УДК 517.518.6

© *Л. И. Данилов*

РЕКУРРЕНТНЫЕ И ПОЧТИ РЕКУРРЕНТНЫЕ МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ИХ СЕЧЕНИЯ. II [1]

Рассматривается вопрос о существовании рекуррентных и почти рекуррентных сечений многозначных отображений $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) \in \operatorname{comp} U$ с непустыми компактными образами $F(t)$ в полном метрическом пространстве U. На множестве $\operatorname{comp} U$ вводится метрика Хаусдорфа dist. Рекуррентные и почти рекуррентные многозначные отображения определяются как функции со значениями в метрическом пространстве $(\operatorname{comp} U, \operatorname{dist})$. Доказано существование рекуррентных (почти рекуррентных) сечений многозначных рекуррентных (соответственно, почти рекуррентных) равномерно абсолютно непрерывных отображений. Рассматриваются также отображения $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t)$, образы которых состоят из конечного числа точек (зависящего от t). Доказано, что если такое отображение почти рекуррентно, то у него существует почти рекуррентное сечение. Многозначное рекуррентное отображение, образы $F(t)$ которого для всех $t \in \mathbb{R}$ состоят не более чем из n точек (где $n \in \mathbb{N}$), имеет рекуррентное сечение. Если образы многозначного рекуррентного (почти рекуррентного) отображения $t \mapsto F(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ состоят из n точек, то все n непрерывных сечений отображения F рекуррентны (почти рекуррентны).

Ключевые слова: рекуррентная функция, сечение, многозначное отображение.

Введение

Пусть (U, ρ) — полное метрическое пространество, $\operatorname{cl}_b U$ — множество непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства U, $\operatorname{comp} U$ — множество непустых компактных подмножеств. Обозначим через $\operatorname{cl}^{(n)} U$, $n \in \mathbb{N}$, совокупность непустых подмножеств $X \subseteq U$, состоящих не более чем из n точек, $\operatorname{cl}^{(0)} U = \varnothing$; $\operatorname{cl}_f U \doteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{cl}^{(n)} U$.

На множестве $\operatorname{cl}_b U$ вводится метрика Хаусдорфа

$$\operatorname{dist}(X, Y) = \operatorname{dist}_\rho(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \rho(x, Y),\ \sup_{x \in Y} \rho(x, X) \right\},$$

где $\rho(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \rho(x, y)$ — расстояние от точки $x \in U$ до непустого множества $A \subseteq U$. Метрические пространства $(\operatorname{cl}_b U, \operatorname{dist})$, $(\operatorname{comp} U, \operatorname{dist})$ и $(\operatorname{cl}^{(n)} U, \operatorname{dist})$, $n \in \mathbb{N}$, являются полными. Множество $\operatorname{cl}_f U$ плотно в пространстве $(\operatorname{comp} U, \operatorname{dist})$.

Известно, что непрерывные многозначные отображения $F : \mathbb{R} \to (\operatorname{comp} U, \operatorname{dist})$ могут не иметь непрерывных сечений ни на одном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$ [1]. С другой стороны, если многозначное отображение $F : \mathbb{R} \to (\operatorname{comp} U, \operatorname{dist})$ локально абсолютно непрерывно (в частности, локально липшицево), то у него существуют непрерывные сечения [2] (см. также [3]).

Из «выпуклозначной» селекционной теоремы Майкла [1] следует, что рекуррентные (почти рекуррентные) многозначные отображения $F : \mathbb{R} \to \operatorname{cl}_b \mathcal{B}$ с выпуклыми образами, где $\mathcal{B}$ — банахово пространство, имеют рекуррентные (соответственно, почти рекуррентные) сечения.

В статье доказывается существование рекуррентных (почти рекуррентных) сечений у многозначных рекуррентных (почти рекуррентных) равномерно абсолютно непрерывных (в частности, липшицевых) отображений $F : \mathbb{R} \to \operatorname{comp} U$. Также доказано, что многозначные почти рекуррентные отображения $F : \mathbb{R} \to \operatorname{cl}_f U$ имеют почти рекуррентные сечения. Если $F : \mathbb{R} \to \operatorname{cl}^{(n)} U$, $n \in \mathbb{N}$, — рекуррентное отображение, то у него существует рекуррентное сечение (но рекуррентные отображения $F : \mathbb{R} \to \operatorname{cl}_f U$ могут не иметь рекуррентных сечений).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12–01–00195).

Если $F : \mathbb{R} \to \mathrm{cl}^{(n)} U$ — рекуррентное (почти рекуррентное) многозначное отображение, образы $F(t)$ которого при всех $t \in \mathbb{R}$ состоят из n точек, $n \in \mathbb{N}$, то все непрерывные сечения $\mathbb{R} \ni t \mapsto f_j(t) \in F(t)$, $j = 1, \ldots, n$, (для которых $F(t) = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \{f_j(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$) также рекуррентны (почти рекуррентны).

В § 1 приведены определения и некоторые утверждения о (почти) рекуррентных функциях. Обозначения (в основном) согласованы с [4]. Используемые утверждения о (почти) рекуррентных движениях и функциях можно найти в [5,6], а о многозначных отображениях и их сечениях — в [7]. В § 2 сформулированы основные результаты. В § 3 приведены доказательства теорем 1 и 4. В § 4 доказываются теоремы 7, 8 и 9.

§ 1. Определения, обозначения и некоторые утверждения

Пусть $B_U(x, r) = \{y \in U : \rho(x, y) < r\}$ — открытый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in U$. Для (непустого) множества $X \subseteq U$ обозначим $X^{\varepsilon} = \bigcup\limits_{x \in X} B_U(x, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Множество $X \subseteq U$ *предкомпактно*, если $\overline{X}$ — компактное множество (где $\overline{X}$ — замыкание множества X).

Множество $T \subseteq \mathbb{R}$ называется *относительно плотным*, если существует число $a > 0$ такое, что $T \cap [t, t + a] \neq \varnothing$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Напомним некоторые определения и утверждения из теории динамических систем. Пусть (Σ, ρ_Σ) — полное метрическое пространство. Топологической динамической системой (*потоком*) называется однопараметрическая группа g^t, $t \in \mathbb{R}$, преобразований метрического пространства Σ на себя, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) $g^0 x = x$ для всех $x \in \Sigma$,

(2) функция $\mathbb{R} \times \Sigma \ni (t, x) \mapsto g^t x \in \Sigma$ непрерывна по совокупности переменных,

(3) $g^{t_1} g^{t_2} = g^{t_1 + t_2}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Функция $t \mapsto g^t x$ (при фиксированном $x \in \Sigma$) называется *движением*, $\mathrm{orb}\, x = \{g^t x : t \in \mathbb{R}\}$ — *траектория* движения. Множество $X \subseteq \Sigma$ *инвариантно*, если $\mathrm{orb}\, x \subseteq X$ для всех $x \in X$. Множество $X \subseteq \Sigma$ называется *минимальным*, если оно непустое, замкнутое, инвариантное и не имеет собственного подмножества, обладающего этими же свойствами.

Движение $t \mapsto g^t x$ *рекуррентно*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $a = a(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $t, t_1 \in \mathbb{R}$

$$g^t x \in \{g^\tau x : t_1 \leqslant \tau \leqslant t_1 + a\}^{\varepsilon}.$$

Движение $t \mapsto g^t x$ *почти рекуррентно*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество чисел $t \in \mathbb{R}$, для которых $\rho_\Sigma(x, g^t x) < \varepsilon$, относительно плотно. Движение $t \mapsto g^t x$ рекуррентно тогда и только тогда, когда оно почти рекуррентно и $\overline{\mathrm{orb}\, x}$ — компактное множество.

Если $t \mapsto g^t x$ — почти рекуррентное движение, то $\overline{\mathrm{orb}\, x}$ — минимальное множество и для любого $y \in \overline{\mathrm{orb}\, x}$ движение $t \mapsto g^t y$ также почти рекуррентно и при этом $\overline{\mathrm{orb}\, y} = \overline{\mathrm{orb}\, x}$ (однако не всегда для минимальных множеств $X \subseteq \Sigma$ при $x \in X$ движения $t \mapsto g^t x$ почти рекуррентны).

Если $t \mapsto g^t x$ — рекуррентное движение, то $\overline{\mathrm{orb}\, x}$ — минимальное компактное множество. Наоборот, если $X \subseteq \Sigma$ — минимальное компактное множество и $x \in X$, то $t \mapsto g^t x$ — рекуррентное движение [5, 8].

В дальнейшем будут также рассматриваться топологические динамические системы, являющиеся каскадами. *Каскадом* называется группа g^n, $n \in \mathbb{Z}$, преобразований метрического пространства Σ на себя. При этом требуется, чтобы преобразование $g = g^1 : \Sigma \to \Sigma$ было гомеоморфизмом; g^n, $n \in \mathbb{Z}$, — его итерации ($g^{-n} = (g^{-1})^n$ при $n \in \mathbb{N}$, $g^0 x = x$ для всех $x \in \Sigma$). Для точки $x \in \Sigma$ движение определяется как двусторонняя последовательность $\mathbb{Z} \ni n \mapsto g^n x \in \Sigma$. Как и для потоков, для каскадов определяются минимальные множества, рекуррентные и почти рекуррентные движения (двусторонние последовательности). В частности, движение $n \mapsto g^n x$

называется почти рекуррентным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество чисел $J(\varepsilon) \subseteq \mathbb{Z}$ ($\subset \mathbb{R}$) такое, что $\rho_\Sigma(x, g^n x) < \varepsilon$ для всех $n \in J(\varepsilon)$. Для каскадов также справедливы утверждения о минимальных множествах, рекуррентных и почти рекуррентных движениях, приведенные выше в случае потоков.

На пространствах $C([a,b],U)$, $a < b$, непрерывных функций $f : [a,b] \to U$ определяются метрики

$$D^{(\rho)}_{[a,b]}(f_1, f_2) = \max_{t \in [a,b]} \rho(f_1(t), f_2(t)),$$

которые становятся полуметриками, если их рассматривать для непрерывных функций $f_1, f_2 \in C(\mathbb{R}, U)$. На $C(\mathbb{R}, U)$ введем метрику

$$d_C(f_1, f_2) = d^{(\rho)}_C(f_1, f_2) = \sum_{l=1}^{+\infty} 2^{-l} \frac{D^{(\rho)}_{[-l,l]}(f_1, f_2)}{1 + D^{(\rho)}_{[-l,l]}(f_1, f_2)}\,.$$

Сходимость функций в $(C(\mathbb{R}, U), d_C)$ — это равномерная сходимость на каждом отрезке $[a,b]$, $a < b$. Метрическое пространство $(C(\mathbb{R}, U), d_C)$ является полным.

На пространстве $(C(\mathbb{R}, U), d_C)$ определим динамическую систему сдвигов: $g^t f(.) = f(.+t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$ — множество функций $f \in C(\mathbb{R}, U)$, для которых $\mathrm{orb}\, f = \{f(.+t) : t \in \mathbb{R}\}$ — предкомпактное множество в $(C(\mathbb{R}, U), d_C)$. Функция $f \in C(\mathbb{R}, U)$ принадлежит $C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$ тогда и только тогда, когда $\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$ — предкомпактное множество в U и функция $f(.)$ равномерно непрерывна (на $\mathbb{R}$).

Функция $f \in C(\mathbb{R}, U)$ называется *рекуррентной*, если $t \mapsto g^t f(.) = f(.+t)$ — рекуррентное движение в $(C(\mathbb{R}, U), d_C)$. Функция $f \in C(\mathbb{R}, U)$ называется *почти рекуррентной*, если $t \mapsto g^t f(.) = f(.+t)$ — почти рекуррентное движение в $(C(\mathbb{R}, U), d_C)$. Функция $f \in C(\mathbb{R}, U)$ рекуррентна в том и только в том случае, если она почти рекуррентна и принадлежит множеству $C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$.

Пусть $f \in C(\mathbb{R}, U)$. Тогда для любого $\varepsilon' > 0$ найдутся числа $l, \varepsilon > 0$ такие, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$, для которых выполняется неравенство

$$D^{(\rho)}_{[-l,l]}(f(.), f(.+\tau)) < \varepsilon\,, \tag{1.1}$$

также справедливо неравенство

$$d_C(f(.), f(.+\tau)) < \varepsilon'. \tag{1.2}$$

И наоборот, для любых $l, \varepsilon > 0$ найдется число $\varepsilon' > 0$ такое, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$, для которых выполняется неравенство (1.2), также справедливо неравенство (1.1). Поэтому функция $f \in C(\mathbb{R}, U)$ почти рекуррентна тогда и только тогда, когда для любых $l, \varepsilon > 0$ множество чисел $\tau \in \mathbb{R}$, для которых выполняется неравенство (1.1), относительно плотно.

Лемма 1. *Пусть $f \in C(\mathbb{R}, U)$ — почти рекуррентная функция, $\Delta > 0$. Тогда для любых $l, \varepsilon > 0$ множество чисел $n \in \mathbb{Z}$, для которых*

$$D^{(\rho)}_{[-l,l]}(f(.), f(.+n\Delta)) < \varepsilon\,, \tag{1.3}$$

относительно плотно.

Следствие 1. *Пусть $f \in C(\mathbb{R}, U)$ — почти рекуррентная функция, $\Delta > 0$. Тогда для любого $\varepsilon' > 0$ множество чисел $n \in \mathbb{Z}$, для которых $d_C(f(.), f(.+n\Delta)) < \varepsilon'$, относительно плотно.*

Доказательство леммы 1. Для чисел $l, \varepsilon > 0$ выберем число $\delta > 0$ так, что

$$\max_{\xi \in [-\delta, \delta]} \ \max_{t \in [-l, l]} \ \rho(f(t), f(t+\xi)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

и положим $l_1 \doteq l + \delta$. Из теоремы 2 в [4] следует, что множество чисел

$$\tau \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n\Delta - \delta, n\Delta + \delta],$$

для которых выполняется оценка

$$D^{(\rho)}_{[-l_1, l_1]}(f(.), f(. + \tau)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

относительно плотно. Обозначим множество таких чисел τ через $T(\Delta, f; l, \varepsilon)$. Для всех $\tau \in T(\Delta, f; l, \varepsilon)$, всех $\xi \in [-\delta, \delta]$ и всех $t \in [-l, l]$

$$\rho(f(t), f(t + \xi + \tau)) \leqslant \rho(f(t), f(t + \xi)) + \rho(f(t + \xi), f(t + \xi + \tau)) \leqslant$$

$$\max_{\xi \in [-\delta, \delta]} \max_{t \in [-l, l]} \rho(f(t), f(t + \xi)) + \max_{t \in [-l_1, l_1]} \rho(f(t), f(t + \tau)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поэтому для любых $\tau \in T(\Delta, f; l, \varepsilon)$ и $\xi \in [-\delta, \delta]$

$$D^{(\rho)}_{[-l,l]}(f(.), f(. + \xi + \tau)) < \varepsilon.$$

Выбирая для каждого числа $\tau \in T(\Delta, f; l, \varepsilon)$ число $\xi = \xi(\tau) \in [-\delta, \delta]$ так, что $\tau + \xi \in \{n\Delta : n \in \mathbb{Z}\}$, получаем, что множество чисел $n \in \mathbb{Z}$, для которых выполняется оценка (1.3), относительно плотно. $\square$

Функция $f \in C(\mathbb{R}, U)$ называется *почти периодической по Бору*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество чисел $\tau \in \mathbb{R}$, для которых

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \rho(f(t), f(t + \tau)) < \varepsilon,$$

относительно плотно.

Функция $f : [a, b] \to U$, $a < b$, *абсолютно непрерывна*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого конечного множества попарно непересекающихся интервалов $(\alpha_j, \beta_j) \subset [a, b]$, где $\alpha_j < \beta_j$, $j = 1, \dots, N$, для которых $\sum\limits_j (\beta_j - \alpha_j) < \delta$, справедлива оценка $\sum\limits_j \rho(f(\beta_j), f(\alpha_j)) < \varepsilon$. Пусть $AC([a, b], U)$ — множество абсолютно непрерывных функций $f : [a, b] \to U$. Для функции $f \in AC([a, b], U)$ обозначим через $\varepsilon^{(\rho)}(f; \delta)$, где $\delta > 0$, точную верхнюю грань чисел $\sum\limits_j \rho(f(\beta_j), f(\alpha_j))$ по всем конечным множествам попарно непересекающихся интервалов $(\alpha_j, \beta_j) \subset [a, b]$, $\alpha_j < \beta_j$, $j = 1, \dots, N$, для которых $\sum\limits_j (\beta_j - \alpha_j) \leqslant \delta$. Пусть $AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, U)$ — множество функций $f : \mathbb{R} \to U$, для которых $f(.|_{[-l, l]}) \in AC([-l, l], U)$ при всех $l > 0$ (где $f(.|_T)$ — ограничение функции $f : \mathbb{R} \to U$ на непустое множество $T \subseteq \mathbb{R}$), $AC_u(\mathbb{R}, U)$ — множество *равномерно абсолютно непрерывных* функций $f : \mathbb{R} \to U$, для которых при некоторых (и, следовательно, при всех) $L > 0$ и $\delta > 0$

$$E^{(\rho)}_L(f; \delta) \doteq \sup_{a \in \mathbb{R}} \varepsilon^{(\rho)}(f(.|_{[a, a+L]}); \delta) < +\infty$$

и $E^{(\rho)}_L(f; \delta) \to 0$ при $\delta \to +0$ (для каждого $L > 0$).

Если $f \in AC_u(\mathbb{R}, U)$, $\widetilde{f} \in C(\mathbb{R}, U)$ и $d_C(\widetilde{f}(.), f(. + \tau_j)) \to 0$ при $j \to +\infty$ для некоторой последовательности чисел $\tau_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, то $\widetilde{f} \in AC_u(\mathbb{R}, U)$ и $E^{(\rho)}_L(\widetilde{f}; \delta) \leqslant E^{(\rho)}_L(f; \delta)$ для всех $L > 0$ и $\delta > 0$. В частности, если $f \in AC_u(\mathbb{R}, U)$, то для любого $\tau \in \mathbb{R}$ также $f(. + \tau) \in AC_u(\mathbb{R}, U)$ и $E^{(\rho)}_L(f(. + \tau); \delta) \leqslant E^{(\rho)}_L(f; \delta)$, $L > 0$, $\delta > 0$.

Частным случаем абсолютно непрерывных функций являются липшицевы функции. Функция $f : T \to U$, где $\varnothing \neq T \subseteq \mathbb{R}$, называется *липшицевой*, если для некоторой константы $C \geqslant 0$

(константы Липшица) при всех $t_1, t_2 \in T$ выполняется оценка $\rho(f(t_1), f(t_2)) \leqslant C\,|t_1 - t_2|$. Если $f : \mathbb{R} \to U$ — липшицева функция, то $f \in AC_u(\mathbb{R}, U)$ и $E_L^{(\rho)}(f; \delta) \leqslant C\delta$ (для всех $L > 0$ и $\delta > 0$).

Функция $f : \mathbb{R} \to U$ называется *локально липшицевой*, если для любого $l > 0$ найдется константа $C(l) \geqslant 0$ такая, что $\rho(f(t_1), f(t_2)) \leqslant C(l)\,|t_1 - t_2|$ при всех $t_1, t_2 \in [-l, l]$. Локально липшицевы функции $f : \mathbb{R} \to U$ принадлежат $AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}, U)$, при этом $\varepsilon^{(\rho)}(f(.|_{[-l,l]}); \delta) \leqslant C(l)\,\delta$ для всех $l > 0$ и $\delta > 0$.

Множество $\mathfrak{F} \subseteq (C(\mathbb{R}, U), d_C)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда для всех $l > 0$ множества $\{f(.|_{[-l,l]}) : f \in \mathfrak{F}\}$ предкомпактны в $(C([-l, l], U), D^{(\rho)}_{[-l,l]})$, то есть когда для всех $t \in \mathbb{R}$ множества $\{f(t) : f \in \mathfrak{F}\}$ предкомпактны в U и для каждого $l > 0$ ограничения $f(.|_{[-l,l]})$ функций $f \in \mathfrak{F}$ на отрезок $[-l, l]$ равностепенно равномерно непрерывны. Следовательно, множество $\{f(.+t) : f \in \mathfrak{F},\, t \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в $(C(\mathbb{R}, U), d_C)$ тогда и только тогда, когда множество $\{f(t) : f \in \mathfrak{F},\, t \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в U и функции $f \in \mathfrak{F}$ равностепенно равномерно непрерывны (на $\mathbb{R}$).

В статье рассматриваются многозначные отображения $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) \subseteq U$ с непустыми замкнутыми ограниченными образами. Они отождествляются с функциями со значениями в метрическом пространстве $(\mathrm{cl}_b\, U, \mathrm{dist})$, на котором определяется динамическая система сдвигов: $G^t F(.) = F(.+t)$, $t \in \mathbb{R}$, поэтому для них используются определения (непрерывные, равномерно абсолютно непрерывные, (локально) липшицевы, рекуррентные, почти рекуррентные многозначные отображения) и обозначения, введенные для таких функций. Будут рассматриваться важные частные случаи многозначных отображений $t \mapsto F(t) \in \mathrm{cl}_b\, U$, образы которых принадлежат замкнутым подпространствам $(\mathrm{comp}\, U, \mathrm{dist}) \subseteq (\mathrm{cl}_b\, U, \mathrm{dist})$ и $(\mathrm{cl}^{(n)} U, \mathrm{dist}) \subseteq (\mathrm{comp}\, U, \mathrm{dist})$, $n \in \mathbb{N}$.

Справедлива простая

Лемма 2. *Пусть $F(.) \in C(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b\, U)$. Предположим, что при некотором $t_0 \in \mathbb{R}$ существуют число $\varepsilon > 0$ и множества $F_j \in \mathrm{cl}_b\, U$, $j = 1, \ldots, N$, где $N \in \mathbb{N}$, такие, что множества $F_j^{2\varepsilon}$, $j = 1, \ldots, N$, попарно не пересекаются и $F(t_0) = \bigcup\limits_j F_j$. Тогда найдутся число $\delta > 0$ и многозначные отображения $F_j(.) \in C(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b\, U)$, $j = 1, \ldots, N$, для которых $F(t_0) = F_j$, такие, что для всех $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$*

(1) *$F_j(t) \subseteq F_j^{\varepsilon}$, $j = 1, \ldots, N$,*

(2) *$F(t) = \bigcup\limits_j F_j(t)$.*

Более того, для всех $j = 1, \ldots, N$ и t_1, $t_2 \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

(3) $\mathrm{dist}\,(F_j(t_1), F_j(t_2)) \leqslant \mathrm{dist}\,(F(t_1), F(t_2))$.

Лемма 3. *Пусть $F(.) \in C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\, U)$. Тогда $\bigcup\limits_{t \in \mathbb{R}} F(t)$ — предкомпактное множество в (U, ρ).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $F(.) \in C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\, U)$, то множество $\{F(t) : t \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в метрическом пространстве $(\mathrm{comp}\, U, \mathrm{dist})$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множества $F_j \in \mathrm{comp}\, U$, $j = 1, \ldots, N$ (где $N \in \mathbb{N}$), образующие $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть для $\{F(t) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathrm{comp}\, U$. С другой стороны, для каждого $j = 1, \ldots, N$ найдутся точки $x_k^{(j)} \in U$, $k = 1, \ldots, k_j$ (где $k_j \in \mathbb{N}$), образующие $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть для множества F_j. Тогда точки $x_k^{(j)}$, $j = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, k_j$, образуют ε-сеть для множества $\bigcup\limits_{t \in \mathbb{R}} F(t)$. Поэтому множество $\bigcup\limits_{t \in \mathbb{R}} F(t)$ предкомпактно в (U, ρ). $\square$

Функция $f : T \to U$, где $\varnothing \neq T \subseteq \mathbb{R}$, называется *сечением* многозначного отображения $F : T \to \mathrm{cl}_b\, U$, если $f(t) \in F(t)$ при всех $t \in T$.

Следующая лемма может быть отнесена к математическому фольклору. Метод ее доказательства стандартен и его разные варианты встречаются при доказательстве разных утверждений (см., например, [9, 10]).

Лемма 4. *Пусть $F : \mathbb{R} \to \mathrm{cl}_b U$ — многозначное рекуррентное отображение, имеющее сечение $f^0 \in C^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$. Тогда оно также имеет рекуррентное сечение. Более того, если существует сечение $f^0 \in AC_u(\mathbb{R}, U) \cap C^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$, то также существует рекуррентное сечение $f \in AC_u(\mathbb{R}, U)$, для которого $E_L^{(\rho)}(f; \delta) \leqslant E_L^{(\rho)}(f^0; \delta)$ при всех $L > 0$ и $\delta > 0$.*

Доказательство. На декартовом произведении $\mathfrak{X}(U) \doteq C(\mathbb{R}, U) \times C(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U)$ введем метрику

$$D_{\mathfrak{X}(U)}\big((f_1, F_1), (f_2, F_2)\big) \doteq d_C^{(\rho)}(f_1, f_2) + d_C^{(\mathrm{dist})}(F_1, F_2),$$

где $(f_j, F_j) \in \mathfrak{X}(U)$, $j = 1, 2$. Метрическое пространство $(\mathfrak{X}(U), D_{\mathfrak{X}(U)})$ полное. На пространстве $\mathfrak{X}(U)$ определим динамическую систему сдвигов: $\widetilde{g}^t(\widetilde{f}, \widetilde{F}) = (g^t \widetilde{f}, G^t \widetilde{F}) = (\widetilde{f}(.+t), \widetilde{F}(.+t))$, $t \in \mathbb{R}$ (где $\widetilde{f} \in C(\mathbb{R}, U)$, $\widetilde{F} \in C(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U)$). Так как

$$\overline{\mathrm{orb}\,(f^0, F)} \doteq \overline{\{(f^0(.+t), F(.+t)) : t \in \mathbb{R}\}} \subseteq$$

$$\overline{\{f^0(.+t) : t \in \mathbb{R}\}} \times \overline{\{F(.+t) : t \in \mathbb{R}\}} \doteq \overline{\mathrm{orb}\, f^0} \times \overline{\mathrm{orb}\, F} \subseteq \mathfrak{X}(U)$$

(черта означает замыкание в пространствах $\mathfrak{X}(U)$, $C(\mathbb{R}, U)$ и $C(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U)$), где $\overline{\mathrm{orb}\, f^0}$ и $\overline{\mathrm{orb}\, F}$ — компактные множества (в $C(\mathbb{R}, U)$ и $C(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U)$ соответственно), то $\overline{\mathrm{orb}\,(f^0, F)}$ — компактное инвариантное множество пространства $(\mathfrak{X}(U), D_{\mathfrak{X}(U)})$. Поэтому оно содержит некоторое минимальное множество $\overline{\mathrm{orb}\,(f', F')}$, где $f' \in \overline{\mathrm{orb}\, f^0}$ и $F' \in \overline{\mathrm{orb}\, F}$. При этом найдется последовательность чисел $\tau_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, такая, что

$$D_{\mathfrak{X}(U)}\big((f'(.), F'(.)), (f^0(.+\tau_j), F(.+\tau_j))\big) \to 0$$

при $j \to +\infty$. Откуда

$$d_C^{(\rho)}(f'(.), f^0(.+\tau_j)) \to 0 \tag{1.4}$$

и $d_C^{(\mathrm{dist})}(F'(.), F(.+\tau_j)) \to 0$ при $j \to +\infty$. Следовательно, $f'(t) \in F'(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Если $f^0 \in AC_u(\mathbb{R}, U) \cap C^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$, то из (1.4) также следует, что $f' \in AC_u(\mathbb{R}, U)$ и $E_L^{(\rho)}(f'; \delta) \leqslant E_L^{(\rho)}(f^0; \delta)$ при всех $L > 0$ и $\delta > 0$. С другой стороны, из минимальности множества $\overline{\mathrm{orb}\,(f', F')}$ вытекает, что множество $\overline{\mathrm{orb}\, f'}$ минимально (в $C(\mathbb{R}, U)$), поэтому (в силу теоремы Биркгофа [8]) $f'(.)$ — рекуррентная функция. Множество $\overline{\mathrm{orb}\, F'}$ также минимально (в $C(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U)$) и $\overline{\mathrm{orb}\, F'} \subseteq \overline{\mathrm{orb}\, F}$. Так как $F(.)$ — многозначное рекуррентное отображение, то (в силу теоремы Биркгофа [8]) минимальным является и множество $\overline{\mathrm{orb}\, F}$. Следовательно, $\overline{\mathrm{orb}\, F'} = \overline{\mathrm{orb}\, F}$. Из последнего равенства получаем, что найдется последовательность чисел $\tau'_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, такая, что

$$d_C^{(\mathrm{dist})}(F(.), F'(.+\tau'_j)) \to 0$$

при $j \to +\infty$. Так как множество $\overline{\mathrm{orb}\, f'}$ компактно (в $C(\mathbb{R}, U)$), то найдутся подпоследовательность $\tau'_{j_k} \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, и функция $f \in \overline{\mathrm{orb}\, f'} \subseteq C(\mathbb{R}, U)$, для которых

$$d_C^{(\rho)}(f(.), f'(.+\tau'_{j_k})) \to 0 \tag{1.5}$$

при $k \to +\infty$. Из минимальности множества $\overline{\mathrm{orb}\, f'}$ вытекает, что f — рекуррентная функция. Так как

$$d_C^{(\mathrm{dist})}(F(.), F'(.+\tau'_{j_k})) \to 0$$

при $k \to +\infty$ и $f'(t) \in F'(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$, то $f(t) \in F(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Если $f^0 \in AC_u(\mathbb{R}, U) \cap C^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$, то $f' \in AC_u(\mathbb{R}, U)$ и из (1.5) следует, что также $f \in AC_u(\mathbb{R}, U)$ и $E_L^{(\rho)}(f; \delta) \leqslant E_L^{(\rho)}(f'; \delta) \leqslant E_L^{(\rho)}(f^0; \delta)$ при всех $L > 0$ и $\delta > 0$. $\square$

Приводимый ниже пример показывает, что если образы многозначного рекуррентного липшицева отображения не являются компактными множествами, то у него может не быть почти рекуррентных сечений при том, что липшицевы сечения могут существовать.

Пример 1. Пусть $\mathcal{H}\,(=U)$ — гильбертово пространство с ортогональным базисом $\{e_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. При $0\leqslant t<1$ положим

$$F(t)=\bigl\{\bigl(\cos\frac{\pi t}{2}\bigr)e_j+\bigl(\sin\frac{\pi t}{2}\bigr)e_{j+1}: j\in\mathbb{Z}\bigr\}$$

и продолжим многозначное отображение $F(.)$ периодически с периодом 1 на всю вещественную прямую $\mathbb{R}$. Тогда $t\mapsto F(t)\in \operatorname{cl}_b\mathcal{H}$ — липшицево и (в силу периодичности) рекуррентное отображение. При каждом $t\in\mathbb{R}$ множество $F(t)\notin \operatorname{comp}\mathcal{H}$ состоит из счетного числа единичных векторов, и имеется счетное множество непрерывных сечений $f_j(.)$ многозначного отображения $F(.)$, для которых $f_j(0)=e_j$, $j\in\mathbb{Z}$. При этом $t\mapsto f_j(t)$, $j\in\mathbb{Z}$, — липшицевы функции (на $\mathbb{R}$), слабо сходящиеся к 0 при $t\to\pm\infty$, следовательно, они не являются почти рекуррентными.

§ 2. Основные результаты

Для многозначного отображения $F(.)\in C(\mathbb{R},\operatorname{comp}U)$ через $\mathfrak{F}(F(.))$ будем обозначать множество его непрерывных сечений.

Если $F(.)\in AC_{\rm loc}(\mathbb{R},\operatorname{comp}U)$, то пусть $\mathfrak{F}^{AC}_{\rm loc}(F(.))$ — множество сечений $f(.)\in AC_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$ многозначного отображения $F(.)$ таких, что для любого отрезка $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $a<b$, и любого числа $\delta>0$

$$\varepsilon^{(\rho)}(f(.|_{[a,b]});\delta)\leqslant \varepsilon^{(\rm dist)}(F(.|_{[a,b]});\delta).$$

Множество $\mathfrak{F}^{AC}_{\rm loc}(F(.))$ замкнуто в $(C(\mathbb{R},U),d^{(\rho)}_C)$. Для многозначного отображения $F(.)\in AC_u(\mathbb{R},\operatorname{comp}U)$ обозначим через $\mathfrak{F}^{AC}_u(F(.))$ множество его сечений $f(.)\in AC_u(\mathbb{R},U)$, для которых $E^{(\rho)}_L(f;\delta)\leqslant E^{(\rm dist)}_L(F;\delta)$ при всех $L>0$ и $\delta>0$. Множество $\mathfrak{F}^{AC}_u(F(.))$ также замкнуто в $(C(\mathbb{R},U),d^{(\rho)}_C)$. Если $F(.)\in AC_u(\mathbb{R},\operatorname{comp}U)$, то $\mathfrak{F}^{AC}_{\rm loc}(F(.))\subseteq\mathfrak{F}^{AC}_u(F(.))$.

Теорема 1. *Пусть $F(.)\in AC_{\rm loc}(\mathbb{R},\operatorname{comp}U)$. Тогда для любых $\xi\in\mathbb{R}$ и $x\in F(\xi)$ существует функция $f\in\mathfrak{F}^{AC}_{\rm loc}(F(.))$ такая, что $f(\xi)=x$.*

Теорема 1 доказывается в § 3. Она является усиленным вариантом теоремы 2 из [2] и ее доказательство в основном следует доказательству, предложенному в [2].

Следствие 2. *Пусть $F(.)\in AC_u(\mathbb{R},\operatorname{comp}U)$. Тогда для любых $\xi\in\mathbb{R}$ и $x\in F(\xi)$ существует функция $f\in\mathfrak{F}^{AC}_u(F(.))$ такая, что $f(\xi)=x$.*

Теорема 2. *Всякое многозначное рекуррентное отображение $F(.)\in AC_u(\mathbb{R},\operatorname{comp}U)$ имеет рекуррентное сечение из $\mathfrak{F}^{AC}_u(F(.))\subseteq AC_u(\mathbb{R},U)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия 2 многозначное рекуррентное отображение $F(.)$ имеет сечение $f^0\in AC_u(\mathbb{R},U)$, для которого $E^{(\rho)}_L(f^0;\delta)\leqslant E^{(\rm dist)}_L(F;\delta)$ при всех $L>0$ и $\delta>0$. Из леммы 3 получаем, что $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}}F(t)$ — предкомпактное множество в (U,ρ). Так как $\{f^0(t):t\in\mathbb{R}\}\subseteq\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}}F(t)$, то множество $\{f^0(t):t\in\mathbb{R}\}$ также предкомпактно. С другой стороны, функция $f^0\in AC_u(\mathbb{R},U)$ равномерно непрерывна (на $\mathbb{R}$). Поэтому $f^0\in C^{\,\rm comp}(\mathbb{R},U)$. Теперь из леммы 4 следует существование рекуррентного сечения $f\in AC_u(\mathbb{R},U)$ такого, что $E^{(\rho)}_L(f;\delta)\leqslant E^{(\rho)}_L(f^0;\delta)\leqslant E^{(\rm dist)}_L(F;\delta)$ при всех $L>0$ и $\delta>0$. Последнее означает, что $f\in\mathfrak{F}^{AC}_u(F(.))$. $\square$

Из теоремы 2, в частности, следует, что если многозначное рекуррентное отображение $F:\mathbb{R}\to\operatorname{comp}U$ является липшицевым, то у него имеется липшицево (с той же константой Липшица) рекуррентное сечение.

Теорема 3. *Всякое многозначное почти рекуррентное отображение* $F(.) \in AC_u(\mathbb{R}, \operatorname{comp} U)$ *имеет почти рекуррентное сечение из* $\mathfrak{F}_u^{AC}(F(.)) \subseteq AC_u(\mathbb{R}, U)$.

Доказательство теоремы 3 опирается на приводимые ниже лемму 5 и теоремы 4 и 5. Теорема 4 доказывается в § 3. Из теоремы 3 следует, что многозначное почти рекуррентное липшицево отображение $F : \mathbb{R} \to \operatorname{comp} U$ имеет липшицево (с той же константой Липшица) почти рекуррентное сечение.

Лемма 5. *Пусть* $F(.) \in AC_u(\mathbb{R}, \operatorname{comp} U)$. *Тогда* $\mathfrak{F}_u^{AC}(F(.))$ — *непустое компактное множество в* $(C(\mathbb{R}, U), d_C^{(\rho)})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $\mathfrak{F}_u^{AC}(F(.))$ непусто в силу следствия 2 и замкнуто. Так как $F(.) \in C(\mathbb{R}, \operatorname{comp} U)$, то для любого $l > 0$ множество $\bigcup\limits_{t \in [-l, l]} F(t)$ предкомпактно в (U, ρ) (см. доказательство леммы 3). С другой стороны, функции $f(.) \in \mathfrak{F}_u^{AC}(F(.))$ равностепенно равномерно непрерывны (на $\mathbb{R}$). Поэтому множества $\bigl\{ f(.|_{[-l, l]}) : f \in \mathfrak{F}_u^{AC}(F(.)) \bigr\} \subseteq (C([-l, l], U), D_{[-l, l]}^{(\rho)})$ предкомпактны для всех $l > 0$ и, следовательно, $\mathfrak{F}_u^{AC}(F(.))$ — предкомпактное множество в $(C(\mathbb{R}, U), d_C^{(\rho)})$, а так как оно замкнуто, то является компактным. $\square$

Теорема 4. *Пусть* $F(.) \in AC_u(\mathbb{R}, \operatorname{comp} U)$. *Тогда для любого* $\varepsilon' > 0$ *существуют числа* $l, \varepsilon > 0$ *такие, что для любой функции* $f \in AC_u(\mathbb{R}, U)$, *для которой* $E_L^{(\rho)}(f; \delta) \leqslant E_L^{(\mathrm{dist})}(F; \delta)$ *при всех* $L > 0$ *и* $\delta > 0$, *при выполнении неравенства*

$$\max_{t \in [-l, l]} \rho(f(t), F(t)) < \varepsilon$$

найдется функция $\widetilde{f} \in \mathfrak{F}_u^{AC}(F(.))$ *такая, что* $d_C^{(\rho)}(f, \widetilde{f}) < \varepsilon'$.

Теорема 5. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *непустое компактное множество в пространстве* $(C(\mathbb{R}, U), d_C^{(\rho)})$, $\Delta > 0$. *Предположим, что для любого* $\varepsilon' > 0$ *существует относительно плотное множество* $J(\varepsilon') \subseteq \mathbb{Z}$ $(\subset \mathbb{R})$ *такое, что для всех* $f \in \mathfrak{F}$ *и всех* $n \in J(\varepsilon')$

$$d_C^{(\rho)}(f(. + n\Delta), \mathfrak{F}) < \varepsilon'.$$

Тогда множество $\mathfrak{F}$ *содержит хотя бы одну почти рекуррентную функцию* $f(.)$ (*более того, существует функция* $f \in \mathfrak{F}$, *для которой двусторонняя последовательность* $\mathbb{Z} \ni n \mapsto f(. + n\Delta) \in (C(\mathbb{R}, U), d_C^{(\rho)})$ *почти рекуррентна*).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. В силу леммы 5 $\mathfrak{F}_u^{AC}(F(.))$ — непустое компактное множество (в пространстве $(C(\mathbb{R}, U), d_C^{(\rho)})$). Фиксируем число $\Delta > 0$. Пусть $l, \varepsilon > 0$ — числа, выбираемые в соответствии с теоремой 4 для числа $\varepsilon' > 0$. Обозначим через $J(l, \varepsilon)$ множество чисел $n \in \mathbb{N}$, для которых

$$D_{[-l, l]}^{(\mathrm{dist})}\bigl(F(.), F(. + n\Delta)\bigr) < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Так как многозначное отображение $F : \mathbb{R} \to \operatorname{comp} U$ почти рекуррентно, то из леммы 1 следует, что множество $J(l, \varepsilon) \subseteq \mathbb{Z}$ относительно плотно. При этом для любой функции $f \in \mathfrak{F}_u^{AC}(F(.))$ и любого $n \in J(l, \varepsilon)$ из (2.1) вытекает оценка

$$\max_{t \in [-l, l]} \rho\bigl(f(t + n\Delta), F(t)\bigr) < \varepsilon.$$

Тогда (в силу выбора чисел $l, \varepsilon > 0$) из теоремы 4 получаем, что найдется функция $\widetilde{f} \in \mathfrak{F}_u^{AC}(F(.))$ такая, что

$$d_C^{(\rho)}\bigl(f(. + n\Delta), \widetilde{f}(.)\bigr) < \varepsilon'. \tag{2.2}$$

Откуда $d_C^{(\rho)}\big(f(.+n\Delta),\mathfrak{F}_u^{AC}(F(.))\big)<\varepsilon'$ для всех $f\in\mathfrak{F}_u^{AC}(F(.))$ и $n\in J(l,\varepsilon)$. Теперь существование почти рекуррентного сечения, принадлежащего множеству $\mathfrak{F}_u^{AC}(F(.))$, следует из теоремы 5. □

Теорема 5 является следствием леммы 6.

Лемма 6. *Пусть (Σ,ρ_Σ) — полное метрическое пространство и $g^n:\Sigma\to\Sigma$, $n\in\mathbb{Z}$, — каскад (в пространстве (Σ,ρ_Σ)). Пусть $K\subseteq U$ — непустое компактное множество. Предположим, что для любого $\varepsilon>0$ существует относительно плотное множество $J(\varepsilon)\subseteq\mathbb{Z}$ такое, что для всех $n\in J(\varepsilon)$*

$$\{g^nx:x\in K\}\subseteq K^\varepsilon. \tag{2.3}$$

Тогда для некоторой точки $x\in K$ движение $\mathbb{Z}\ni n\mapsto g^nx\in\Sigma$ почти рекуррентно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{X}$ — совокупность непустых замкнутых инвариантных множеств $X\subseteq\Sigma$, для которых $X\cap K\neq\varnothing$. Если $x\in K$, то $\overline{\operatorname{orb}x}=\overline{\{g^nx:n\in\mathbb{Z}\}}\in\mathfrak{X}$. Множество $\mathfrak{X}$ можно частично упорядочить: X_1 предшествует X_2 тогда и только тогда, когда $X_1\supseteq X_2$. При этом в частично упорядоченном множестве $\mathfrak{X}$ всякая цепь множеств $X_\alpha\in\mathfrak{X}$, $\alpha\in\mathcal{A}$, имеет верхнюю грань. Действительно, $\bigcap\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}X_\alpha$ — замкнутое инвариантное множество. Кроме того, $X_\alpha\cap K$, $\alpha\in\mathcal{A}$, — непустые компактные множества. Следовательно,

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}}X_\alpha\Big)\cap K=\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}}(X_\alpha\cap K)\neq\varnothing$$

и множество $\bigcap\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}X_\alpha\in\mathfrak{X}$ является верхней гранью цепи $X_\alpha\in\mathfrak{X}$, $\alpha\in\mathcal{A}$. В силу леммы Цорна существует максимальный элемент частично упорядоченного множества $\mathfrak{X}$, то есть такое множество $\widetilde{X}\in\mathfrak{X}$, что для любого множества $X\in\mathfrak{X}$, для которого $\widetilde{X}\supseteq X$, имеем $\widetilde{X}=X$. В частности, для любой точки $x\in\widetilde{X}\cap K$ выполняется равенство $\overline{\operatorname{orb}x}=\widetilde{X}$. Пусть $x\in\widetilde{X}\cap K$. Покажем, что движение $\mathbb{Z}\ni n\mapsto g^nx$ является почти рекуррентным. Допустим противное. Тогда найдется число $\varepsilon'>0$ такое, что для любого $l\in\mathbb{N}$ существует число $b(l)\in\mathbb{N}$, для которого $g^mx\notin B_\Sigma(x,\varepsilon')$ при всех $m\in\{b(l)-2l,\dots,b(l)+2l\}$. Из условия (2.3) следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует число $l(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ такое, что для любого $\mathbb{N}\ni l\geqslant l(\varepsilon)$ можно найти число $a\in\{b(l)-l,\dots,b(l)+l\}$, для которого $\rho_\Sigma(g^ax,K)<\varepsilon$, и при этом также $g^{a+n}x\notin B_\Sigma(x,\varepsilon')$ при всех $n\in\{-l,\dots,l\}$. Поэтому найдутся точка $y\in K$, строго возрастающая последовательность чисел $l_\nu\in\mathbb{N}$, $\nu\in\mathbb{N}$, и последовательность чисел $a_\nu\in\mathbb{Z}$, $\nu\in\mathbb{N}$, такие, что

(a) $\rho_\Sigma(g^{a_\nu}x,y)\to 0$ при $\nu\to+\infty$,

(b) $g^{a_\nu+n}x\notin B_\Sigma(x,\varepsilon')$ для всех $n\in\{-l_\nu,\dots,l_\nu\}$, $\nu\in\mathbb{N}$.

Из условия (a) получаем, что $y\in\overline{\operatorname{orb}x}\cap K=\widetilde{X}\cap K$. Из условий (a) и (b) также следует, что $g^ny\notin B_\Sigma(x,\varepsilon')$ для всех $n\in\mathbb{Z}$. Поэтому

$$\overline{\operatorname{orb}y}\cap B_\Sigma(x,\varepsilon')=\varnothing. \tag{2.4}$$

Но, с другой стороны, так как $y\in\widetilde{X}\cap K$, то $\overline{\operatorname{orb}y}=\widetilde{X}$ и, следовательно, $x\in\widetilde{X}\cap K\subseteq\overline{\operatorname{orb}y}$, что противоречит (2.4). Полученное противоречие доказывает, что движение $\mathbb{Z}\ni n\mapsto g^nx$ почти рекуррентно. (Откуда также следует, что $\widetilde{X}$ — минимальное множество и движение $\mathbb{Z}\ni n\mapsto g^nx$ является почти рекуррентным для всех $x\in\widetilde{X}$.) □

Построим пример многозначного рекуррентного (и, более того, почти периодического по Бору) локально липшицева отображения $t\mapsto F(t)\in\operatorname{comp}U$, не имеющего почти рекуррентных сечений (но в силу теоремы 1 имеющего локально липшицевы сечения).

Пример 2. Выберем в качестве метрического пространства (U,ρ) комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с евклидовым расстоянием между точками: $\rho(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$, $z_1,z_2\in\mathbb{C}$. Определим вначале многозначные отображения $[0,1]\ni t\mapsto G_n(t)\subseteq S_1\doteq\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$, $n\in\mathbb{N}$. Положим

$$G_n(t)=\begin{cases}\Big\{e^{i\varphi}:\varphi\in\bigcup\limits_{j=0}^{n-1}\big[\frac{2\pi}{n}\big(j-\frac{1-3t}{2}\big),\frac{2\pi}{n}\big(j+\frac{1-3t}{2}\big)\big]\Big\}\,, & \text{если } 0\leqslant t<\frac13\,,\\ \big\{e^{i\varphi}:\varphi=2\pi\big(\frac{j}{n}+3t\big),\ j=0,1,\ldots,n-1\big\}\,, & \text{если } \frac13\leqslant t\leqslant\frac23\,,\\ G_n(1-t)\,, & \text{если } \frac23<t\leqslant 1.\end{cases}$$

Пусть также $G_0(t)\equiv S_1$, $t\in[0,1]$. Многозначные отображения G_n непрерывны (липшицевы), $G_n(0)=G_n(1)=S_1$ и

$$D^{(\mathrm{dist})}_{[0,\,1]}(G_n,G_0)=2\sin\frac{\pi}{2n}\to 0 \tag{2.5}$$

при $n\to+\infty$. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ определим на множестве

$$T_n\doteq\bigcup_{k\,\in\,\mathbb{Z}}\big(k+2^{-n},k+2^{-n+1}\big]$$

многозначное отображение $t\mapsto\widetilde F_n(t)\subseteq S_1$. Если $t\in\big(k+2^{-n},k+2^{-n+1}\big]$ и $k\equiv m\ (\operatorname{mod}2^{n+1})$, где m — одно из чисел $2^n,2^n+1,\ldots,2^n+2^{n-1}$, то положим $\widetilde F_n(t)=G_n\big(2^n(t-k)-1\big)$. Если k не сравнимо по $\operatorname{mod}2^{n+1}$ ни с одним из рассматриваемых чисел, то пусть $\widetilde F_n(t)=S_1$ для всех $t\in\big(k+2^{-n},k+2^{-n+1}\big]$. Множества T_n при разных n попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_n T_n=\mathbb{R}$. Определим теперь непрерывное многозначное отображение $\mathbb{R}\ni t\mapsto F(t)\subseteq S_1$, образы которого при $t\in T_n$ совпадают с $\widetilde F_n(t)$, $n\in\mathbb{N}$. Кроме того, рассмотрим многозначные отображения $\mathbb{R}\ni t\mapsto F_n(t)$, $n\in\mathbb{N}$, образы которых совпадают с $\widetilde F_j(t)$, если $t\in T_j$ и $j\in\{1,\ldots,n\}$, и $F_n(t)=S_1$, если $t\in\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{j\,=\,1}^{n}T_j$. Многозначные отображения $\widetilde F_n$ являются липшицевыми (на $\mathbb{R}$) и периодическими с периодами 2^{n+1}. При этом $F(t)=\widetilde F_n(t)$ при всех $t\in\big[-2^{n-1},2^n\big]$, $n\in\mathbb{N}$. Из (2.5) следует, что

$$\sup_{t\,\in\,\mathbb{R}}\operatorname{dist}(F(t),F_n(t))\to 0$$

при $n\to+\infty$, поэтому F — почти периодическое по Бору (и, следовательно, рекуррентное) локально липшицево многозначное отображение. Покажем, что у многозначного отображения F нет почти рекуррентных сечений. Действительно, пусть $f\in\mathfrak{F}(F(.))$. Тогда найдется число $N\in\mathbb{N}$ такое, что при всех $t\in[0,2^{-N+1}]$

$$f(t)\,(f(0))^{-1}\in\big\{e^{i\varphi}:|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\big\}.$$

В силу определения многозначных отображений $\widetilde F_n(.)$ при всех $n\geqslant N$ и $k=2^n,2^n+1,\ldots,2^n+2^{n-1}$ функция $t\mapsto f(t)$ при изменении t от $k+\frac43\,2^{-n}$ до $k+\frac53\,2^{-n}$ делает полный оборот (против часовой стрелки) вокруг начала координат. Поэтому существует число $t\in\big[\frac43\,2^{-n},\frac53\,2^{-n}\big]\subset\big(2^{-n},2^{-n+1}\big]\subset\big[0,2^{-N+1}\big]$, для которого $f(t+k)=-f(t)$ и, следовательно, $D^{(\rho)}_{[0,1]}(f(.),f(.+k))=2$ (для всех $n\geqslant N$ и $k=2^n,2^n+1,\ldots,2^n+2^{n-1}$). Но тогда из леммы 1 следует, что функция f не может быть почти рекуррентной.

Теорема 6. *Пусть $F:\mathbb{R}\to\operatorname{comp}U$ — многозначное почти рекуррентное отображение такое, что $F(t)\in\mathrm{cl}_f\,U$ при всех $t\in\mathbb{R}$. Тогда отображение $F(.)$ имеет почти рекуррентное сечение.*

Доказательство теоремы 6 опирается на теоремы 7, 8 и 9, доказываемые в § 4, а также на теорему 5.

Теорема 7. *Пусть $F \in C(\mathbb{R}, \operatorname{comp} U)$ и $F(t) \in \operatorname{cl}_f U$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда для любых $\xi \in \mathbb{R}$ и $x \in F(\xi)$ существует функция $f \in \mathfrak{F}(F(.))$ такая, что $f(\xi) = x$.*

Теорема 8. *Пусть $F \in C(\mathbb{R}, \operatorname{comp} U)$ и $F(t) \in \operatorname{cl}_f U$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathfrak{F}(F(.))$ — (непустое) компактное множество в $(C(\mathbb{R}, U), d_C^{(\rho)})$.*

Теорема 9. *Пусть $F \in C(\mathbb{R}, \operatorname{comp} U)$ и $F(t) \in \operatorname{cl}_f U$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon' > 0$ существуют числа l, $\varepsilon > 0$ такие, что для любой функции $f \in C(\mathbb{R}, U)$, для которой*

$$\max_{t \in [-l, l]} \rho(f(t), F(t)) < \varepsilon\,,$$

найдется функция $\widetilde{f} \in \mathfrak{F}(F(.))$ такая, что $d_C^{(\rho)}(f, \widetilde{f}) < \varepsilon'$.

Доказательство теоремы 6. Воспользуемся методом доказательства теоремы 3. Из теорем 7 и 8 следует, что $\mathfrak{F}(F(.))$ — непустое компактное множество в $(C(\mathbb{R}, U), d_C^{(\rho)})$. Фиксируем число $\Delta > 0$. Для числа $\varepsilon' > 0$ выберем числа l, $\varepsilon > 0$ в соответствии с теоремой 9. Как и при доказательстве теоремы 3, пусть $J(l, \varepsilon)$ — относительно плотное множество чисел $n \in \mathbb{Z}$ (см. лемму 1), удовлетворяющих условию (2.1). Тогда из условия (2.1) и теоремы 9 получаем, что для любой функции $f \in \mathfrak{F}(F(.))$ и любого $n \in J(l, \varepsilon)$ найдется функция $\widetilde{f} \in \mathfrak{F}(F(.))$ такая, что выполняется оценка (2.2) и, следовательно, $d_C^{(\rho)}\big(f(.+n\Delta), \mathfrak{F}(F(.))\big) < \varepsilon'$. Теперь существование почти рекуррентного сечения многозначного отображения $F(.)$ вытекает из теоремы 5. $\square$

Теорема 10. *Пусть $F \in C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \operatorname{cl}^{(n)} U)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда множество $\{f(.+\tau) : f \in \mathfrak{F}(F(.)),\ \tau \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в $(C(\mathbb{R}, U), d_C^{(\rho)})$.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся числа $\tau_j \in \mathbb{R}$, функции $f_j(.) \in \mathfrak{F}(F(.+\tau_j))$, $j \in \mathbb{N}$, и число $\delta > 0$ такие, что

$$d_C^{(\rho)}(f_{j'}, f_{j''}) \geqslant \delta \tag{2.6}$$

при всех $j', j'' \in \mathbb{N}$, $j' \neq j''$. Так как $F \in C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \operatorname{cl}^{(n)} U)$, то найдется подпоследовательность τ_{j_k}, $k \in \mathbb{N}$, последовательности τ_j и многозначное отображение $\widetilde{F} \in C(\mathbb{R}, \operatorname{comp} U)$ такие, что

$$d_C^{(\mathrm{dist})}\big(\widetilde{F}(.), F(.+\tau_{j_k})\big) \to 0$$

при $k \to +\infty$. Для всех $t \in \mathbb{R}$ справедливо включение $F(t) \in \operatorname{cl}^{(n)} U$, поэтому также $\widetilde{F}(t) \in \operatorname{cl}^{(n)} U$, $t \in \mathbb{R}$. С другой стороны, $f_{j_k}(t) \in F(t+\tau_{j_k})$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$, поэтому для каждого $l > 0$

$$\max_{t \in [-l, l]} \rho(f_{j_k}(t), \widetilde{F}(t)) \to 0$$

при $k \to +\infty$. В силу теоремы 9 существуют функции $\widetilde{f}_k \in \mathfrak{F}(F(.))$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что $d_C^{(\rho)}(\widetilde{f}_k, f_{j_k}) \to 0$ при $k \to +\infty$. Следовательно (см. (2.6)), найдется число $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $k_1 \neq k_2$, для которых $k_j \geqslant k_0$, $j = 1, 2$, выполняются неравенства $d_C^{(\rho)}(\widetilde{f}_{k_1}, \widetilde{f}_{k_2}) \geqslant \frac{\delta}{2}$. Но это невозможно, так как в силу теоремы 8 $\mathfrak{F}(F(.))$ — (непустое) компактное множество в $(C(\mathbb{R}, U), d_C^{(\rho)})$. Полученное противоречие доказывает теорему 10. $\square$

Следствие 3. *Пусть $F \in C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \operatorname{cl}^{(n)} U)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathfrak{F}(F(.)) \subseteq C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$.*

Следствие 3 непосредственно вытекает из теоремы 10, так как для любого сечения $f \in \mathfrak{F}(F(.))$

$$\{f(.+\tau) : \tau \in \mathbb{R}\} \subseteq \{\widetilde{f}(.+\tau) : \widetilde{f} \in \mathfrak{F}(F(.)),\ \tau \in \mathbb{R}\}.$$

Теорема 11. *Всякое многозначное рекуррентное отображение* $t \mapsto F(t) \in \mathrm{cl}^{(n)}\, U \subseteq \mathrm{comp}\, U$, $n \in \mathbb{N}$, *имеет рекуррентное сечение.*

Доказательство. В силу теоремы 6 существует почти рекуррентное сечение $f \in \mathfrak{F}(F(.))$. С другой стороны, так как $F(.)$ — многозначное рекуррентное отображение, то $F \in C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathrm{cl}^{(n)}\, U)$ и из следствия 3 получаем, что $\{f(.+t) : t \in \mathbb{R}\}$ — предкомпактное множество в $(C(\mathbb{R}, U), d_C^{(\rho)})$. Поэтому f — рекуррентное сечение. $\square$

Теорема 11 также является следствием леммы 4 (если воспользоваться теоремой 7 и следствием 3).

В условиях теоремы 11 предположение, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ включение $F(t) \in \mathrm{cl}^{(n)}\, U$ выполняется при всех $t \in \mathbb{R}$, является существенным. Существуют многозначные рекуррентные отображения $t \mapsto F(t) \in \mathrm{comp}\, U$, не имеющие рекуррентных сечений, такие, что для любого $l > 0$ существует число $n(l) \in \mathbb{N}$, для которого $F(t) \in \mathrm{cl}^{(n(l))}\, U$ при всех $t \in [-l, l]$.

Пример 3. Пусть $U = \mathbb{C}$ и $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. При $n \in \mathbb{Z}_+ \doteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ определим многозначные отображения $[0,1] \ni t \mapsto G_n(t) \subseteq B_{\mathbb{C}}(0,1) \doteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$. Пусть

$$G_0(t) = \begin{cases} \{z : |z| = 3t\}\,, & \text{если } 0 \leqslant t < 1/3\,, \\ S_1\,, & \text{если } 1/3 \leqslant t \leqslant 2/3\,, \\ \{z : |z| = 3(1-t)\}\,, & \text{если } 2/3 < t \leqslant 1. \end{cases}$$

При $n \in \mathbb{N}$ положим

$$G_n(t) = \begin{cases} \{z = re^{i\varphi} : r = 3t \text{ и } \varphi = \frac{2\pi j}{n}\,,\ j = 0, \ldots, n-1\}\,, & \text{если } 0 \leqslant t < 1/3\,, \\ \{e^{i\varphi} : \varphi = 2\pi\big(\frac{j}{n} + 3nt\big),\ j = 0, \ldots, n-1\}\,, & \text{если } 1/3 \leqslant t \leqslant 2/3\,, \\ G_n(1-t)\,, & \text{если } 2/3 < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Многозначные отображения G_n липшицевы, $G_n(0) = G_n(1) = \{0\}$, $G_n(t) \in \mathrm{cl}^{(n)}\, U \setminus \mathrm{cl}^{(n-1)}\, U$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $t \in (0,1)$,

$$D_{[0,1]}^{(\mathrm{dist})}(G_n, G_0) = 2 \sin \frac{\pi}{2n} \to 0 \tag{2.7}$$

при $n \to +\infty$. Пусть $\mathcal{M}_n \doteq m_n + 2^n \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, где $m_n \doteq \frac{1}{3}(1 - (-2)^{n-1}) \in \mathbb{Z}$. Множества $\mathcal{M}_n$ попарно не пересекаются и $\mathbb{Z} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n$. Определим теперь непрерывное многозначное отображение $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) \subseteq B_{\mathbb{C}}(0,1)$, для каждого $t \in \mathbb{R}$ положив $F(t) = G_{n(t)}(t - [t])$, где число $n = n(t) \in \mathbb{N}$ однозначно определяется из условия $[t] \in \mathcal{M}_n$ ($[t]$ — целая часть числа t). Пусть $\mathbb{R} \ni t \mapsto F_n(t) \subseteq B_{\mathbb{C}}(0,1)$, $n \in \mathbb{N}$, — многозначные отображения, для которых $F_n(t) = G_{n(t)}(t - [t])$, если $n(t) \leqslant n$, и $F_n(t) = G_0(t - [t])$, если $[t] \in \mathbb{Z} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} \mathcal{M}_k$. Многозначные отображения F_n являются липшицевыми (на $\mathbb{R}$) и периодическими с периодом 2^n. Из (2.7) следует, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}}\ \mathrm{dist}\,(F(t), F_n(t)) \to 0$$

при $n \to +\infty$. Поэтому многозначное отображение F является почти периодическим по Бору (и, следовательно, рекуррентным) и локально липшицевым. При этом из выбора множеств $\mathcal{M}_n$ и отображений G_n вытекает, что для любого $l > 0$ найдется число $n(l) \in \mathbb{N}$ такое, что $F(t) \in \mathrm{cl}^{(n(l))}\, U$ при всех $t \in [-l, l]$ (однако для любого $n \in \mathbb{N}$ существует число $t \in \mathbb{R}$ такое, что $F(t) \in \mathrm{cl}^{(n+1)}\, U \setminus \mathrm{cl}^{(n)}\, U$). Если $f \in \mathfrak{F}(F(.))$, то из определения многозначных отображений G_n вытекает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ при изменении t от $m_n + \frac{1}{3}$ до $m_n + \frac{2}{3}$ выполняется равенство $|f(t)| = 1$ и функция $t \mapsto f(t)$ делает n оборотов (против часовой стрелки) вокруг начала координат. Поэтому функция f не является равномерно непрерывной (на $\mathbb{R}$) и, следовательно, не может быть рекуррентной, то есть у многозначного отображения $F(.)$ нет рекуррентных сечений (но в силу теоремы 6 существуют почти рекуррентные сечения).

Для рекуррентных многозначных отображений $t \mapsto F(t) \in \mathrm{cl}^{(n)}\, U$, $n \in \mathbb{N}$, вообще говоря, не для всех $\xi \in \mathbb{R}$ и $x \in F(\xi)$ существует почти рекуррентная функция $f \in \mathfrak{F}(F(.))$, для которой $f(\xi) = x$.

Пример 4. Пусть $U = \mathbb{R}$, $\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Определим липшицево и периодическое с периодом 1 многозначное отображение

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) = \{0,\, t - [t],\, 1\} \in \mathrm{cl}^{(3)}\, \mathbb{R}.$$

Отображение $F(.)$ имеет (только) два почти рекуррентных сечения $f_0(t) \equiv 0$ и $f_1(t) \equiv 1$, $t \in \mathbb{R}$, которые не принимают значения $t - [t]$ при $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Из леммы 2 следует

Лемма 7. *Пусть $F \in C(\mathbb{R}, \mathrm{cl}^{(n)}\, U)$ и при каждом $t \in \mathbb{R}$ множество $F(t)$ состоит из n точек, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существуют функции $f_j \in C(\mathbb{R}, U)$, $j = 1, \ldots, n$, принимающие при каждом $t \in \mathbb{R}$ разные значения, для которых $F(t) = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \{f_j(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$.*

Теорема 12. *Пусть $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) \in \mathrm{cl}^{(n)}\, U \setminus \mathrm{cl}^{(n-1)}\, U \subseteq \mathrm{cl}^{(n)}\, U$, $n \in \mathbb{N}$, — многозначное почти рекуррентное отображение. Тогда функции f_j, $j = 1, \ldots, n$, определяемые в лемме 7, также являются почти рекуррентными.*

Доказательство. Для числа $l > 0$ обозначим

$$\varepsilon_l(F) \doteq \min_{t \in [-l, l]} \; \min_{j_1, j_2 \in \{1, \ldots, n\},\ j_1 \neq j_2} \; \rho(f_{j_1}(t), f_{j_2}(t)) > 0.$$

Пусть $\varepsilon \in \bigl(0, \frac{1}{2}\, \varepsilon_l(F)\bigr]$ и $T(l, \varepsilon; F)$ — (относительно плотное) множество чисел $\tau \in \mathbb{R}$, для которых $D^{(\mathrm{dist})}_{[-l, l]}\bigl(F(.), F(. + \tau)\bigr) < \varepsilon$. Для любого $\tau \in T(l, \varepsilon; F)$ и любого индекса $j \in \{1, \ldots, n\}$ найдется индекс $\pi^{(l)}_\tau(j) \in \{1, \ldots, n\}$ такой, что

$$D^{(\rho)}_{[-l, l]}\bigl(f_j(.), f_{\pi^{(l)}_\tau(j)}(. + \tau)\bigr) < \varepsilon \tag{2.8}$$

и при этом $\rho\bigl(f_{j_1}(t), f_{\pi^{(l)}_\tau(j)}(t + \tau)\bigr) > \frac{1}{2}\, \varepsilon_l(F)$ для всех $j_1 \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$ и $t \in [-l, l]$. Поэтому из условия (2.8) индекс $\pi^{(l)}_\tau(j)$ определяется однозначно и при $j = 1, \ldots, n$ индексы $\pi^{(l)}_\tau(j)$ принимают все значения $1, \ldots, n$. Это означает, что $j \mapsto \pi^{(l)}_\tau(j)$ — перестановка чисел $1, \ldots, n$. Множество всех перестановок чисел $1, \ldots, n$ будем обозначать через $\mathfrak{S}_n$. При $\tau = 0 \in T(l, \varepsilon; F)$ для всех j справедливо равенство $\pi^{(l)}_0(j) = j$, поэтому $\pi^{(l)}_0(j) \in \mathfrak{S}_n$ — тождественная перестановка. Выберем числа $\tau_1 = 0$, $\tau_2, \ldots, \tau_m \in T(l, \varepsilon; F)$, $m \in \mathbb{N}$, так, чтобы перестановки $\pi^{(l)}_{\tau_k} \in \mathfrak{S}_n$ были разными при разных k и среди них присутствовали все перестановки $\pi^{(l)}_\tau$, $\tau \in T(l, \varepsilon; F)$. Существует число $\delta \in (0, \varepsilon)$ такое, что для всех $k = 1, \ldots, m$

$$D^{(\mathrm{dist})}_{[-l, l]}\bigl(F(.), F(. + \tau_k)\bigr) < \varepsilon - \delta\,. \tag{2.9}$$

Откуда для всех $j = 1, \ldots, n$ и $k = 1, \ldots, m$

$$D^{(\rho)}_{[-l, l]}\bigl(f_j(.), f_{\pi^{(l)}_{\tau_k}(j)}(. + \tau_k)\bigr) < \varepsilon - \delta\,. \tag{2.10}$$

Определим теперь (для заданных чисел l и ε) число $l_1 \geqslant l$, исходя из условия

$$\bigcup_{k=1}^{m} [-l + \tau_k, l + \tau_k] \subseteq [-l_1, l_1].$$

Пусть $\widetilde{T}$ — (относительно плотное) множество чисел $\widetilde{\tau} \in \mathbb{R}$, для которых

$$D^{(\mathrm{dist})}_{[-l_1,\,l_1]}\big(F(.),F(.+\tau)\big) < \min\big\{\delta,\ \frac{1}{2}\,\varepsilon_{l_1}(F)\big\}\,; \tag{2.11}$$

$\widetilde{T} \subseteq T(l,\varepsilon;F)$. Из (2.11), в частности, следует, что для всех $\widetilde{\tau} \in \widetilde{T}$ и всех $j = 1,\dots,n$ и $k = 1,\dots,m$

$$D^{(\rho)}_{[-l,\,l]}\big(f_j(.+\tau_k), f_{\pi^{(l_1)}_{\widetilde{\tau}}(j)}(.+\tau_k+\widetilde{\tau})\big) < \min\big\{\delta,\ \frac{1}{2}\,\varepsilon_{l_1}(F)\big\}\,. \tag{2.12}$$

Из (2.10) и (2.12) для всех $j = 1,\dots,n$ (и всех $\widetilde{\tau} \in \widetilde{T}$ и $k = 1,\dots,m$) получаем

$$D^{(\rho)}_{[-l,\,l]}\big(f_j(.), f_{\pi^{(l_1)}_{\widetilde{\tau}}(\pi^{(l)}_{\tau_k}(j))}(.+\tau_k+\widetilde{\tau})\big) \leqslant \tag{2.13}$$

$$D^{(\rho)}_{[-l,\,l]}\big(f_j(.), f_{\pi^{(l)}_{\tau_k}(j)}(.+\tau_k)\big) + D^{(\rho)}_{[-l,\,l]}\big(f_{\pi^{(l)}_{\tau_k}(j)}(.+\tau_k), f_{\pi^{(l_1)}_{\widetilde{\tau}}(\pi^{(l)}_{\tau_k}(j))}(.+\tau_k+\widetilde{\tau})\big) < (\varepsilon-\delta)+\delta = \varepsilon\,.$$

С другой стороны, из (2.9) и (2.11) для всех $\widetilde{\tau} \in \widetilde{T}$ и $k = 1,\dots,m$ вытекает неравенство

$$D^{(\mathrm{dist})}_{[-l,\,l]}\big(F(.),F(.+\tau_k+\widetilde{\tau})\big) \leqslant$$

$$D^{(\mathrm{dist})}_{[-l,\,l]}\big(F(.),F(.+\tau_k)\big) + D^{(\mathrm{dist})}_{[-l+\tau_k,\,l+\tau_k]}\big(F(.),F(.+\widetilde{\tau})\big) < (\varepsilon-\delta)+\delta = \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\,\varepsilon_l(F).$$

Следовательно, $\tau_k + \widetilde{\tau} \in T(l,\varepsilon;F)$ и для всех $j = 1,\dots,n$

$$D^{(\rho)}_{[-l,\,l]}\big(f_j(.), f_{\pi^{(l)}_{\tau_k+\widetilde{\tau}}(j)}(.+\tau_k+\widetilde{\tau})\big) < \varepsilon\,. \tag{2.14}$$

Так как $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\,\varepsilon_l(F)$, то, сравнивая неравенства (2.13) и (2.14), заключаем, что для всех $\widetilde{\tau} \in \widetilde{T}$ и всех $k = 1,\dots,m$

$$\pi^{(l)}_{\tau_k+\widetilde{\tau}} = \pi^{(l_1)}_{\widetilde{\tau}}\,\pi^{(l)}_{\tau_k} \tag{2.15}$$

(справа стоит композиция перестановок). При разных $k = 1,\dots,m$ перестановки $\pi^{(l)}_{\tau_k} \in \mathfrak{S}_n$ разные. Поэтому из (2.15) следует, что это же справедливо и для перестановок $\pi^{(l)}_{\tau_k+\widetilde{\tau}} \in \mathfrak{S}_n$, $k = 1,\dots,m$. С другой стороны, (в силу выбора чисел τ_k) каждая перестановка $\pi^{(l)}_{\tau_k+\widetilde{\tau}}$, $k = 1,\dots,m$, принадлежит множеству $\{\pi^{(l)}_{\tau_k} : k = 1,\dots,m\} \subseteq \mathfrak{S}_n$. Поэтому $\{\pi^{(l)}_{\tau_k+\widetilde{\tau}} : k = 1,\dots,m\} = \{\pi^{(l)}_{\tau_k} : k = 1,\dots,m\}$. В частности, для некоторого $k = k(l,\varepsilon;\widetilde{\tau}) \in \{1,\dots,m\}$ перестановка $\pi^{(l)}_{\tau_k+\widetilde{\tau}}$ совпадает с тождественной перестановкой $\pi^{(l)}_{\tau_1} = \pi^{(l)}_0 \in \mathfrak{S}_n$. Обозначим $T' \doteq \{\tau_{k(l,\varepsilon;\widetilde{\tau})} + \widetilde{\tau} : \widetilde{\tau} \in \widetilde{T}\}$. Множество $T' \subseteq T(l,\varepsilon;F)$ относительно плотно (так как относительно плотно множество $\widetilde{T} \in T(l,\varepsilon;F)$ и имеется только конечное множество чисел τ_k, $k = 1,\dots,m$). При этом для всех $\tau \in T'$ и всех $j = 1,\dots,n$ (см. (2.8) в случае, когда перестановка $\pi^{(l)}_{\tau}$ тождественная)

$$D^{(\rho)}_{[-l,\,l]}\big(f_j(.), f_j(.+\tau)\big) < \varepsilon\,. \tag{2.16}$$

Последние неравенства (в силу произвольности выбора чисел $l > 0$ и $\varepsilon \in \big(0, \frac{1}{2}\,\varepsilon_l(F)\big]$ и относительной плотности множества T') означают, что f_j, $j = 1,\dots,n$, — почти рекуррентные функции. □

Замечание 1. Из доказательства теоремы 12 (см. неравенства (2.16)) следует, что функции f_j являются почти рекуррентными равномерно относительно $j \in \{1,\dots,n\}$, то есть для любого $\varepsilon' > 0$ относительно плотно множество чисел $\tau \in \mathbb{R}$, для которых

$$\max_{j=1,\dots,n} d^{(\rho)}_C\big(f_j(.), f_j(.+\tau)\big) < \varepsilon'.$$

Теорема 13. *Пусть $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) \in \mathrm{cl}^{(n)} U$ — многозначное рекуррентное отображение и при каждом $t \in \mathbb{R}$ множество $F(t)$ состоит из n точек, $n \in \mathbb{N}$. Тогда функции f_j, $j = 1, \ldots, n$, определяемые в лемме 7, также являются рекуррентными.*

Теорема 13 непосредственно вытекает из теоремы 12 и следствия 3.

Для почти периодических по Бору многозначных отображений $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) \in \mathrm{cl}^{(n)} U$ аналогичного теоремам 12 и 13 утверждения нет. В [11] приведен пример непрерывной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, которая не является почти периодической по Бору, но для которой двузначное отображение $\mathbb{R} \ni t \mapsto \{f(t), -f(t)\} \in \mathrm{cl}^{(2)} \mathbb{R}^2$ почти периодично по Бору.

§ 3. Доказательства теорем 1 и 4

Доказательство теоремы 1. Можно считать, что полное метрическое пространство (U, ρ) изометрически вложено в некоторое банахово пространство $(\mathcal{B}, \|.\|)$ ($\rho(x, y) = \|x - y\|$ для всех x, $y \in U$) [12]. Не ограничивая общности, положим $\xi = 0$. Фиксируем точку $x \in F(0)$. Определим далее для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ непрерывную функцию $\mathbb{R} \ni t \mapsto f_m(t) \in \mathcal{B}$. Пусть $f_m(0) = x$. Последовательно при $k = 1, 2, \ldots$ выберем значения $f_m(2^{-m}k) \in F(2^{-m}k)$ так, что

$$\rho\big(f_m(2^{-m}k), f_m(2^{-m}(k-1))\big) \leqslant \mathrm{dist}\,\big(F(2^{-m}k), F(2^{-m}(k-1))\big)$$

(что можно сделать в силу определения метрики Хаусдорфа и компактности множеств $F(t)$, $t \in \mathbb{R}$). Аналогичным образом, при $k = -1, -2, \ldots$ выберем значения $f_m(2^{-m}k) \in F(2^{-m}k)$, исходя из условий

$$\rho\big(f_m(2^{-m}k), f_m(2^{-m}(k+1))\big) \leqslant \mathrm{dist}\,\big(F(2^{-m}k), F(2^{-m}(k+1))\big).$$

При остальных значениях $t \in \mathbb{R} \setminus 2^{-m}\mathbb{Z}$ функцию $t \mapsto f_m(t) \in \mathcal{B}$ определим так, чтобы она была линейной на каждом отрезке $[2^{-m}k, 2^{-m}(k+1)]$, $k \in \mathbb{Z}$. Если $\delta > 0$ и (α_j, β_j), $\alpha_j < \beta_j$, $j = 1, \ldots, n$, — попарно непересекающиеся интервалы, содержащиеся в отрезке $[a, b]$, $a < b$, для которых $\alpha_j, \beta_j \in 2^{-m}\mathbb{Z}$ и $\sum\limits_j (\beta_j - \alpha_j) \leqslant \delta$, то из выбора значений $f(2^{-m}k)$, $k \in \mathbb{Z}$, следует, что

$$\sum_j \rho\big(f_m(\beta_j), f_m(\alpha_j)\big) \leqslant \varepsilon^{(\mathrm{dist})}(F(.|_{[a,\,b]}); \delta). \tag{3.1}$$

Из определения функций f_m и оценки (3.1) нетрудно видеть, что для любого $l > 0$ функции $f_m(.|_{[-l,\,l]})$, $m \in \mathbb{Z}_+$, равностепенно равномерно непрерывны. Так как $\bigcup\limits_{m \in \mathbb{Z}_+} 2^{-m}\mathbb{Z}$ — счетное множество и $F(t) \subseteq U\ (\subseteq \mathcal{B})$, $t \in \mathbb{R}$, — компактные множества, то, используя диагональный метод, из последовательности функций f_m, $m \in \mathbb{Z}_+$, можно выбрать подпоследовательность f_{m_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$, для которой значения $f_{m_\nu}(t)$ сходятся при $\nu \to +\infty$ (к некоторой точке из пространства $U \subseteq \mathcal{B}$) для всех $t \in \bigcup\limits_{m \in \mathbb{Z}_+} 2^{-m}\mathbb{Z}$. С другой стороны, так как для любого $l > 0$ функции $f_{m_\nu}(.|_{[-l,\,l]})$, $\nu \in \mathbb{N}$, равностепенно равномерно непрерывны, то существует функция $f \in C(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ такая, что $D^{(\rho)}_{[-l,\,l]}\big(f(.), f_{m_\nu}(.)\big) \to 0$ при $\nu \to +\infty$ для любого $l > 0$. При этом $f(0) = x$ (так как $f_{m_\nu}(0) = x$ для всех $\nu \in \mathbb{N}$). Если $t \in \bigcup\limits_{m \in \mathbb{Z}_+} 2^{-m}\mathbb{Z}$, то из включений $f_{m_\nu}(t) \in F(t)$, $\nu \in \mathbb{N}$, получаем, что также $f(t) \in F(t) \subseteq U$. Поэтому из непрерывности функции f (и многозначного отображения F) следует, что $f(t) \in F(t) \subseteq U$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Если $\delta > 0$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, и $(\alpha_j, \beta_j) \subset [a, b]$ — попарно непересекающиеся интервалы, $\alpha_j < \beta_j$, $j = 1, \ldots, n$, для которых $\alpha_j, \beta_j \in \bigcup\limits_{m \in \mathbb{Z}_+} 2^{-m}\mathbb{Z}$ и $\sum\limits_j (\beta_j - \alpha_j) \leqslant \delta$, то из (3.1) вытекает оценка

$$\sum_j \rho\big(f(\beta_j), f(\alpha_j)\big) \leqslant \varepsilon^{(\mathrm{dist})}(F(.|_{[a,\,b]}); \delta). \tag{3.2}$$

В силу непрерывности функции f из оценки (3.2) (для любого $\delta > 0$ и любого отрезка $[a, b]$) следует, что

$$\varepsilon^{(\rho)}(f(.|_{[a,b]}); \delta) \leqslant \varepsilon^{(\mathrm{dist})}(F(.|_{[a,b]}); \delta).$$

Поэтому $f \in \mathfrak{F}^{AC}_{\mathrm{loc}}(F(.))$. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Допустим противное. Тогда существует число $\varepsilon' > 0$ такое, что для любых $l, \varepsilon > 0$ найдется функция $f \in AC_u(\mathbb{R}, U)$, для которой

$$\max_{t \in [-l,l]} \rho\bigl(f(t), F(t)\bigr) < \varepsilon$$

и $E^{(\rho)}_L(f; \delta) \leqslant E^{(\mathrm{dist})}_L(F; \delta)$ при всех $L > 0$ и $\delta > 0$, такая, что для всех функций $\widetilde{f} \in \mathfrak{F}^{AC}_u(F(.))$ выполняется неравенство $d^{(\rho)}_C(f, \widetilde{f}) \geqslant \varepsilon'$. Поэтому можно выбрать последовательность функций $f_j \in AC_u(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, для которых

(a) $E^{(\rho)}_L(f_j; \delta) \leqslant E^{(\mathrm{dist})}_L(F; \delta)$ для всех $L > 0$ и $\delta > 0$,

(b) $\max\limits_{t \in [-l,l]} \rho\bigl(f_j(t), F(t)\bigr) \to 0$ при $j \to +\infty$ для всех $l > 0$,

(c) $f_j \notin \bigl(\mathfrak{F}^{AC}_u(F(.))\bigr)^{\varepsilon'} \subseteq C(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$.

Из условия (a) следует, что функции $f_j : \mathbb{R} \to U$, $j \in \mathbb{N}$, равностепенно равномерно непрерывны. Кроме того, множества $F(t) \subseteq U$ компактны при всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому найдется последовательность f_{j_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$, равномерно на каждом отрезке $[-l, l]$, $l > 0$, сходящаяся при $\nu \to +\infty$ к некоторой функции $f \in C(\mathbb{R}, U)$. Последнее означает, что $d^{(\rho)}_C(f, f_{j_\nu}) \to 0$ при $\nu \to +\infty$. Более того, из условия (a) (так как $f_{j_\nu}(t) \to f(t)$ при $\nu \to +\infty$ для всех $t \in \mathbb{R}$) также следует, что $E^{(\rho)}_L(f; \delta) \leqslant E^{(\mathrm{dist})}_L(F; \delta)$ для всех $L > 0$ и $\delta > 0$. Из условия (b) (и замкнутости множеств $F(t)$, $t \in \mathbb{R}$) получаем, что $f(t) \in F(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому $f \in \mathfrak{F}^{AC}_u(F(.))$ и, следовательно, $d^{(\rho)}_C\bigl(f_{j_\nu}, \mathfrak{F}^{AC}_u(F(.))\bigr) \to 0$ при $\nu \to +\infty$, что противоречит условию (c). Полученное противоречие доказывает теорему 4. $\square$

§ 4. Доказательства теорем 7, 8 и 9

Лемма 8. *Пусть $f_j \in C(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, $F \in C(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\, U)$ и $F(t) \in \mathrm{cl}_f\, U$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Предположим, что для всех $l > 0$*

$$\max_{t \in [-l,l]} \rho\bigl(f_j(t), F(t)\bigr) \to 0 \tag{4.1}$$

при $j \to +\infty$. Тогда найдутся подпоследовательность f_{j_k}, $k \in \mathbb{N}$, последовательности f_j, $j \in \mathbb{N}$, и функция $f \in \mathfrak{F}(F(.))$ такие, что $d^{(\rho)}_C(f, f_{j_k}) \to 0$ при $k \to +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T_0 \subset \mathbb{R}$ — любое счетное плотное (в $\mathbb{R}$) множество. Так как $F(t) \in \mathrm{cl}_f\, U$, $t \in \mathbb{R}$, то (см. (4.1)) для любого $t' \in T_0$ существуют точка $x(t') \in F(t')$ и подпоследовательность f_{j_k}, $k \in \mathbb{N}$, последовательности f_j, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $f_{j_k}(t') = x(t')$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Используя диагональный метод, отсюда получаем, что существует подпоследовательность f_{j_k}, $k \in \mathbb{N}$, такая, что $f_{j_k}(t') \to x(t')$ при $k \to +\infty$ для всех $t' \in T_0$ (более того, при всех достаточно больших $k \geqslant \widetilde{k}(t') \in \mathbb{N}$, точки $f_{j_k}(t')$ совпадают с $x(t')$). Фиксируем число $\varepsilon > 0$. Для любого $t \in \mathbb{R}$ пусть $x^{(t)}_1, \ldots, x^{(t)}_{N(t)} \in U$ — разные точки, для которых $F(t) = \{x^{(t)}_l : l = 1, \ldots, N(t)\}$. Выберем число $\varepsilon_1(t) \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$ так, чтобы открытые шары $B_U(x^{(t)}_l, \varepsilon_1(t))$, $l = 1, \ldots, N(t)$, попарно не пересекались. Из леммы 2 следует существование числа $\delta(t) > 0$, для которого

$$F(\tau) \in \bigcup_{l=1}^{N(t)} B_U\left(x^{(t)}_l, \frac{\varepsilon_1(t)}{2}\right)$$

при всех $\tau \in (t-\delta(t), t+\delta(t))$. Поэтому из (4.1) вытекает, что для любого достаточно большого натурального числа $k \geqslant k_0(t) \in \mathbb{N}$ найдется индекс $l^{(t)}(k) \in \{1, \ldots, N(t)\}$ такой, что для всех $\tau \in (t-\delta(t), t+\delta(t))$

$$\rho\biggl(f_{j_k}(\tau), F(\tau) \cap B_U\biggl(x^{(t)}_{l^{(t)}(k)}, \frac{\varepsilon_1(t)}{2}\biggr)\biggr) < \frac{\varepsilon_1(t)}{2}.$$

Но, с другой стороны, существует число $t' \in T_0 \cap (t-\delta(t), t+\delta(t))$, для которого $f_{j_k}(t') \to x(t') \in F(t')$ при $k \to +\infty$. Следовательно, при достаточно больших натуральных числах $k \geqslant k_0'(t) \geqslant k_0(t)$ (где $k_0'(t) \in \mathbb{N}$) индекс $l^{(t)}(k) = l^{(t)}$ от k не зависит и $f_{j_k}(\tau) \in B_U\bigl(x^{(t)}_{l^{(t)}}, \varepsilon_1(t)\bigr)$ для всех $\tau \in (t-\delta(t), t+\delta(t))$. Последнее означает, что

$$\rho\bigl(f_{j_{k_1}}(\tau), f_{j_{k_2}}(\tau)\bigr) < 2\varepsilon_1(t) < \varepsilon \tag{4.2}$$

при всех $k_1, k_2 \geqslant k_0'(t)$ (и $\tau \in (t-\delta(t), t+\delta(t))$). Пусть $l > 0$. Так как отрезок $[-l, l]$ компактен, то существует конечное множество чисел $t_s \in [-l, l]$, $s = 1, \ldots, S(l)$, для которых

$$[-l, l] \subset \bigcup_{s=1}^{S(l)} (t_s - \delta(t_s), t_s + \delta(t_s)).$$

Тогда из (4.2) получаем, что для всех $k_1, k_2 \geqslant \max\limits_{s=1,\ldots,S(l)} k_0'(t_s)$

$$D^{(\rho)}_{[-l,,l]}\bigl(f_{j_{k_1}}(.), f_{j_{k_2}}(.)\bigr) < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Теперь из произвольности выбора чисел $l, \varepsilon > 0$ и из (4.3) следует, что последовательность f_{j_k}, $k \in \mathbb{N}$, является фундаментальной в полном метрическом пространстве $(C(\mathbb{R}, U), d^{(\rho)}_C)$ и поэтому существует функция $f \in C(\mathbb{R}, U)$ такая, что $d^{(\rho)}_C(f, f_{j_k}) \to 0$ при $k \to +\infty$ (при этом $f(t') = x(t')$, $t' \in T_0$). Включения $f(t) \in F(t)$, $t \in \mathbb{R}$, выполняются в силу (4.1) и замкнутости множеств $F(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, $f \in \mathfrak{F}(F(.))$. □

Доказательство теоремы 7. Не ограничивая общности, можно считать, что метрическое пространство (U, ρ) изометрично вложено в некоторое банахово пространство $(\mathcal{B}, \|.\|)$ $(\rho(x,y) = \|x-y\|$, $x, y \in \mathcal{B} \supseteq U)$ и $\xi = 0$. Пусть $x \in F(0)$ и $l, \varepsilon > 0$. Выберем число $\delta \in (0, l]$ так, что $\operatorname{dist}(F(t_1), F(t_2)) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $t_1, t_2 \in [-2l, 2l]$, для которых $|t_1 - t_2| \leqslant \delta$. Аналогично выбору функций f_m при доказательстве теоремы 1 определим функцию $f_* \in C(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ так, чтобы она была линейной на каждом отрезке $[k\delta, (k+1)\delta]$, $k \in \mathbb{Z}$, и при этом $f_*(0) = x$, $f_*(k\delta) \in F(k\delta)$ и $\rho\bigl(f_*((k+1)\delta), f_*(k\delta)\bigr) \leqslant \operatorname{dist}\bigl(F((k+1)\delta), F(k\delta)\bigr)$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. Для любого $t \in [-l, l]$ найдется число $k \in \mathbb{Z}$, для которого $k\delta \leqslant t < (k+1)\delta$ и $k\delta$, $(k+1)\delta \in [-2l, 2l]$. Тогда

$$\|f_*(t) - f_*(k\delta)\| \leqslant \frac{t - k\delta}{\delta}\, \|f_*((k+1)\delta) - f_*(k\delta)\| \leqslant \operatorname{dist}\bigl(F((k+1)\delta), F(k\delta)\bigr) < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно, (для любого $t \in [-l, l]$)

$$\rho(f_*(t), F(t)) \leqslant \|f_*(t) - f_*(k\delta)\| + \operatorname{dist}(F(t), F(k\delta)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как числа $l, \varepsilon > 0$ выбираются произвольно, то найдется последовательность функций $f_j \in C(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $j \in \mathbb{N}$, такая, что для всех $l > 0$

$$\max_{t \in [-l, l]} \rho(f_j(t), F(t)) \to 0$$

при $j \to +\infty$ и $f_j(0) = x$ при всех $j \in \mathbb{N}$. В силу леммы 8 существуют функция $f \in \mathfrak{F}(F(.))$ и подпоследовательность f_{j_k}, $k \in \mathbb{N}$, для которых $d^{(\rho)}_C(f, f_{j_k}) \to 0$ при $k \to +\infty$. Так как $f_{j_k}(0) = x$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то также $f(0) = x$. □

Доказательство теоремы 8. В силу теоремы 7 множество $\mathfrak{F}(F(.))$ непусто. Если $f_j \in \mathfrak{F}(F(.))$, $j \in \mathbb{N}$, — произвольная последовательность, то $\rho(f_j(t), F(t)) = 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{R}$. Поэтому выполнено условие (4.1) и из леммы 8 следует существование подпоследовательности f_{j_k}, $k \in \mathbb{N}$, и функции $f \in \mathfrak{F}(F(.))$ таких, что $d_C^{(\rho)}(f, f_{j_k}) \to 0$ при $k \to +\infty$. Последнее означает компактность множества $\mathfrak{F}(F(.))$. $\square$

Доказательство теоремы 9. Как и при доказательстве теоремы 4 допустим противное. Тогда существует число $\varepsilon' > 0$ такое, что для любых чисел $l, \varepsilon > 0$ можно найти функцию $f \in C(\mathbb{R}, U)$, для которой

$$\max_{t \in [-l, l]} \rho(f(t), F(t)) < \varepsilon$$

и $d_C^{(\rho)}(f, \widetilde{f}) \geqslant \varepsilon'$ для всех функций $\widetilde{f} \in \mathfrak{F}(F(.))$. Поэтому можно выбрать последовательность функций $f_j \in C(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, для которых выполнено условие (4.1) и

$$f_j \notin \big(\mathfrak{F}(F(.))\big)^{\varepsilon'} \subseteq C(\mathbb{R}, U) \tag{4.4}$$

при всех $j \in \mathbb{N}$. С другой стороны, из леммы 8 следует, что существуют подпоследовательность f_{j_k}, $k \in \mathbb{N}$, и функция $\widetilde{f} \in \mathfrak{F}(F(.))$ такие, что $d_C^{(\rho)}(\widetilde{f}, f_{j_k}) \to 0$ при $k \to +\infty$. Но это противоречит (4.4). Полученное противоречие доказывает теорему 9. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Michael E. Continuous selections. I // Ann. Math. 1956. Vol. 63. № 2. P. 361–381.
2. Kikuchi N., Tomita Y. On the absolute continuity of multi-functions and orientor fields // Funkcialaj Ekvacioj. 1971. Vol. 14. P. 161–170.
3. Hermes H. On continuous and measurable selections and the existence of solutions of generalized differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 29. № 3. P. 535–542.
4. Данилов Л.И. Рекуррентные и почти рекуррентные многозначные отображения и их сечения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 19–51.
5. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 456 с.
6. Аносов Д.В., Арансон С.Х., Бронштейн И.У., Гринес В.З. Гладкие динамические системы // Динамические системы – 1. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. Том 1. М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1985. С. 151–242.
7. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005. 216 с.
8. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. Ижевск: Удмуртский университет, 1999. 408 с.
9. Ирисов А.Е., Тонков Е.Л. Достаточные условия оптимальности рекуррентных по Биркгофу движений дифференциального включения // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2005. Вып. 1. С. 59–74.
10. Панасенко Е.А. О существовании рекуррентных и почти периодических решений дифференциального включения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 42–57.
11. Данилов Л.И. Почти периодические сечения многозначных отображений // Известия отдела математики и информатики УдГУ. Ижевск, 1993. Вып. 1. С. 16–78.
12. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982. 271 с.

Поступила в редакцию 17.05.2012

МАТЕМАТИКА 2012. Вып. 4

Данилов Леонид Иванович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Физико-технический институт УрО РАН, 426000, Россия, г. Ижевск, ул. Кирова, 132.
E-mail: lidanilov@mail.ru

L. I. Danilov

Recurrent and almost recurrent multivalued maps and their selections. II

Keywords: recurrent function, selection, multivalued mapping.

Mathematical Subject Classifications: 42A75, 54C65

In the paper, we consider the problem of existence of recurrent and almost recurrent selections of multivalued mappings $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) \in \operatorname{comp} U$ with nonempty compact sets $F(t)$ in a complete metric space U. The set $\operatorname{comp} U$ is equipped with the Hausdorff metric dist. Recurrent and almost recurrent multivalued maps are defined as the functions with values in the metric space $(\operatorname{comp} U, \operatorname{dist})$. It is proved that there are recurrent (almost recurrent) selections of multivalued recurrent (almost recurrent) uniformly absolutely continuous maps. We also consider mappings $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t)$ with the sets $F(t)$ consisting of a finite number of points (the number depends on the $t \in \mathbb{R}$). We prove that if such a map is almost recurrent, then it has an almost recurrent selection. A multivalued recurrent mapping $t \mapsto F(t)$ with sets $F(t)$ consisting of at most n points (where $n \in \mathbb{N}$) has a recurrent selection. If the sets $F(t)$ of a multivalued recurrent (almost recurrent) mapping $t \mapsto F(t)$ consist of n points for all $t \in \mathbb{R}$, then all n continuous selections of the map F are recurrent (almost recurrent).

REFERENCES

1. Michael E. Continuous selections. I, *Ann. Math.*, 1956, vol. 63, no. 2, pp. 361–381.

2. Kikuchi N., Tomita Y. On the absolute continuity of multi-functions and orientor fields, *Funkcialaj Ekvacioj*, 1971, vol. 14, pp. 161–170.

3. Hermes H. On continuous and measurable selections and the existence of solutions of generalized differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1971, vol. 29, no. 3, pp. 535–542.

4. Danilov L.I. Recurrent and almost recurrent multivalued maps and their selections, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 2, pp. 19–51.

5. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravnenii* (Qualitative theory of differential equations), Moscow–Izhevsk: RCD, 2004, 456 p.

6. Anosov D.V., Aranson S.Kh., Arnold V.I., Bronshtein I.U., Grines V.Z., Il'yashenko Yu.S. *Ordinary differential equations and smooth dynamical systems*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1997.

7. Borisovich Y.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. *Vvedeniye v teoriyu mnogoznachnykh otobrazhenii i differentsial'nykh vklyuchenii* (Introduction to the theory of set-valued mappings and differential inclusions), Moscow: KomKniga, 2005, 216 p.

8. Birkhoff G.D. *Dynamical Systems*, New York, 1927. Translated under the title *Dinamicheskie sistemy*, Izhevsk: Udmurt. Univ., 1999, 408 p.

9. Irisov A.E., Tonkov E.L. Sufficient conditions for optimality of Birkhoff recurrent motions for differential inclusion, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat.*, 2005, no. 1, pp. 59–74.

10. Panasenko E.A. On existence of recurrent and almost periodic solutions to differential inclusions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 42–57.

11. Danilov L.I. Almost periodic selections of multivalued maps, *Izv. Otd. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, Izhevsk, 1993, no. 1, pp. 16–78.

12. Lyusternik L.A., Sobolev V.I. *Kratkii kurs funktsional'nogo analiza* (A short course of functional analysis), Moscow: Vysshaya shkola, 1982, 271 p.

Received 17.05.2012

Danilov Leonid Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Physical–Technical Institute, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Kirova, 132, Izhevsk, 426000, Russia.
E-mail: lidanilov@mail.ru