jT_2} + \frac{1}{\beta_0} \langle \check{Q}_{3jR}, \overline{F}_j \rangle A_j + \frac{1}{\beta_0} \langle \check{Q}_{3ja}, \overline{F}_j \rangle A_{jXX} + \frac{1}{\beta_0} \langle \check{Q}_{3jb}, \overline{F}_j \rangle A_{jYY} + \\ &\quad + \frac{1}{\beta_0} \langle \check{Q}_{3jc}, \overline{F}_j \rangle A_{jXY} = -A_{jT_2} + rA_j + \frac{\alpha_1}{k^2} (k_{aj}^2 A_{jXX} + 2k_{aj}k_{bj} A_{jXY} + k_{bj}^2 A_{jYY}) - \alpha_0 \Delta_{\perp} A_j. \end{aligned}$$

Члены с завихренностью. Аналогичным образом получается формула для членов с Ψ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_0} \langle \overline{Q}_3^{(1p)}, \overline{F}_j \rangle &= -\frac{1}{\beta_0} \left(\frac{1}{ik_{aj}} \langle \check{Q}_{3jd}, \overline{F}_j \rangle + \frac{\pi^2}{k^2} \right) A_j [(k_{aj}^2 - k_{bj}^2) \Psi_{XY} + k_{aj}k_{bj} (\Psi_{YY} - \Psi_{XX})] - \\ &\quad - J(A_j, \Psi) = \frac{ik\alpha_3}{k^2} A_j [(k_{aj}^2 - k_{bj}^2) \Psi_{XY} + k_{aj}k_{bj} (\Psi_{YY} - \Psi_{XX})] - J(A_j, \Psi). \end{aligned}$$

Здесь введен якобиан по горизонтальным переменным $J(f, g) = f_X g_Y - f_Y g_X$. В формулах использованы следующие векторы правых частей уравнений:

$$\begin{aligned} \check{Q}_{2ja} &= -L_a \check{\varphi}_{1j}, \quad \check{Q}_{3jR} = -\sigma(r_T R_{Tc} L_{R1} - r_S R_{Sc} L_{R2}) \check{\varphi}_{1j}, \quad \check{Q}_{3jd} = L_a \check{\varphi}_{2jg}, \\ \check{Q}_{3ja} &= (2\alpha_0 ik_{aj} L_a + 2ik_{aj} L_b - L_c) \check{\varphi}_{2jg} + L_b \check{\varphi}_{1j}, \quad \check{Q}_{3jb} = (2\alpha_0 ik_{bj} L_a + 2ik_{bj} L_b - L_d) \check{\varphi}_{2jh} + L_b \check{\varphi}_{1j}, \\ \check{Q}_{3jc} &= (2\alpha_0 ik_{bj} L_a + 2ik_{bj} L_b - L_d) \check{\varphi}_{2jg} + (2\alpha_0 ik_{aj} L_a + 2ik_{aj} L_b - L_c) \check{\varphi}_{2jh}. \end{aligned}$$

Нелинейные члены. Теперь вычислим нелинейные члены вида $\langle Q_3^{(1n)}, F_j \rangle_c$, входящие в амплитудные уравнения. Вектор нелинейных по амплитуде членов $Q_3^{(1n)}$ в правой части уравнений при ε^3 можно представить в виде суммы:

$$Q_3^{(1n)} = - \left[\widehat{N}_2(\varphi_1^{(0)}, \widetilde{\varphi}_2) + \widehat{N}_2(\widetilde{\varphi}_2, \varphi_1^{(0)}) \right].$$

Скрупулёзное и достаточно громоздкое вычисление этой суммы сводится к тому, что $\widetilde{\varphi}_2$ разбивается на шесть слагаемых, представляющих нелинейные члены различного типа, и подставляется в выражение для $Q_3^{(1n)}$, после чего отбрасываются заведомо нулевые члены, а оставшиеся пять членов искомой суммы последовательно вычисляются. Их подстановка в выражение для условия разрешимости дает для нелинейных членов амплитудных уравнений следующие окончательные формулы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_0} \langle \overline{Q}_3^{(1c)}, \overline{F}_j \rangle_c &= \alpha_2 A_j \sum_{q=1}^n |A_q|^2 + \sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{p=q+1}^n \left[\mathcal{D}(\vec{k}_q + \vec{k}_p - \vec{k}_m - \vec{k}_j) \alpha_{jmqr}^{(1)} A_m^* A_q A_p + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{D}(\vec{k}_q - \vec{k}_p - \vec{k}_m + \vec{k}_j) \alpha_{jmqr}^{(2)} A_m A_q^* A_p + \mathcal{D}(\vec{k}_q - \vec{k}_p + \vec{k}_m - \vec{k}_j) \alpha_{jmqr}^{(3)} A_m A_q A_p^* \right]. \end{aligned}$$

Для коэффициентов $\alpha_{jmq}^{(s)}$, $(s = 1, 2, 3)$, справедливы следующие выражения:

$$\begin{aligned} \alpha_{jmq}^{(1)} &= -\frac{c_{qp1}\pi^2}{2k^4}\beta_2 \left\{ \left[\left(1 - \frac{c_{mqp1}}{c_{qp2}} \right) \frac{\pi^2}{\varkappa^2} c_{jm1} + (2k^2 - c_{mqp1})\beta_{15} \right] \beta_4 + (2k^2 - c_{mqp1})\beta_7 \right\}, \\ \alpha_{jmq}^{(2)} &= -\frac{c_{qp2}\pi^2}{2k^4} \left\{ \left[\left(1 - \frac{c_{mqp2}}{c_{qp1}} \right) \beta_{11} + (2k^2 - c_{mqp2}) \left(\beta_{12} - \frac{\pi^2 c_{jqp2}}{k^2 c_{qp1}} \right) \frac{k^2}{\varkappa^2} \beta_2 \right] \beta_5 - \beta_{14} \right\}, \\ \alpha_{jmq}^{(3)} &= -\frac{c_{qp2}\pi^2}{2k^4} \left\{ \left[\left(1 + \frac{c_{mqp2}}{c_{qp1}} \right) \beta_{11} + (2k^2 + c_{mqp2}) \left(\beta_{12} + \frac{\pi^2 c_{jqp2}}{k^2 c_{qp1}} \right) \frac{k^2}{\varkappa^2} \beta_2 \right] \beta_5 - \beta_{13} \right\}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь обозначены коэффициенты $\beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7$, зависящие от p и q :

$$\begin{aligned} \beta_4 &= \left[1 - \mathcal{D}(\vec{k}_q + \vec{k}_p) \right] \left\{ 2 + \frac{(c_{qp2} + 2\pi^2)\beta_8 + i\omega(i\omega + \sigma\varkappa^2)}{(i\omega + c_{qp2} + 2\pi^2)(i\omega + \tau(c_{qp2} + 2\pi^2))} \right\} / \\ & \quad / \left\{ \frac{4k^2(c_{qp2} + 2\pi^2)(i\omega + \sigma(c_{qp2} + 2\pi^2))}{c_{qp2}\varkappa^2} + \frac{(c_{qp2} + 2\pi^2)\beta_9 + i\omega\beta_{10}}{(i\omega + c_{qp2} + 2\pi^2)(i\omega + \tau(c_{qp2} + 2\pi^2))} \right\}, \\ \beta_5 &= \frac{c_{qp1}\tau\varkappa^2(2c_{qp1} + 4\pi^2 - \varkappa^2)}{4k^2\tau\sigma(c_{qp1} + 2\pi^2)^3 + c_{qp1}\varkappa^2\beta_9}, \quad \beta_6 = \frac{(c_{qp2} + 2\pi^2)\beta_8 + i\omega(i\omega + \sigma\varkappa^2)}{2(i\omega + c_{qp2} + 2\pi^2)(i\omega + \tau(c_{qp2} + 2\pi^2))}, \\ \beta_7 &= \frac{(c_{qp2} + 2\pi^2)[(i\omega + \varkappa^2)\beta_8 + \tau\varkappa^2(\tau + \sigma)(i\omega - \varkappa^2)] + i\omega\varkappa^2\beta_8 - \omega^2(i\omega + \sigma\varkappa^2)}{2(i\omega + c_{qp2} + 2\pi^2)(i\omega + \tau(c_{qp2} + 2\pi^2))(i\omega + \varkappa^2)(i\omega + \tau\varkappa^2)}. \end{aligned}$$

Для более компактного вида формул введены коэффициенты $\beta_8 = (1 + \tau + \sigma)i\omega - \tau\varkappa^2$, а также $\beta_9 = (1 + \tau + \sigma)\omega^2 - \tau\sigma\varkappa^4$ и $\beta_{10} = \omega^2 - (\tau + \sigma + \tau\sigma)\varkappa^4$. Стоит специально отметить, что коэффициент β_4 обращается в ноль всякий раз, когда справедливо $\vec{k}_q = -\vec{k}_p$. Также в формулах (6.1) использованы еще несколько коэффициентов:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{\pi^2}{\varkappa^2} c_{jm2}\beta_2 - k^2, \quad \beta_{12} = 1 + \frac{\varkappa^2\beta_8}{2\tau k^2(c_{qp1} + 2\pi^2)}, \quad \beta_{13} = \frac{\varkappa^2(2k^2 + c_{mqp2})}{4i\omega(c_{qp1} + 2\pi^2)}, \\ \beta_{14} &= \frac{\varkappa^2(2k^2 - c_{mqp2})}{4i\omega(c_{qp1} + 2\pi^2)}, \quad \beta_{15} = \left(1 + \frac{\pi^2 c_{jqp1}}{k^2 c_{qp2}} \right) \frac{k^2}{\varkappa^2} + \beta_6. \end{aligned}$$

Здесь β_2 приведен в работе [13]. Во всех представленных выше формулах используются величины, составленные из скалярных произведений волновых чисел мод $c_{mqp1} = (\vec{k}_m, \vec{k}_q) + (\vec{k}_m, \vec{k}_p)$, $c_{mqp2} = (\vec{k}_m, \vec{k}_q) - (\vec{k}_m, \vec{k}_p)$, $c_{qp1} = k^2 - (\vec{k}_q, \vec{k}_p)$, $c_{qp2} = k^2 + (\vec{k}_q, \vec{k}_p)$.

Уравнение для функции тока. Из условия отсутствия секулярных членов второго типа в уравнениях при ε^3 необходимо потребовать, чтобы выполнялось $Q_3^{(2)} = 0$. Расписанное покомпонентно, оно приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} Q_3^{(2)}(1) &= \sigma\Delta_{\perp}\Psi_Y - \Psi_{YT_2} - \Psi_{2YT_1} - \hat{p}_{2X} - \Psi_Y\Psi_{XY} + \Psi_X\Psi_{YY} - \\ & \quad - \frac{\pi^2}{k^4} \sum_{j=1}^n (k_{aj}^2(|A_j|^2)_X + k_{aj}k_{bj}(|A_j|^2)_Y) = 0, \\ Q_3^{(2)}(2) &= -\sigma\Delta_{\perp}\Psi_X + \Psi_{XT_2} + \Psi_{2XT_1} - \hat{p}_{2Y} + \Psi_Y\Psi_{XX} - \Psi_X\Psi_{XY} - \\ & \quad - \frac{\pi^2}{k^4} \sum_{j=1}^n (k_{aj}k_{bj}(|A_j|^2)_X + k_{bj}^2(|A_j|^2)_Y) = 0. \end{aligned}$$

Продифференцируем первое из этих уравнений по Y и вычтем из него второе уравнение, продифференцированное по X . Положим также, что справедливо $\Delta_{\perp}\Psi_{2T_1} = 0$, как и в случае Ψ . В результате получим итоговое уравнение, связывающее горизонтальную завихренность Ψ с конвекцией A_j :

$$(\partial_{T_2} - \sigma\Delta_{\perp})\Delta_{\perp}\Psi = J(\Psi, \Delta_{\perp}\Psi) - \frac{\pi^2}{k^2} \sum_{j=1}^n \hat{G}_j(|A_j|^2).$$

Здесь мы ввели оператор $\hat{G}_j(f) = ((k_{aj}^2 - k_{bj}^2)f_{XY} + k_{aj}k_{bj}(f_{YY} - f_{XX}))/k^2$. Также введен якобиан по горизонтальным переменным по обычной формуле $J(f, g) = f_X g_Y - f_Y g_X$.

§ 7. Семейство амплитудных уравнений

Итоговое семейство амплитудных уравнений, являющееся результатом данной работы, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \partial_{T_2} A_j = r A_j + \frac{\alpha_1}{k^2} (k_{aj} \partial_X + k_{bj} \partial_Y)^2 A_j - \alpha_0 \Delta_{\perp} A_j + ik \alpha_3 \widehat{G}_j(\Psi) A_j + J(\Psi, A_j) + N_j(A), \\ (\partial_{T_2} - \sigma \Delta_{\perp}) \Delta_{\perp} \Psi = J(\Psi, \Delta_{\perp} \Psi) - \frac{\pi^2}{k^2} \sum_{j=1}^n \widehat{G}_j(|A_j|^2), \quad j = 1 \dots n, \end{cases} \quad (7.1)$$

где функция $N_j(A)$ представляет собой сумму нелинейных членов:

$$\begin{aligned} N_j(A) = & \alpha_2 A_j \sum_{q=1}^n |A_q|^2 + \sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{p=q+1}^n \left[\mathcal{D}(\vec{k}_q + \vec{k}_p - \vec{k}_m - \vec{k}_j) \alpha_{jmqr}^{(1)} A_m^* A_q A_p + \right. \\ & \left. + \mathcal{D}(\vec{k}_q - \vec{k}_p - \vec{k}_m + \vec{k}_j) \alpha_{jmqr}^{(2)} A_m A_q^* A_p + \mathcal{D}(\vec{k}_q - \vec{k}_p + \vec{k}_m - \vec{k}_j) \alpha_{jmqr}^{(3)} A_m A_q A_p^* \right]. \end{aligned}$$

Коэффициенты $r, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в уравнениях (7.1) совпадают с одноименными коэффициентами в работе [13]. Там же приведены формулы для этих коэффициентов при $k = \pi/\sqrt{2}$ и графики их зависимости от частоты ω . Коэффициенты при нелинейных членах $\alpha_{jmqr}^{(s)}$, ($s = 1, 2, 3$), представлены формулами (6.1).

Ясно, что подробное аналитическое и численное исследование получившихся уравнений представляет собой отдельную и нетривиальную задачу, некоторые подходы к которой намечены в данной работе.

§ 8. Частные случаи амплитудных уравнений для ячеек различной формы

Одномерная по пространству конвекция. В случае, когда вся динамика рассматривается относительно единственной пространственной переменной X и отсутствует взаимодействие с полем горизонтальной завихренности Ψ , система (7.1) приобретает форму комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау (CGLE), конкретный вид которого приведен и обсуждается в работе [13].

Валиковая конвекция. Рассмотрим одномерную конвекцию, когда конвективные валики выстроены вдоль оси x , а волновой вектор $\vec{k} = (k, 0)$. То есть $k_{a1} = k, k_{b1} = 0$. В этом случае исходные уравнения (7.1) после преобразования независимых и зависимых переменных приобретают следующую форму:

$$\begin{cases} A_T = A + \alpha_6 A_{XX} - \alpha_7 A_{YY} + \alpha_9 \Psi_{XY} A + J(\Psi, A) - iA|A|^2, \\ \Omega_T = \alpha_8 \Delta_{\perp} \Omega + J(\Psi, \Omega) - (|A|^2)_{XY}, \quad \Omega = \Delta_{\perp} \Psi. \end{cases} \quad (8.1)$$

Общие выражения для коэффициентов этой системы и их численные значения для $k = 10$, $\omega = 1000$, $\sigma = 7$, $\tau = 1/25$:

$$\begin{aligned} \alpha_6 = \alpha_5 k^2 \varkappa^2 / (4\pi^2 \omega) = 0.347523 + 0.333882i, \quad \alpha_7 = \alpha_0 k^2 \varkappa^2 / (4\pi^2 \omega) = -0.105074 + 0.244961i, \\ \alpha_8 = \sigma k^2 \varkappa^2 / (4\pi^2 \omega) = 1.948121, \quad \alpha_9 = ik \alpha_3 = 0.180998 - 0.345899i. \end{aligned}$$

Следует особо отметить, что в пределе больших ω коэффициенты α_6 и α_7 не обращаются в нуль и становятся равными $\alpha_6 = 3ik^2/(8\varkappa^2)$ и $\alpha_7 = i/8$. В этом пределе при различных значениях k получается $\alpha_6 = 0i, \dots, 3i/8$. Коэффициент α_8 , описывающий затухание вихря Ω , стремится к нулю. Тем не менее, перекрестные члены, описывающие в уравнениях взаимодействие вихря с конвекцией, не исчезают, как можно было бы ожидать. Для коэффициента α_9 при больших ω справедливо $\alpha_9 \approx -3\pi^2/2\varkappa^2 + \sigma k^2/i\omega$. Таким образом, можно предположить, что при бидиффузионной конвекции в макроскопических системах, для которых характерны большие значения ω , эффекты взаимодействия конвекции с полем горизонтальной завихренности, возбуждение вихря за счет конвекции играют существенную роль.

Если положить в уравнениях (8.1) $\Psi = 0$ и исключить вынуждающий член, то при больших частотах выведенная система сведется к одному уравнению, которое является разновидностью двумерного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ):

$$iA_T = -A_{XX} + A_{YY} + A|A|^2.$$

Это уравнение, вероятно, может играть существенную роль в моделировании процессов формирования и динамики структур в различных физических системах и, по всей видимости, описывает так называемую *идеальную турбулентность* [17].

Ячейки квадратного типа. Рассмотрим двухмодовую конвекцию, когда конвективные валики выстроены вдоль осей x и y , а волновые векторы: $\vec{k}_1 = (k, 0)$ и $\vec{k}_2 = (0, k)$. То есть $k_{a1} = k, k_{b1} = 0$ и $k_{a2} = 0, k_{b2} = k$. В этом случае исходные уравнения (7.1) преобразуются к следующему виду:

$$\begin{cases} A_T = A + \alpha_6 A_{XX} - \alpha_7 A_{YY} + \alpha_9 \Psi_{XY} A + J(\Psi, A) - iA|A|^2 + \alpha_{10} A|B|^2, \\ B_T = B + \alpha_6 B_{YY} - \alpha_7 B_{XX} - \alpha_9 \Psi_{XY} B + J(\Psi, B) - iB|B|^2 + \alpha_{10} B|A|^2, \\ \Omega_T = \alpha_8 \Delta_{\perp} \Omega + J(\Psi, \Omega) - [(|A|^2)_{XY} - (|B|^2)_{XY}], \quad \Omega = \Delta_{\perp} \Psi. \end{cases}$$

Здесь введен еще один коэффициент $\alpha_{10}(10, 1000, 7, 1/25) = 0.018890 - 0.894742i$.

Ячейки гексагонального типа. Рассмотрим теперь трехмодовую конвекцию, когда конвективные валики выстроены под углом 120 градусов друг к другу, и волновые векторы: $\vec{k}_1 = (k, 0)$, $\vec{k}_2 = (-k/2, k\sqrt{3}/2)$, $\vec{k}_3 = (-k/2, -k\sqrt{3}/2)$. В этом случае исходные уравнения (7.1) преобразуются к следующему виду:

$$\begin{cases} A_T = A + \alpha_6 A_{XX} - \alpha_7 A_{YY} + J(\Psi, A) + \alpha_9 A \Psi_{XY} - \\ \quad - iA|A|^2 + \alpha_{11} A(|B|^2 + |C|^2), \\ B_T = B + \alpha_{61} B_{XX} + \alpha_{71} B_{YY} - \alpha_{72} B_{XY} + J(\Psi, B) - \\ \quad - \frac{1}{2} \alpha_9 B [\Psi_{XY} + \frac{\sqrt{3}}{2} (\Psi_{YY} - \Psi_{XX})] - iB|B|^2 + \alpha_{11} B(|A|^2 + |C|^2), \\ C_T = C + \alpha_{61} C_{XX} + \alpha_{71} C_{YY} + \alpha_{72} C_{XY} + J(\Psi, C) - \\ \quad - \frac{1}{2} \alpha_9 C [\Psi_{XY} - \frac{\sqrt{3}}{2} (\Psi_{YY} - \Psi_{XX})] - iC|C|^2 + \alpha_{11} C(|A|^2 + |B|^2), \\ \Omega_T = \alpha_8 \Delta_{\perp} \Omega + J(\Psi, \Omega) - (|A|^2 - \frac{1}{2}|B|^2 - \frac{1}{2}|C|^2)_{XY} + \\ \quad + \frac{\sqrt{3}}{4} (|B|^2 - |C|^2)_{XX} - \frac{\sqrt{3}}{4} (|B|^2 - |C|^2)_{YY}, \quad \Omega = \Delta_{\perp} \Psi. \end{cases}$$

Здесь обозначены коэффициенты: $\alpha_{61} = \frac{1}{4}\alpha_6 - \frac{3}{4}\alpha_7$, $\alpha_{71} = \frac{3}{4}\alpha_6 - \frac{1}{4}\alpha_7$, $\alpha_{72} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_6 + \alpha_7)$, $\alpha_{11}(10, 1000, 7, 1/25) = 0.020234 - 0.670408i$.

§ 9. Численное моделирование

Для численного моделирования полученных уравнений написаны пакеты программ на MATLAB на основе современных ETD (exponential time differencing) псевдоспектральных методов для исследования валиковой конвекции, а также конвекции с квадратными и гексагональными ячейками.

В расчетах использовался, главным образом, двухслойный метод ETD2 из работы [18]. При этом первый шаг, необходимый для начальных условий этого метода, осуществлялся при помощи метода ETD1. Количество точек по обоим горизонтальным переменным составляло 256. Размер области, как правило, выбирался 15×15 , и расчеты велись до времен порядка $T = 50$. В некоторых случаях выбирались квадратные области размером 10×10 и 25×25 . Во всех случаях использовались периодические граничные условия, естественные для псевдоспектральных методов. В качестве начальных условий при моделировании выбирался либо случайный шум с амплитудой 10^{-4} , либо колоколообразная функция $A = 2 \exp(-0.5(X^2 + Y^2))$.

Численное моделирование показало, что конвекция в рассматриваемой системе имеет вид вытянутых «облаков» или «нитей» (рис. 1). Было замечено, что в системе достаточно быстро

(за время порядка $T = 35$) развивается состояние диффузионного хаоса, когда первоначальное симметричное состояние разрушается и конвекция становится нерегулярной как по пространству, так и по времени (рис. 2). При этом в некоторых областях возникают пиковые всплески завихренности. В случае двух и более мод общая пространственная картина конвекции выглядит как нерегулярное чередование конвективных ячеек разной формы. При этом для каждой из мод и функции тока решения качественно похожи на случай валиковой конвекции (рис. 1). Отмечались случаи, когда при некоторых значениях параметров в многомодовой конвекции амплитуда ячеек росла вплоть до образования сингулярного решения. Для регуляризации таких ситуаций оказалось достаточным ввести в уравнения небольшие поправки в виде членов пятой степени по амплитуде. Более подробное описание и анализ результатов численного моделирования уравнений (7.1) выходят за рамки данной работы.

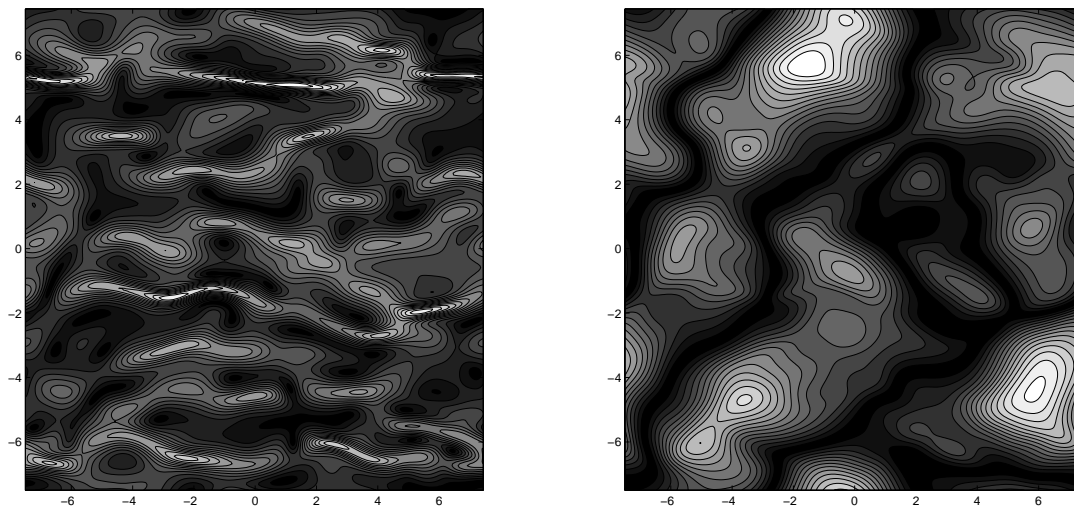


Рис. 1. Численное решение одномодовых уравнений в области 15×15 для $T = 20$, показаны: модуль амплитуды $|A(T, X, Y)|$ (слева); модуль функции тока $|\Psi(T, X, Y)|$ (справа). Граничные условия — периодические, начальные условия — случайный шум с амплитудой 10^{-4} , сетка — 256×256 точек

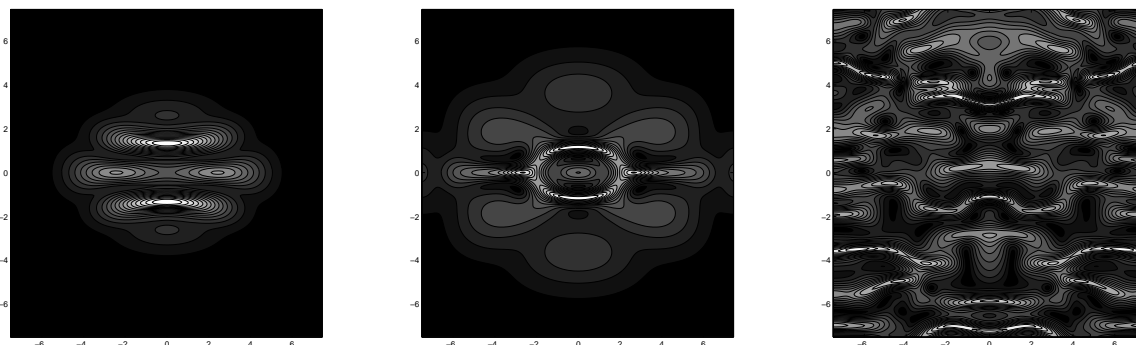


Рис. 2. Численное решение одномодовых уравнений в области 15×15 , показан модуль амплитуды $|A(T, X, Y)|$, начальные условия: $A = 2 \exp(-0.5(X^2 + Y^2))$. Для значений времени $T = 2, 4, 40$ (слева направо). Граничные условия — периодические, сетка — 256×256 точек

§ 10. Результаты

В работе получено семейство амплитудных уравнений (7.1), описывающее трехмерную бидиффузионную конвекцию в бесконечном слое жидкости, взаимодействующую с полем горизонтальной завихренности Ψ для ячеек в виде конечной суперпозиции валиковых мод. Разработаны численные схемы на основе современных псевдоспектральных методов [18] для моделирования системы (7.1). Написаны пакеты программ для моделирования бидиффузионной конвекции с ячейками различной формы. В ходе численного моделирования были установлены характерные особенности конвективных структур и хаотических режимов в исследуемой системе (см. рис. 1 и 2).

Полученные результаты позволяют глубже понять особенности процессов теплопереноса в океане и атмосфере, существенным образом влияющих на климат и миграцию разнообразных примесей, более адекватно описывать конвективные и вихревые структуры, возникающие в физических системах с конвективной неустойчивостью, а также могут быть основой для построения более продвинутых моделей такого рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея–Бенара. Структуры и динамика. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 247 с.
2. Хапперт Г., Тернер Дж. Конвекция, обусловленная двойной диффузией // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы: сб. М.: Мир, 1984. С. 413–453.
3. Kozitskiy S.B. Fine structure generation in double-diffusive system // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. № 5. P. 056309-1–056309-6.
4. Stommel H., Arons A.B., Blanchard D. An oceanographical curiosity: the perpetual salt fountain // Deep-Sea Res. 1956. Vol. 3. P. 152–153.
5. Knobloch E., Moore D.R., Toomre J., Weiss N.O. Transitions to chaos in two-dimensional double-diffusive convection // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 166. P. 409–448.
6. Meca E., Mercader I., Batiste O., Ramí-rez-Piscina L. Blue sky catastrophe in double-diffusive convection // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 92. P. 234501-1–234501-4.
7. Newell A.C., Whitehead J.A. Finite bandwidth, finite amplitude convection // J. Fluid Mech. 1968. Vol. 38. P. 279–303.
8. Zippelius A., Siggia E.D. Stability of final amplitude convection // Phys. Fluids. 1983. Vol. 26. P. 2905–2915.
9. Bretherton C.S., Spiegel E.A. Intermittency through modulational instability // Phys. Lett. 1983. Vol. 96A. P. 152–156.
10. Козицкий С.Б. Амплитудные уравнения для системы с термохалинной конвекцией // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 2. С. 56–66.
11. Balmforth N.J., Biello J.A. Double diffusive instability in a tall thin slot // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 375. P. 203–233.
12. Козицкий С.Б. Амплитудные уравнения для трехмерной бидиффузионной конвекции в окрестности точек бифуркации Хопфа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 3. С. 46–60.
13. Козицкий С.Б. Амплитудные уравнения для трехмерной бидиффузионной валиковой конвекции с ячейками произвольной ширины в окрестности точек бифуркации Хопфа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4. С. 13–24.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
15. Weiss N.O. Convection in an imposed magnetic field. Part 1. The development of nonlinear convection // J. Fluid Mech. 1981. Vol. 108. P. 247–272.
16. Найфэ А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
17. Cooke K.L. Differential difference equations and nonlinear initial-boundary-value problems for linear hyperbolic partial differential equations // J. Math. Anal. and Appl. 1968. Vol. 24. P. 372–387.
18. Cox S.M., Matthews P.C. Exponential time differencing for stiff systems // J. Comput. Phys. 2002. Vol. 176. P. 430–455.

Поступила в редакцию 16.05.2012

Козицкий Сергей Борисович, к. ф.-м. н., с. н. с., лаб. 3/2, Тихоокеанский океанологический институт, 690041, Россия, г. Владивосток, ул. Балтийская, 43.

E-mail: skozi@poi.dvo.ru

S. B. Kozitskii

Model of three dimensional double-diffusive convection with cells of an arbitrary shape

Keywords: double-diffusive convection, amplitude equation, multiple-scale method.

Mathematical Subject Classifications: 34E13, 76E06, 76R99

Three-dimensional double-diffusive convection in a horizontally infinite layer of an incompressible liquid interacting with horizontal vorticity field is considered in the neighborhood of Hopf bifurcation points. A family of amplitude equations for variations of convective cells amplitude is derived by multiple-scaled method. Shape of the cells is given as a superposition of a finite number of convective rolls with different wave vectors.

For numerical simulation of the obtained systems of amplitude equations a few numerical schemes based on modern ETD (exponential time differencing) pseudospectral methods have been developed. The software packages have been written for simulation of roll-type convection and convection with square and hexagonal type cells. Numerical simulation has showed that the convection takes the form of elongated “clouds” or “filaments”. It has been noted that in the system quite rapidly a state of diffusive chaos is developed, where the initial symmetric state is destroyed and the convection becomes irregular both in space and time. At the same time in some areas there are bursts of vorticity.

REFERENCES

1. Getling A.V. *Rayleigh–Benard Convection: Structures and Dynamics, Advanced Series in Nonlinear Dynamics*, 1998, vol. 11, Singapore–River Edge, New Jersey: World Scientific, 245 p.
2. Huppert H.E., Turner J.S. Double-diffusive convection, *J. Fluid Mech.*, 1981, vol. 106, pp. 299–329.
3. Kozitskiy S.B. Fine structure generation in double-diffusive system, *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 72, no. 5, pp. 056309-1–056309-6.
4. Stommel H., Arons A.B., Blanchard D. An oceanographical curiosity: the perpetual salt fountain, *Deep-Sea Res.*, 1956, vol. 3, pp. 152–153.
5. Knobloch E., Moore D.R., Toomre J., Weiss N.O. Transitions to chaos in two-dimensional double-diffusive convection, *J. Fluid Mech.*, 1986, vol. 166, pp. 409–448.
6. Meca E., Mercader I., Batiste O., Rami’rez-Piscina L. Blue sky catastrophe in double-diffusive convection, *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 92, pp. 234501-1–234501-4.
7. Newell A.C., Whitehead J.A. Finite bandwidth, finite amplitude convection, *J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 38, pp. 279–303.
8. Zippelius A., Siggia E.D. Stability of final amplitude convection, *Phys. Fluids*, 1983, vol. 26, pp. 2905–2915.
9. Bretherton C.S., Spiegel E.A. Intermittency through modulational instability, *Phys. Lett.*, 1983, vol. 96A, pp. 152–156.
10. Kozitskiy S.B. Amplitude equations for a system with thermohaline convection, *J. Appl. Mech. and Tech. Phys.*, 2000, vol. 41, no. 3, pp. 429–438.
11. Balmforth N.J., Biello J.A. Double diffusive instability in a tall thin slot, *J. Fluid Mech.*, 1998, vol. 375, pp. 203–233.
12. Kozitskiy S.B. Amplitude equations for three-dimensional double-diffusive convection in the neighborhood of Hopf bifurcation points, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp’yut. Nauki*, 2008, no. 3, pp. 46–60. <http://vst.ics.org.ru/journal/article/1493/>
13. Kozitskiy S.B. Amplitude equations for three-dimensional roll-type double-diffusive convection with an arbitrary cell width in the neighborhood of Hopf bifurcation points, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp’yut. Nauki*, 2010, no. 4, pp. 13–24. <http://vst.ics.org.ru/journal/article/1706/>
14. Landau L.D., Lifshits E.M. *Fluid Mechanics, Course of Theoretical Physics Vol. 6*, Oxford: Pergamon Press, 1999, 539 p.

15. Weiss N.O. Convection in an imposed magnetic field. Part 1. The development of nonlinear convection, *J. Fluid Mech.*, 1981, vol. 108, pp. 247–272.
16. Nayfeh A.H. *Introduction to perturbation techniques*, New York–Chichester–Brisbane–Toronto: John Wiley and Sons, 1993, 536 p.
17. Cooke K.L. Differential difference equations and nonlinear initial-boundary-value problems for linear hyperbolic partial differential equations, *J. Math. Anal. and Appl.*, 1968, vol. 24, pp. 372–387.
18. Cox S.M., Matthews P.C. Exponential time differencing for stiff systems, *J. Comput. Phys.*, 2002, vol. 176, pp. 430–455.

Received 16.05.2012

Kozitskii Sergei Borisovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Pacific Oceanological Institute, ul. Baltiiskaya, 43, Vladivostok, 690041, Russia.
E-mail: skozi@poi.dvo.ru